Камчатский государственный технический университет

А. Исаков

Физика

Решение задач ЕГЭ
Часть 4

Физические основы механики

Петропавловск-Камчатский
2012

УДК 50(075.8)
ББК 20я73
И85

Рецензент
доктор физико-математических наук,
профессор Дальневосточного Федерального университета
Стоценко Л.Г.

Исаков Александр Яковлевич

И85 Физика. Решение задач ЕГЭ. Часть 4. Физические основы механики: КамчатГТУ, 2012. – 228 с.

Приведены решения задач из прошлого времени. Ряд задач не относятся к, так называемому «базовому уровню». Это задачи, для решения которых не вполне достаточно знания математических интерпретаций, они требуют более углублённого проникновения в суть физических законов.

Условия задач, строго говоря, не являются новыми, они заимствованы из известных задачников, изданных в разное время под редакцией Н.Е. Савченко, С.М. Козела, Г.Ф. Меледина, А.А. Пинского, Трубецковой и других известных авторов. Задачи снабжены подробными решениями с анализом применяемых законов и определений.

Сборник предназначен, прежде всего, для школьников старших классов, намеревающихся овладеть методиками решения задач части «С» в рамках современного ЕГЭ. Приведенные материалы могут быть так же полезными студентам первых курсов, изучающих общую физику в университетском объёме по техническим программам подготовки, особенно студентам заочной формы образования, когда программа осваивается самостоятельно.

Оглавление

Универсальные физические постоянные

Атомная единица массы	1 а.е.м. = $1{,}66\ 10^{-27}$ кг = 931,5 Мэв; 1 МэВ = $1{,}6022\ 10^{-19}$ Дж
Абсолютный ноль температур	- 273,15 ^{0}C
Гравитационная постоянная	$G = 6{,}672\ 10^{-11}$ Н м^2 / кг^2
Заряд электрона	$e = 1{,}602\ 10^{-19}$ Кл
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 1{,}257\ 10^{-6}$ Гн/м
Максимальная (при t = 4^0 С и $P_0 = 1\ 10^5$ Па) плотность воды	$\rho = 999{,}973$ кг/м^3
Масса покоя нейтрона	$m_n = 1{,}675\ 10^{-27}$ кг = 1,0086 а.е.м.
Масса покоя протона	$m_p = 1{,}67\ 10^{-27}$ кг = 1,0073 а.е.м.
Масса покоя электрона	$m_e = 9{,}11\ 10^{-31}$ кг = $5{,}486\ 10^{-4}$ а.е.м.
Молярная (универсальная) газовая постоянная	R=8,314 Дж/(моль· К); $R=k \cdot N_A$.
Нормальные условия	P_0 = 760 мм рт. ст = 101325 Па; T_0 = 273,15 К = 0 ^{0} С
Плотность сухого воздуха при нормальных условиях	$\rho = 1{,}293$ кг/ м^3
Постоянная Авогадро	$N_A = 6{,}022\ 10^{23}$ моль$^{-1}$
Постоянная Больцмана	$k_B = 1{,}3807\ 10^{-23}$ Дж / К
Постоянная Планка	$h=6{,}626\ 10^{-34}$ Дж с; $\hbar$ =1,055 Дж с.
Постоянная Фарадея	$F = 9{,}648\ 10^4$ Кл моль
Скорость звука в воздухе при нормальных условиях	С = 340 м/с
Скорость света в вакууме	$C = 2{,}9979\ 10^8$ м\с
Удельный заряд электрона	$e/m_e \cong 1{,}759 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
Ускорение свободного падения	$g = 9{,}80665$ м/с^2
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8{,}854\ 10^{-12}$ Ф/м
Энергия покоя нейтрона	$\varepsilon_{n0} = 1{,}505\ 10^{-10}$ Дж; ε_{n0} = 939,55 МэВ.
Энергия покоя протона	$\varepsilon_{p0} = 1{,}503\ 10^{-10}$ Дж; ε_{p0} = 938,26 МэВ.
Энергия покоя электрона	$\varepsilon_{e0} = 8{,}186\ 10^{-14}$ Дж; ε_{e0} = 0, 511 МэВ

1. Кинематика

1. На рисунке (верхний фрагмент) приведена «смазанная фотография» летящего реактивного самолета. Длина самолета L =30 м, длина его носовой части a = 10 м. Длина носовой части на фотографии b = 1 см. Определите по этой «фотографии» скорость самолета, если время выдержки затвора фотоаппарата T = 0,1 с. Предполагаемая форма самолета изображена на нижнем фрагменте рисунка.

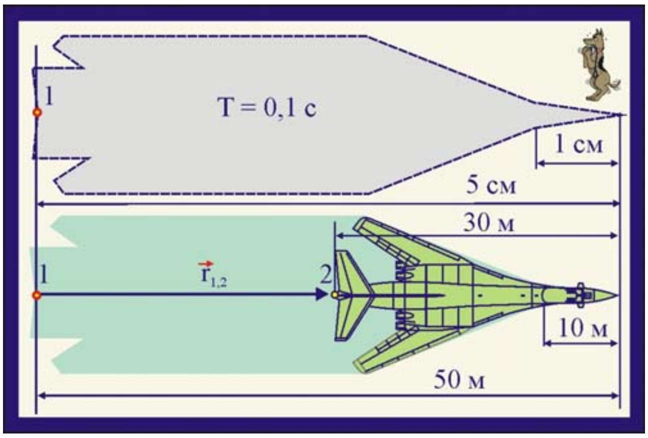


Рис. 1.1.1. Фотография самолёта

Решение

1. Заданные величины a и b дают возможность определить соотношение размеров на фотографии и на натуре. Протяженность в 10 м соответствует 1 см на фотографии.

