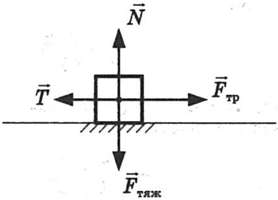
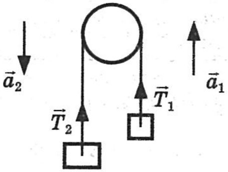
Полезные советы по динамике

› Прежде всего определись с выбором **основных моделей.** При решении задач по теме «Динамика», как правило, размеры движущихся или находящихся в покое тел оказываются несущественны. Поэтому их считают материальными точками. Это освобождает тебя от необходимости задумываться над тем, в каком месте или точке приложены действующие на тело силы: все силы рисуем приложенными к одной точке – к центру масс тела.



Например, указание места приложения сил на рисунке — лишняя информация!

› При рассмотрении движения связанных тел часто употребляется модель «невесомая нерастяжимая нить». «Невесомость» нити позволяет не рассматривать ее как отдельное тело и, соответственно, не писать для нее основное уравнение динамики (2 закон Ньютона). Как следствие, силы натяжения нити, приложенные к связанным телам, оказываются равными по модулю. Условие «нерастяжимости» позволяет считать, что все связанные тела движутся с одинаковым по модулю ускорением.



$$T_1 = T_2, \quad a_1 = a_2$$

› Решение большинства динамических задач строится на векторной записи 2 закона Ньютона в виде:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N = m\vec{a}$$

При этом часто приходится вспоминать и основные уравнения кинематики.

› Вспомни основные уравнения кинематики:

- $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$
- $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \dfrac{\vec{a}t^2}{2}$
- $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$
- $\vec{v}_{\text{н}} = \vec{v}_{\text{п}} + \vec{v}_{\text{пн}}$

› При работе с векторными уравнениями помни, что, как и при решении кинематических задач, часто существует возможность выбора между **аналитическим** и **графическим** способами решения. У каждого из них свой алгоритм действий. Но, какой бы путь ты не выбрал, после анализа условия задачи тебе необходимо **сделать рисунок**!

В любом случае необходимо изобразить на рисунке само тело (материальную точку) и основные вектора, как динамические, так и кинематические.

› Применительно к динамике аналитический (векторно-проекционный) подход употребляется значительно чаще, хотя графический (геометрический) подход в ряде случаев оказывается короче.

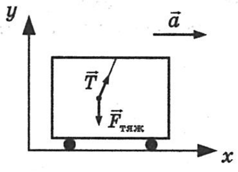
Рассмотрим общие алгоритмы обоих подходов при решении следующей задачи:

Вагон движется с горизонтальным ускорением 9,8 м/с². К потолку подвешен на нити груз массой 100 г. Какова сила натяжения нити?

Векторно-проекционный подход

1. **Идентифицируй характер движения. Нарисуй тело,** о котором идет речь в задаче, а также **векторы сил и кинематические векторы. Выбери инерциальную систему отсчета** (СО) с удобным для нахождения проекций векторов направлением координатных осей.

   СО, связанная с вагоном, не является инерциальной. Чтобы иметь возможность применить 2 закон Ньютона, свяжем СО с Землей.



2. **Запиши 2 закон Ньютона в векторном виде.** Замени его на **систему аналогичных уравнений**, записанных для проекций входящих в него векторов на выбранные координатные оси (сколько осей, столько и уравнений в системе).

   Груз на нити вместе с вагоном движется равноускоренно относительно выбранной СО с ускорением $\vec{a}$. 2 закон Ньютона:

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

В проекциях:

$$\begin{cases} T_x + mg_x = ma_x \\ T_y + mg_y = ma_y \end{cases}$$

3. **Проведи операцию проецирования**, то есть найди значения проекций векторов сил и ускорения на координатные оси. Подставь их в систему уравнений для проекций.

$$T_x = T\sin\alpha,\ mg_x = 0,\ ma_x = ma,$$
$$T_y = T\cos\alpha,\ mg_y = -mg,\ ma_y = 0$$

Где α — угол отклонения нити от вертикали.

Итого:

$$\begin{cases} T\sin\alpha = ma \\ T\cos\alpha = mg \end{cases}$$

4. При необходимости **дополни систему получившихся уравнений формулами связи** между отдельными силами и кинематическими уравнениями. (Алгоритм работы с кинематическими уравнениями представлен в разделе «Кинематика».)