2. Чтобы найти скорость самолёта необходимо определить вектор его перемещения $\vec{r}_{1,2}$ за время T, в течение которого открыт затвор фотоаппарата. Выделим на фотографии начальную точку 1 и определим, на какое расстояние она переместится за время T, т.е. из общей длины фотографии необходимо вычесть длину самолёта. С учётом масштаба модуль перемещения представится как

$$\left|\vec{r}_{1,2}\right| = 50 - 30 = 20\,\text{м}.$$

3. Скорость самолёта определится отношением модуля вектора перемещения к величине T

$$|\vec{v}| = \frac{\left|\vec{r}_{1,2}\right|}{T} = \frac{20}{0{,}1} = 200\,\frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 720\,\frac{\text{км}}{\text{час}}.$$

---

2. Радиолокатор определяет координаты летящего самолета, измеряя угол между направлением на Северный полюс и направлением на самолет и расстояние от радиолокатора до самолета. В некоторый момент времени положение самолета определялось координатами: угол α_1 = 44°, расстояние R_1 = 100 км. Через промежуток времени τ = 5 с после этого момента координаты самолета на радиолокаторе: угол α_2 = 46°, расстояние R_2 = 100 км. Определите модуль и направление его скорости.

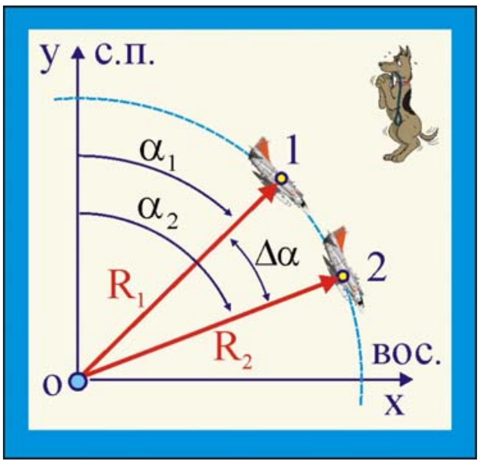


Рис. 1.1.2. Координаты самолёта

Решение

1. Поскольку $R_1 = R_2$, самолёт относительно заданной системы отсчёта движется по круговой траектории относительно оси z (ось z проходит через точку *o* перпендикулярно плоскости рисунка) на удалении R = 100 км.

2. Определим угловое перемещение самолёта за время τ = 5 с

$$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = 2^0 \cong 3{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ рад}.$$

3. Угловая скорость самолёта определится в виде отношения углового перемещения к промежутку времени, за которое оно происходит

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\tau} = \frac{3{,}5 \cdot 10^{-2}}{5} \cong 7 \cdot 10^{-3} \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

4. Линейная скорость самолёта в соответствии с формулой Эйлера

$$v = \omega \cdot R = 7 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 0{,}7 \text{км/с} = 2520 \text{км/ч},$$

т.к. $\vec{v} \perp \vec{R}$, то самолёт летит на юго-восток, под углом 45^0 к оси OX.

---

3. Через открытое окно в комнату влетел шмель. Расстояние от шмеля до потолка менялось со скоростью 1 м/с. Расстояние до стены, противоположной окну, менялось со скоростью 2 м/с, до боковой стены – со скоростью 2 м/с. Через τ = 1 с полета шмель попал в угол между потолком и боковой стеной комнаты. Определите скорость полета жука и место в окне, через которое он влетел в комнату. Высота комнаты 2,5 м, ширина 4 м, длина 4 м.

Решение

1. По условию задачи заданы, по сути, проекции скорости, а именно:

$$v_z = 1 \text{м/с}, v_x = 2 \text{м/с}, v_y = 2 \text{м/с},$$

что позволяет определить модуль скорости шмеля:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = 3 \text{м/с}.$$

2. Координаты шмеля в конечном его положении, точка B на рис. 3:

$$x_1 = 4 \text{м},\ y_1 = 4 \text{м}, z_1 = 2{,}5 \text{м}.$$

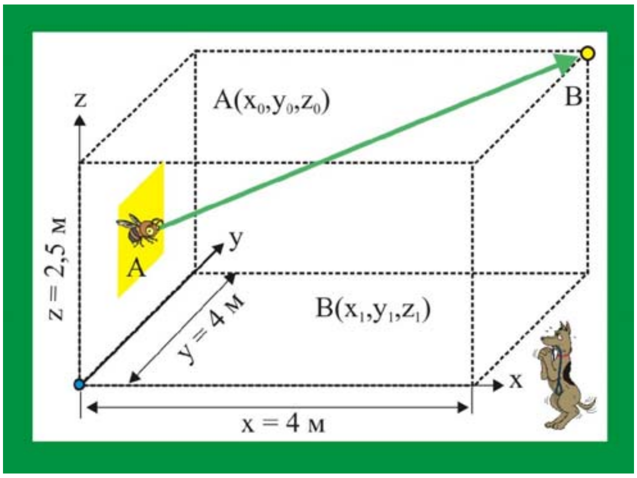


Рис. 3. Полёт шмеля

3. Координаты начального положения жука при пролёте им плоскости окна определятся как

$$x_0 = x_1 - v_x\tau = 4 - 2 \cdot 1 = 2 \text{м},$$

$$y_0 = y_1 - v_y\tau = 4 - 2 \cdot 1 = 2 \text{м},$$

$$z_0 = z_1 - v_z\tau = 2{,}5 - 1 = 1{,}5 \text{м}$$

---

4. Счетчики A и *B,* регистрирующие момент прихода γ -кванта, расположены на расстоянии L = 2 м друг от друга. В некоторой точке между ними произошел распад π^0- мезона на два γ - кванта. Найдите положение этой точки, если счетчик A зарегистрировал γ - квант на $\Delta t = 10^{-9}$ с позднее, чем счетчик B. Скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

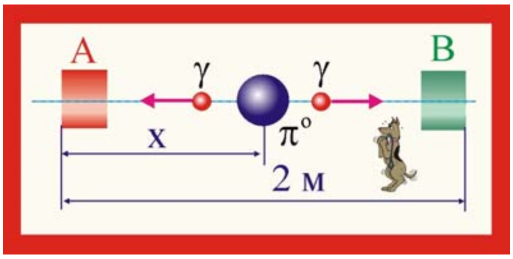


Рис. 4. Распад π^o - мезона

Решение

1. Введём следующие обозначения

$$x_B = L - x; \quad t_A = t_B + \Delta t .$$

2. Время полёта γ - кванта до счётчиков

$$t_B + \Delta t = \frac{x}{c}; \quad t_B = \frac{L - x}{c} .$$

3. Решая уравнения совместно, получим

$$\frac{L - x}{c} + \Delta t = \frac{x}{c} \Rightarrow x = \frac{L + c\Delta t}{2} = 1{,}15\text{м} .$$

---

5. Спортсмены бегут колонной длины L со скоростью v. Навстречу бежит тренер со скоростью $u < v$. Каждый спортсмен, поравнявшись с тренером, разворачивается и начинает бежать назад с той же по модулю скоростью v . Какова будет длина колонны, когда все спортсмены все развернутся?

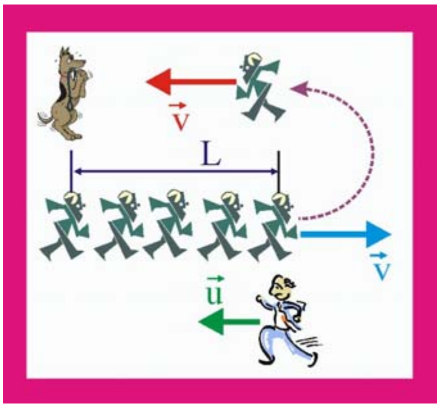


Рис.5. Колонна физкультурников

Решение

1 Скорость относительного движения колонны и тренера

$$v_1 = v + u;$$

2 Время, в течение которого колонна перестраивается

$$\Delta t = \frac{L}{v + u} .$$

3 Скорость разворота (перестройки) колонны

$$v_2 = v - u .$$

4 Длина, колонны бегущей в сторону тренера

$$L^* = v_2 \cdot \Delta t = L\frac{v - u}{v + u} .$$

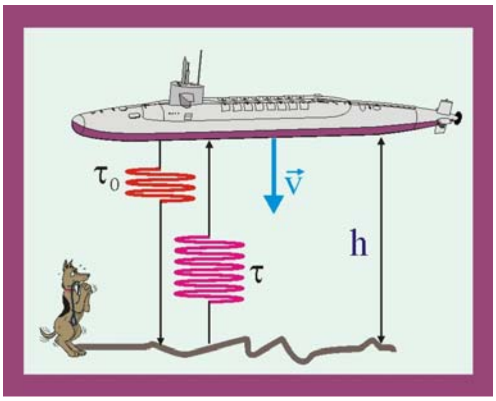


Рис. 6. Работа эхолота

6. С подводной лодки, погружающейся вертикально и равномерно, испускаются звуковые импульсы длительности τ_0. Длительность приема отраженного от дна импульса τ. Скорость звука в воде c. С какой скоростью v погружается подводная лодка?

Решение

1. Скорость движения импульса от лодки к дну:

$$c + v = h/\tau_0 .$$

2. Скорость движения отражённого от дна импульса:

$$c - v = h/\tau .$$

3. Поделим уравнения друг на друга:

$$\frac{c+v}{c-v} = \frac{\tau}{\tau_0},$$

откуда следует, что:

$$v = c \cdot \frac{\tau - \tau_0}{\tau + \tau_0}.$$

---

7. Лента транспортера имеет скорость *w*. Над лентой движется автомат, выбрасывающий ν шариков в единицу времени. Шарики прилипают к ленте. Счетчик шариков с фотоэлементом считает только шарики, прошедшие непосредственно под ним. Сколько шариков сосчитает счетчик за единицу времени, если скорость автомата $v < w$, скорость счетчика $u < w$?

Решение

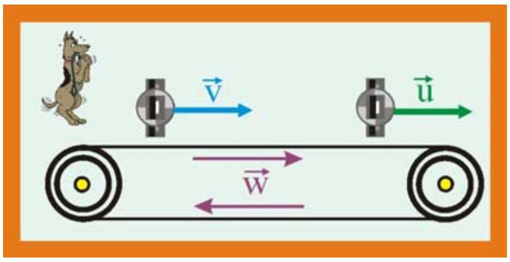


Рис. 7. Счётчик шариков

1. Если автомат и счётчик покоятся, т.е. $v = u = 0$, то счётчик за время Δt зарегистрирует N_0 шариков

$$N_0 = \nu \frac{w}{w} \cdot \Delta t.$$

2. Если автомат покоится ($v = 0$), а счётчик движется со скоростью u, то число регистрируемых частиц составит

$$N_1 = \nu \frac{w-u}{w} \cdot \Delta t.$$

3. При движении автомата и счётчика число частиц за время Δt определится как

$$N_2 = \nu \frac{w-u}{w-v} \cdot \Delta t,$$

в единицу времени

$$n = \nu \frac{w-u}{w-v}.$$

---

8. Из взрывчатого вещества изготовлен стержень длины L. Скорость детонации (скорость вовлечения во взрыв новых участков взрывчатого вещества) равна v, а скорость разлета продуктов взрыва $u < v$. Как изменяется со временем область, занятая продуктами взрыва, если стержень подрывается с одного из концов? Сделайте рисунок.