При решении данной задачи в этом нет необходимости.

5. **Реши** получившуюся **систему уравнений** относительно неизвестных величин.

Поделив верхнее уравнение на нижнее, получаем:

$$tg\alpha = \frac{a}{g} = 1$$

Следовательно $\alpha = 45^0$, тогда из первого уравнения получаем:

$$T = \frac{ma}{\sin\alpha} = \frac{0{,}1 \cdot 9{,}8 \cdot 2}{\sqrt{2}} \approx 1{,}4\,\text{Н}$$

6. **Проведи действия с наименованиями**, проверь численное значение ответа на «здравый смысл»

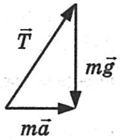
$$[T] = [m] \cdot [a] = \text{кг} \cdot \text{м/с}^2 = \text{Н}$$

Геометрический подход

1. **Идентифицируй характер движения.** Нарисуй **тело,** о котором идет речь в задаче, а также **векторы сил** и **кинематические векторы.** Запиши **2 закон Ньютона в векторном виде.** Определись, **относительно какой СО ты будешь рассматривать все вектора.** В дополнение к рисунку сделай **чертеж, отражающий действия с векторами,** входящими в формулу 2 закона Ньютона.

В дополнение к рисунку, представленному выше, сделаем чертеж, соответствующий математической записи 2 закона Ньютона относительно инерциальной СО, связанной с Землей:

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$$



2. Опираясь на рисунок и используя геометрические теоремы, **найди значения неизвестных величин** (сил)

По теореме Пифагора:

$$T = \sqrt{(ma)^2 + (mg)^2} =$$
$$= \sqrt{(0{,}1 \cdot 9{,}8)^2 + (0{,}1 \cdot 9{,}8)^2} =$$
$$= 0{,}1 \cdot 9{,}8 \cdot \sqrt{2} \approx 1{,}4\ \text{Н}$$

3. При необходимости **дополни** получившийся результат **формулами связи** между отдельными силами и (или) кинематическими уравнениями. (Алгоритм работы с кинематическими уравнениями представлен в разделе «Кинематика»)

В этой задаче такой необходимости нет.

4. **Проведи действия с наименованиями,** проверь численное значение ответа на «здравый смысл»

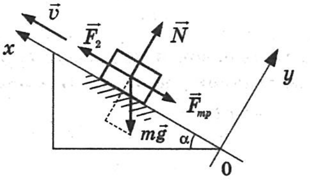
$$[T] = [m] \cdot [a] = \text{кг} \cdot \text{м/с}^2 = \text{Н}$$

Как видишь, решение любой динамической задачи начинается с рисунка. Он для решения задачи является «фундаментом». Вот несколько советов, которые помогут тебе не допустить ошибки на этом самом важном этапе решения.

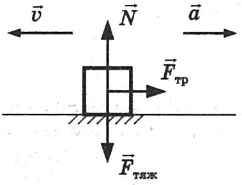
› **Законы Ньютона справедливы только относительно инерциальных СО!**

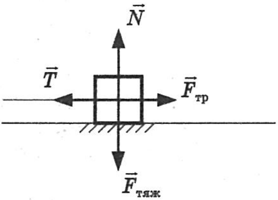
Инерциальной считаем СО, связанную с поверхностью Земли, а также любую СО, движущуюся относительно поверхности Земли равномерно прямолинейно. Направление координатных осей удобно выбирать так, чтобы большинство векторов были бы по отношению к ним либо параллельны, либо перпендикулярны. В этом случае найти значения проекций проще. Для описания прямолинейного движения, как правило, одну из осей делают сонаправленной с вектором скорости.

Например, при движении тела вверх по наклонной плоскости:



› **Если вектора силы непосредственно связаны с телом, то вектора скорости и ускорения полезно рисовать отдельно от тела** **(например, сверху) и друг от друга, чтобы случайно не «сложить» силу с ускорением или ускорение со скоростью.**

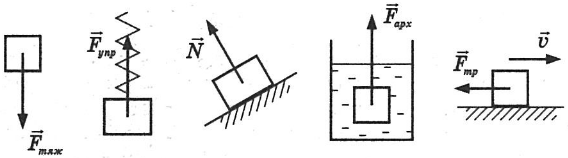




› Если сомневаешься в том, что ты нарисовал все действующие на тело силы, проверь себя с помощью простого вопроса: «А сколько тел и как действуют на данное?». Сколько «действий», столько и сил. Например, на изображенный на рисунке брусок действуют Земля, нить и опора. Причем, опора, с одной стороны, деформируется под тяжестью бруска и соответственно реагирует, с другой стороны, препятствует его перемещению вдоль поверхности. Четыре действия — четыре силы.