Решение

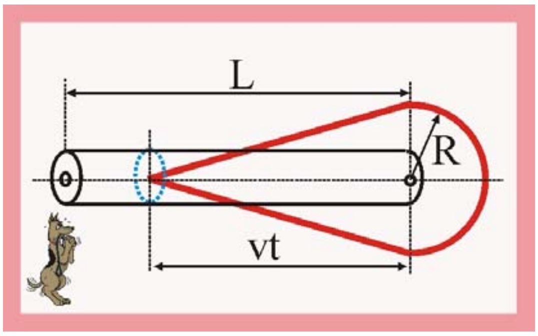


Рис. 8. Стержневой заряд ВВ

1. Конфигурация области, занятой продуктами взрыва до момента полного окисления стержня, при $\tau < L/v$ будет иметь вид конуса высотой $h = v \cdot t$, основанием которого служит полусфера радиуса $R = u \cdot t$.

2. После того, как окисление стержня закончится, т.е. для времени $\tau \geq L/v$ область продуктов будет ограничена двумя полусферами с радусами $R = ut;\quad r = u\left(t - \frac{L}{v}\right);$

и конусной образующей.

9. Из взрывчатого вещества нужно изготовить такую тонкостенную коническую оболочку, чтобы при подрыве ее с вершины продукты ударили по плите. Какой угол между осью конуса и образующей нужно выбрать?

Решение

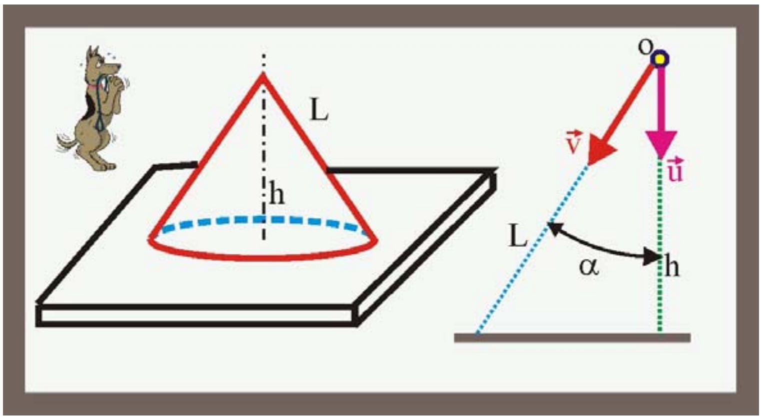


Рис. 9. Взрывчатое вещество в виде конуса над плитой

1. Если длина образующей конуса L, то его высота h определяется уравнением

$$h = L \cdot \cos\alpha,$$

откуда

$$L = \frac{h}{\cos\alpha}.$$

2. По условию задачи $t_1 = t_2$, т.е.

$$t_1 = \frac{h}{u} = \frac{L\cos\alpha}{u}; \qquad t_2 = \frac{L}{v},$$

откуда

$$\frac{L}{v} = \frac{L\cos\alpha}{u} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{u}{v} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos\frac{u}{v} \quad .$$

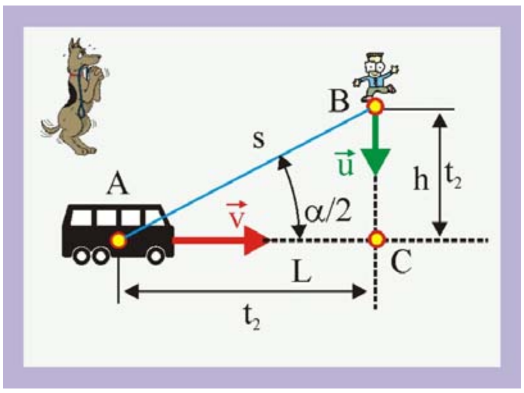


Рис. 10. Перехват автобуса

10. По прямому шоссе идет автобус с постоянной скоростью v. Вы заметили автобус, когда тот находился в некоторой точке A. Из какой области около шоссе вы можете догнать этот автобус, если скорость вашего бега u < v ? Нарисуйте эту область для u = v /2.

Решение

1. Пусть автобус находится в точке A, а догоняющий начинает движение из точки B и бежит перпендикулярно дорожному полотну AC. Введём обозначения: AC = L, BC = h, AB = s.

2. Из прямоугольного треугольника ABC имеем

$$L = s\cos\frac{\alpha}{2}; \qquad h = s \cdot \sin\frac{\alpha}{2},$$

3. Время движения автобуса t_1 и пассажира t_2 до встречи в точке C

$$t_1 = \frac{L}{v} = \frac{s\cos(\alpha/2)}{v}; \qquad t_2 = \frac{h}{u} = \frac{s\sin(\alpha/2)}{u},$$

откуда $\alpha = 2\mathrm{arctg}\frac{u}{v}$.

4. При $u = v/2$, $\alpha/2 = 26{,}5^0$.

---

11. Сверхзвуковой самолет летит горизонтально Два микрофона, находящихся на одной вертикали на расстоянии L друг от друга, зарегистрировали приход звука от самолета с запаздыванием времени Δt. Скорость звука в воздухе c. Какова скорость самолета?

Решение

1. Чем больше скорость самолёта превосходит скорость звука, тем величина AD меньше, т.е. $v \sim 1/AD$.

2. Если самолёт летит со звуковой скоростью v = c, то AD = AB = L, в этом случае треугольник ADB – равносторонний, или

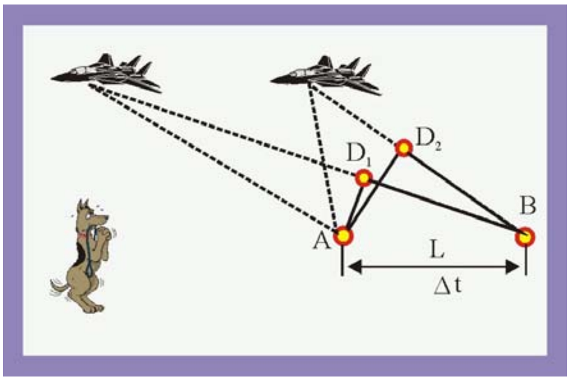


Рис. 11. Звуколокация

$$v = c \cdot \frac{AB}{AD} = c\frac{L}{AD}.$$

3. Определим элементы треугольника ADB

$$DB = c \cdot \Delta t, \qquad AD = \sqrt{L^2 - DB^2}.$$

4. Подставляя AD в уравнение v, получим:

$$v = \frac{cL}{\sqrt{L^2 - c^2\Delta t^2}}.$$

---

12. Два стержня пересекаются под углом 2α и движутся с равными скоростями v перпендикулярно самим себе. Какова скорость точки пересечения стержней?

Решение

1. Определим перемещение точки пересечения стержней

$$|\Delta\vec{r}| = \frac{|\vec{u}|\Delta t}{\sin 2\alpha},$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{v^2 + v^2 + 2v^2\cos(2\alpha)},$$

или

$$u = v\sqrt{2}\sqrt{1 + \cos 2\alpha}.$$

2. Из тригонометрии известно, что

$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha,$$

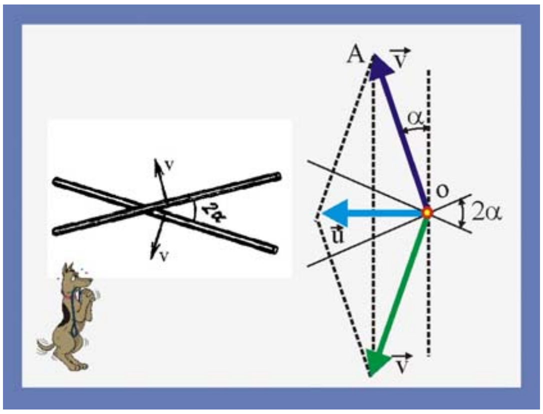


Рис. 12. Пересечение стержней

поэтому

$$u = v\sqrt{2}\sqrt{2\cos^2\alpha} = v2\cos\alpha.$$

3. Скорость точки пересечения стержней определится как:

$$v_0 = \frac{u\Delta t}{\Delta t \sin 2\alpha} = \frac{2v\cos\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2v\cos\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{v}{\sin\alpha}.$$

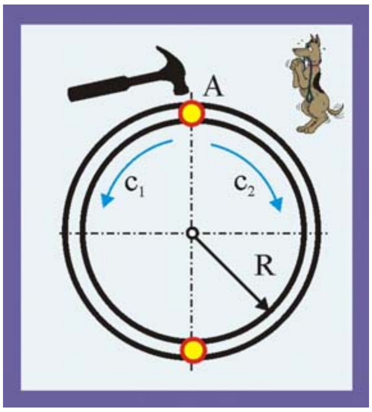


Рис. 13. Два полукольца

13. Кольцо сварено из двух полуколец радиусом R, скорости звука в которых c_1 и c_2. Через какое время встретятся звуковые волны, возбуждённые ударом по точке сварки A?

Решение

1. Длина полукольца: $L = \pi R/2$, поэтому

$$\tau = t_1 + t_2 = \frac{\pi R}{c_1} + \frac{\pi R}{c_2};$$

$$\tau = \frac{\pi R}{2}\left(\frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2}\right);$$

14. По графику зависимости координаты от времени постройте график зависимости скорости от времени.

Решение

1 Средняя скорость движения $\langle v \rangle = \Delta x/\Delta t$, поэтому

$$\Delta t_1 = 0{,}5с; \quad \Delta x_1 = 10м; \quad v_1 = 20м/с;$$
$$\Delta t_2 = 1{,}5с; \quad \Delta x_2 = -15м; \quad v_2 = -10м/с;$$
$$\Delta t_3 = 0{,}75с; \quad \Delta x_1 = 15м; \quad v_3 = 20м/с;$$