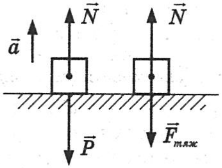
› **Рисуя силы, полезно иметь в виду**, что:

- Сила тяжести направлена всегда к центру тяжести Земли, т.е. на рисунке вертикально вниз.
- Сила упругости направлена против смещения частей тела при деформации, возникает в деформируемом теле, но приложена к тому объекту, действием которого вызвана деформация (в частности, сила реакции опоры возникает в опоре, приложена к действующему на опору телу и направлена всегда перпендикулярно опоре).
- Сила Архимеда направлена вертикально вверх.
- Сила трения скольжения всегда направлена против движения, а сила трения покоя — против возможного движения.



› Рассчитывая вес, не стоит затруднять себя запоминанием формул типа $P = m(g \pm a)$. Проще запомнить, что по третьему закону Ньютона: $\vec{P} = -\vec{F}_{упр}$
Имеется в виду, сила упругости, возникающая в опоре (подвесе) и действующая на тело. А силу, действующую на тело, всегда можно рассчитать по второму закону Ньютона, рассмотрев характер движения тела и другие силы, на него действующие.

Например, рассмотрим движение тела с ускорением, направленным вверх.



По 3 закону Ньютона:

$$\vec{P} = -\vec{N}$$

Из второго закона Ньютона в СО, связанной с Землей:

$$\vec{N} + \vec{F}_{тяж} = m\vec{a}$$

Отсюда:

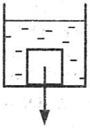
$$\vec{P} = \vec{F}_{тяж} - m\vec{a}$$

› Рассматривая силы, действующие на тело, погруженное в жидкость, полезно помнить, что **выталкивающая сила возникает, во-первых, не всегда, во-вторых, не всегда может быть рассчитана по формуле:**

$$F = \rho_ж g V_т$$

Чтобы разобраться в этом вопросе, полезно вспомнить, что выталкивающая сила возникает вследствие разности гидростатических давлений на поверхность погруженного в жидкость тела на разных глубинах: чем глубже погружено тело, тем гидростатическое давление больше.

Пример 1: тело лежит на дне, плотно прилегая к нему.



В этом случае гидростатического давления жидкости снизу просто нет. Силы давления на боковые грани уравновешивают друг друга. Тогда результирующая сила, действующая на тело со стороны жидкости, равна силе гидростатического давления сверху:

$$F = \rho_ж ghS$$

Пример 2: часть поверхности тела плотно соприкасается с дном.

Тогда выталкивающая сила будет равна

$$F = \rho_ж gV_т - F_д S$$

где $F_д$ — сила гидростатического давления жидкости на уровне дна сосуда, S — площадь соприкосновения тела с дном.

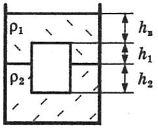
› О причине возникновения выталкивающей силы уместно вспомнить и при решении задач такого сорта: Тело плавает на границе двух несмешивающихся жидкостей. При этом часть тела находится в верхней жидкости, а часть — в нижней. Чему же равна сила Архимеда? Правильно:

$$F_а = \rho_1 gV_1 + \rho_2 gV_2$$

где, ρ_1 — плотность первой жидкости, V_1 — часть объема тела, погруженная в первую жидкость, ρ_2 — плотность второй жидкости, V_2 — часть объема тела, погруженная во вторую жидкость. А почему это так?

Рассмотрим силу давления на верхнюю грань:

$$F_1 = p_a S + \rho_1 g h S$$



Сила давления на нижнюю грань:

$$F_2 = p_a S + \rho_1 g\left(h + h_1\right)S + \rho_2 g h_2 S$$

Тогда:

$$F_a = F_2 - F_1 = \rho_1 g V_1 + \rho_2 g V_2$$

› **Жесткость системы упругих тел**, например, пружин, рассчитывается на основании закона Гука. Ты легко получишь результат, если разберешься, **какие из величин**, входящих в закон Гука, при соединении упругих тел в систему **оказываются одинаковыми**, а **какие разными для соединяемых объектов.**

Так, при последовательном соединении пружин при приложении ко всей системе расстягивающей силы F в каждой из пружин возникнет сила упругости, равная по модулю растягивающей силе. Но удлинения будут разными и при соединении пружин в систему сложатся. При параллельном соединении наоборот, удлинения будут одинаковы, а вот силы упругости разные. При этом силы упругости по модулю в сумме равны растягивающей силе.