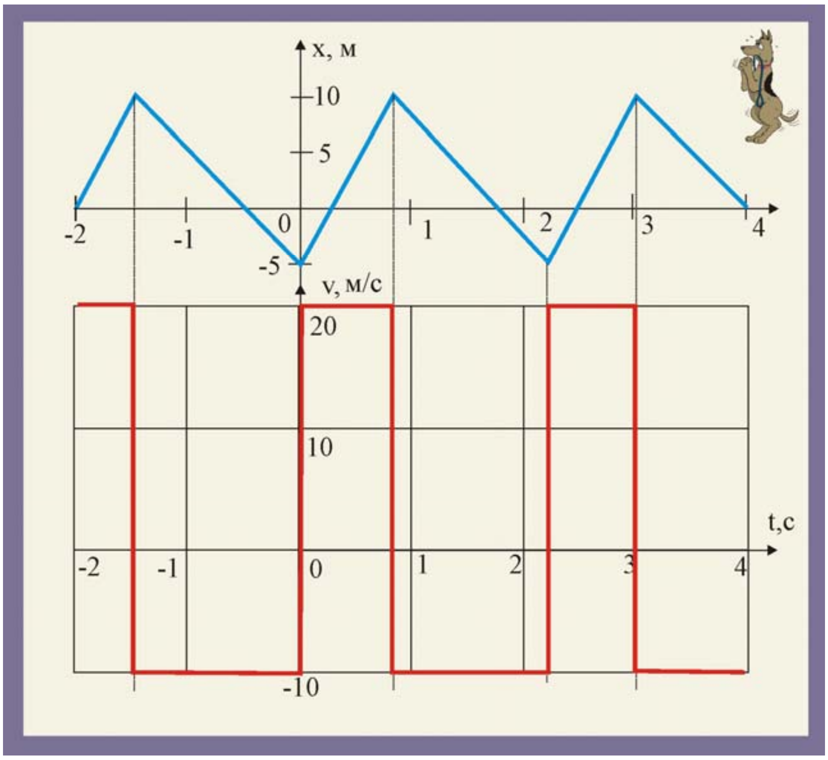


Рис. 14. Зависимость координат и скорости от времени

15. Найдите момент времени и место соударения частиц, движущихся по одной прямой. Скорость первой частицы v, скорость второй v /2. Первая час-

тица в момент времени t = 0 имела координату x = 0, вторая в момент времени t_1, координату x = a.

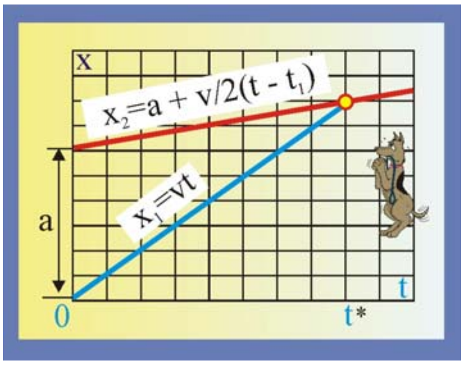


Рис. 15. Встреча двух частиц

Решение

1. Уравнения движения частиц

$$x_1 = vt, \quad x_2 = a + v/2(t - t_1).$$

2. В момент столкновения $x_1 = x_2$, что позволяет найти время столкновения

$$vt = a + \frac{v}{2}(t - t_1), \qquad t^* = \frac{2a}{v} - t_1;$$

3. Координата встречи частиц

$$x = vt = v\left(\frac{2a}{v} - t_1\right); \quad x = v\left(\frac{2a - vt_1}{v}\right) = 2a - t_1.$$

---

16. Две частицы в момент времени t_0 вышли из одной точки. По графикам зависимости скорости от времени определите координаты и время новой встречи частиц.

Решение

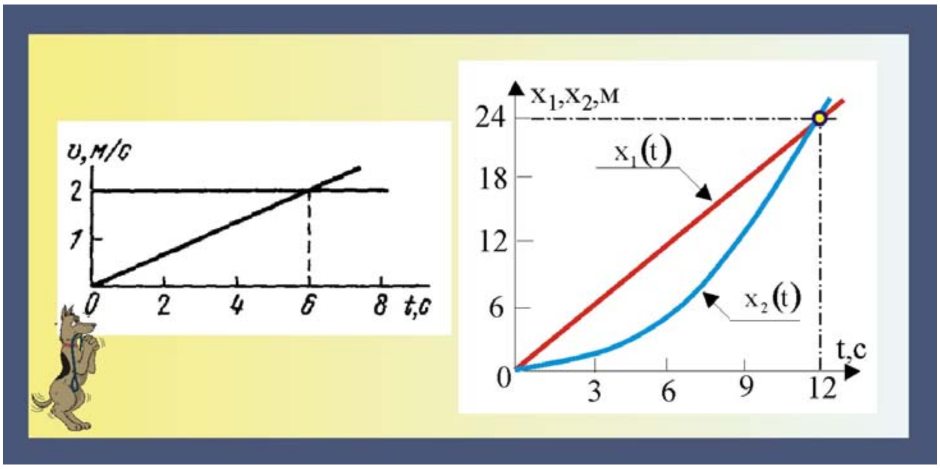


Рис.16. Движение и встреча двух частиц

1.Уравнения движения частиц:

$$x_1(t) = v_1 t, \qquad x_2(t) = \frac{at^2}{2},$$

2. Скорость первой частицы и ускорение второй частицы определяются по заданной зависимости $v = f(t)$

$$v_1 = 2\frac{м}{с}, \; a \cong 0{,}33\frac{м}{с^2}.$$

3. Условие встречи частиц

$$x_1(t_в) = x_2(t_в), \qquad t_в = \frac{2v_1}{a} = 12с, \qquad x_в = 24м.$$

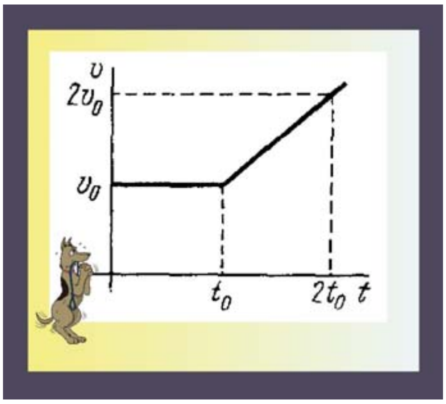


Рис. 17. Изменение скорости

17. Тело в течение времени t_0 движется с постоянной скоростью v_0. Затем скорость его линейно нарастает со временем так, что в момент времени $2t_0$ она равна $2v_0$. Определите путь, пройденный телом за время $t > t_0$.

Решение

1. Уравнение равнопеременного движения тела

$$x(t) = x_0 + at^2/2.$$

2. В данном случае

$$x_0 = v_0 t, \quad a = \frac{2v_0 - v_0}{2t_0 - t_0} = \frac{v_0}{t_0}.$$

3. Уравнение движения перепишется так:

$$x(t) = v_0 t + \frac{v_0 (t - t_0)^2}{2t_0}.$$

Рис. 18. Ускорение корабля

18. «Корабль шел на пределе, дальнейший разгон не предусматривался инструкциями космофлота. Через час скорость возросла на тысячу километров в секунду». (Кир Булычёв. Агент КФ// Химия и жизнь. – 1984. - №12, с.111). Определите ускорение корабля и сравните его с ускорением свободного падения на Земле.

Решение:

1. Определим ускорение корабля

$$< a > = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1000}{3600} \cong 0{,}278 \frac{км}{с^2} \cong 278 \frac{м}{с^2}.$$

2. Соотнесём ускорение космолёта с ускорением свободного падения на Земле

$$\frac{< a >}{g} \approx 27{,}8;.$$

---

19. Автобус движется в течение 20 с по прямой до остановки, проходя при этом расстояние 310 м. Его начальная скорость 15 м/с. Докажите, что ускорение автобуса меняется по направлению.

Решение

1. Определим среднюю скорость движения автобуса

$$< v > = \frac{x_1}{t_1} = 15{,}5 \frac{м}{с} > v_0.$$

2. Запишем уравнение для скорости ускоренного движения

$$v(t) = v_0 - at. \quad v(t_1) = 0 \Rightarrow a < 0.$$

---

20. Некая частица, покинув источник, пролетает с постоянной скоростью расстояние L, а затем тормозится с ускорением a. При какой скорости частицы время движения от вылета до остановки частицы будет наименьшим?

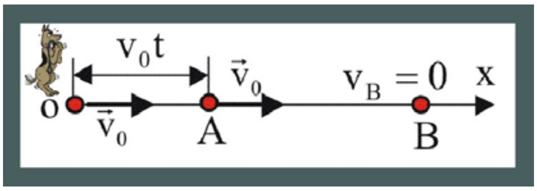


Рис. 20. Остановка частицы

Решение

1. Уравнение движения на участке OA

$$L = v_0 t \;\Rightarrow\; v_0 = L/t .$$

2. Зависимость скорости от ремени на участке AB:

$$v(t) = v_0 - at, \quad v_B(t=0) \quad\Rightarrow\quad v_0 = at .$$

3. Приравнивая уравнения, получим:

$$\frac{L}{t} = at, \quad L = at^2 \Rightarrow t_{min} = \sqrt{L/a}\,, \quad v_0 = a\sqrt{L/a} = \sqrt{La}\,.$$

---

21. Из полусферического аквариума радиуса R, наполненного водой с единицы поверхности воды в единицу времени испаряется объём жидкости q. Через какое время вся вода испарится?

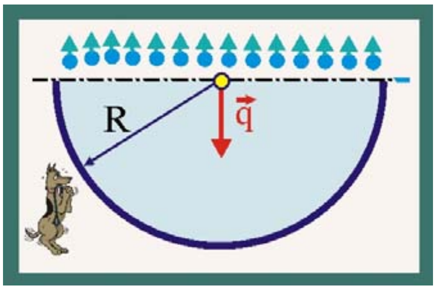


Рис. 21. Испарение воды

Решение

1. Определим размерность величины q

$$[q] = \frac{м^3}{м^2 \cdot с} = \frac{м}{с},$$

другими словами, заданная величина q представляет собой скорость опускания поверхности жидкости, поэтому поверхность опустится на расстояние R за время

$$t = R/q .$$

---

22. Движения двух материальных точек заданы уравнениями:

$$x_1 = A_1 + B_1 t + C_1 t^2, \qquad x_2 = A_2 + B_2 t + C_2 t^2,$$

где $A_1 = 20$м, $A_2 = 2$м, $B_2 = B_1 = 2$м/с, $C_1 = -4$м/с, $C_2 = 0{,}5$ м/с. В какой момент времени t скорости этих точек будут одинаковы? Определите величины скоростей и ускорений в этот момент.

Решение

1. Определим уравнение скоростей точек путём дифференцирования заданных уравнений по времени

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = B_1 + 2C_1 t = 2 - 8t, \quad v_2 = \frac{dx_2}{dt} = B_2 + 2C_2 t = 2 + t .$$

2. Равенство скоростей будет иметь место при

$$2 - 8t = 2 + t \quad\Rightarrow\quad t = 0 .$$

3. Найдём величины скоростей и ускорений, соответствующие моменту времени t = 0

$$v_1 = v_2 = 2\frac{м}{с}, \quad a_1 = \frac{dv_1}{dt} = 2C_1 = -8\frac{м}{с^2}, \quad a_2 = \frac{dv_2}{dt} = 2C_2 = 1\frac{м}{с^2} .$$

---

23. Две частицы движутся прямолинейно в соответствии с уравнениями:

$$x_1 = A_1 t + B_1 t^2 + C_1 t^3, \quad x_2 = A_2 t + B_2 t^2 + C_2 t^3,$$

где A_1 = 4 м/с, A_2 = 2 м/с, B_1 = 8 м/с^2, B_2 = -4 м/с^2, C_1 = -16 м/с^3, C_2 = 1 м/с^3. В какой момент времени ускорения этих точек будут одинаковы? Определите скорости точек в этот момент.