1. Последовательное соединение пружин:

$$\Delta\ell_1 = \frac{F}{k_1};\quad \Delta\ell_2 = \frac{F}{k_2}$$

При этом общее удлинение:

$$\Delta\ell = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 = \frac{F}{k}$$

Отсюда жесткость системы получается:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

2. Параллельное соединение пружин:

$$F = F_1 + F_2 = k_1\Delta\ell_1 + k_2\Delta\ell_2 = k\Delta\ell$$

Так как

$$\Delta\ell_1 = \Delta\ell_2 = \Delta\ell$$

получаем для жесткости системы:

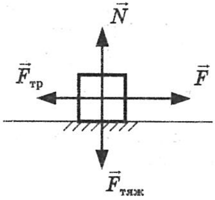
$$k = k_1 + k_2$$

› Особо **обрати внимание на силу трения покоя!** В отличие от силы трения скольжения, сила трения покоя саморегулирующаяся: в зависимости от внешнего воздействия меняется от 0 до максимального значения, подчиняющегося закону $F_{тр} = \mu N$.
Поэтому, если тело находится в покое, **сила трения часто рассчитывается через другие силы с помощью 2 закона Ньютона.**

Например, рассмотрим задачу:

На тело массой 3 кг, покоящееся на шероховатой горизонтальной поверхности действует горизонтальная сила 4 Н. Чему равна сила трения покоя, если коэффициент трения $\mu = 0{,}2$.

Типичная ошибка: используется формула для максимальной силы трения покоя $F_{тр} = \mu mg = 6\,Н$.



На самом деле в случае покоящегося тела сила трения определяется через другие силы. В данном случае,

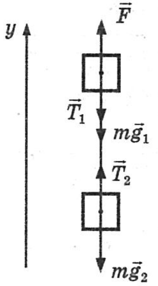
$$F_{тр} = F = 4\,Н$$

› **При рассмотрении движения системы тел при наличии между ними каких-либо связей** (нитей, пружин), как правило, представленные выше алгоритмы применяются поочередно для описания движения каждого из тел, входящих в систему. Однако, если **вопрос задачи касается расчета величин, характеризующих движение системы тел как единого целого, связи между частями системы часто можно не рассматривать.**

Например, рассмотрим задачу:

Два груза массами 0,2 кг и 0,1 кг, связанных невесомой нерастяжимой нитью, поднимают вертикально вверх равноускоренно, приложив к более тяжелому телу силу 6 Н. Определите ускорение каждого из грузов.

Свяжем СО с Землей, при этом для описания движения достаточно одной координатной оси. Сделаем рисунок.



Невесомость нити позволяет нам не рассматривать ее как отдельное тело, к тому же:

$$T_2 = T_1$$

Нерастяжимость нити указывает на то, что все тела системы двигаются с одинаковым ускорением относительно Земли.

По стандартному алгоритму:

2 закон Ньютона для 1 тела:

$$\vec{F} + m_1\vec{g} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}$$

С учетом значений проекций векторов на ось OY:

$$F - m_1 g - T_1 = m_1 a$$

Для 2 тела:

$$\vec{T}_2 + m_2\vec{g} = m_2\vec{a}$$

$$T_2 - m_2 g = m_2 a$$

Поскольку тела связаны, эти уравнения объединяются в систему и решаются совместно:

$$\begin{cases} F - m_1 g - T_1 = m_1 a \\ T_2 - m_2 g = m_2 a \end{cases}$$

Складывая второе уравнение с первым, и учитывая, что $T_2 = T_1$, получаем в итоге:

$$a = \frac{F - (m_1 + m_2)g}{m_1 + m_2} = 10\,\text{Н}$$

Учтем, что ускорение в данном случае одинаково для всех тел системы, т. е. ее можно рассматривать как единое целое:

Считаем, что движется вверх одно тело с массой $M = m_1 + m_2$

Тогда 2 закон Ньютона: $\vec{F} + M\vec{g} = M\vec{a}$

Соответственно, в проекциях: $F - Mg = Ma$

Отсюда:

$$a = \frac{F - Ma}{Mg} = \frac{F - (m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} = 10\,\text{Н}$$