Решение

1. Дифференцируя по времени дважды заданные уравнения, определим ускорения точек:

$$v_1 = A_1 + 2B_1 t + 3C_1 t^2, \quad v_2 = A_1 + 2B_2 t + 3C_2 t^2.$$

$$a_1 = 2B_1 + 6C_1 t = 16 - 96t, \quad a_2 = 2B_2 + 6C_2 t = -8 + 6t.$$

2. Приравняем уравнения ускорений и разрешим полученное соотношение относительно времени:

$$16 - 96t = -8 + 6t, \quad \Rightarrow \quad t = 0{,}235c.$$

3. Подставим далее значение времени и получим величины соответствующих скоростей:

$$v_1 = 5{,}1 м/с, \quad v_2 = 0{,}286 м/с.$$

---

24. Прожектор вращается вокруг собственной оси, делая один оборот за 20 с. Прожектор установлен на расстоянии 100 м от стены и бросает на неё светлое пятно. Определите: а) уравнение движения светлого пятна по стене в течение первой четверти оборота; б) скорость, с которой светлое пятно перемещается по стене, в момент времени 2с. За начало отсчёта принять положение, при котором световой луч перпендикулярен стене.

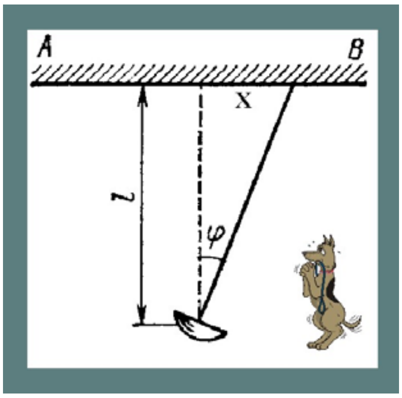


Рис. 24. Прожектор

Решение

1. Выразим перемещение светового пятна x как функцию угла поворота прожектора:

$$\mathrm{tg}\varphi = x/\ell. \qquad (1)$$

2. С другой стороны, угол поворота можно выразить через заданный по условию задачи период вращения

$$\omega = d\varphi/dt, \Rightarrow \varphi = \omega t = (2\pi/T)t. \qquad (2)$$

3. Разрешая (1) относительно перемещения x и подставляя значение φ из (2), получим уравнение движения светового пятна по стене AB

$$x = \ell \mathrm{tg}(2\pi t/T). \qquad (3)$$

4. Скорость пятна представится в виде производной перемещения по времени

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\ell\frac{2\pi t}{T}\frac{1}{\cos^2(2\pi t/T)}. \qquad (4)$$

5. Координаты пятна и его скорость при t_1 = 2c, в соответствии с уравнениями (3) и (4) равны:

$$x_1 = \ell \mathrm{tg}\frac{2\pi t_1}{T} \cong 100 \cdot \mathrm{tg}36^0 \cong 72{,}6 \text{ м},$$

$$v_{1x} = \frac{1}{2}\ell\frac{2\pi t_1}{T}\frac{1}{\cos^2(2\pi t_1/T)} \cong 48\frac{м}{c}.$$

---

25. Определите зависимость пути от времени, если ускорение пропорционально квадрату скорости и направлено в противоположную ей сторону.

Решение

1. Выразим величину ускорения через скорость

$$a = -kv^2; \quad \frac{dv}{dt} = -kv^2. \tag{1}$$

2. В дифференциальном уравнении (1) можно разделить переменные путём умножения его на dt

$$\frac{dv}{v^2} = -kt. \tag{2}$$

3. Поскольку движение замедленное, то скорость в течение момента времени от t_0 до t меняется от v_0 до v, то интегрирование целесообразно произвести в следующих пределах

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} = -k\int_0^t dt, \quad \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = kt, \quad \frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} \_ kt = \frac{1+kv_0t}{v_0},$$

$$v(t) = \frac{v_0}{1+kv_0t}. \tag{3}$$

4. Выразим далее скорость тела через изменение его координаты

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{1+kv_0t}, \quad dx = \frac{v_0t}{1+kv_0t}. \tag{4}$$

5. Проинтегрируем (4) в пределах изменения переменных от x_0 до x и от 0 до t

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t \frac{v_0dt}{1+kv_0t}, \quad x - x_0 = \frac{1}{k}\ln(kv_0t+1). \tag{5}$$

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{k}\ln(kv_0t+1). \tag{6}$$

---

26. Скорость течения реки изменяется по её ширине в соответствии с уравнением

$$v(x) = -4x^2 + 4x + 0{,}5, \text{ где } x = a/b,$$

где a – расстояние от берега, b = 420 м – ширина реки. На какое расстояние лодку снесёт течением при переправе, если её скорость относительно воды равна 2 м/с и направлена перпендикулярно противоположному берегу?

Решение

1. Течение реки увеличивает расстояние, проходимое лодкой от одного берега к другому. Если бы скорость реки была постоянной, то величина r определялась бы просто, достаточно было бы определить геометрически суммарную скорость лодки и реки и найти путь лодки. В данном случае скорость реки зависит сложным образом от координаты лодки относительно отправного берега, по-

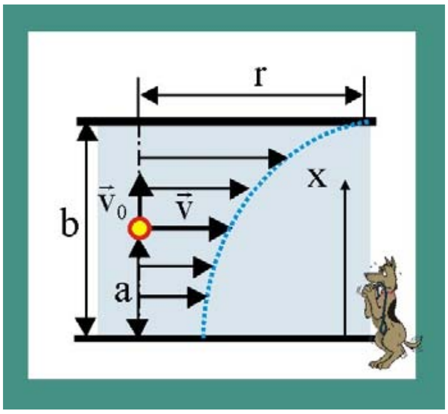


Рис. 26. Переправа

этому снос лодки определится как

$$r = \int_0^{\tau} v dt = v\tau , \qquad (1)$$

где $\tau = b/v_0$ - время переправы лодки между берегами без учёта течения реки.

2. Так как скорость является функцией отношения (a/b), которое меняется в пределах от 0 до 1, то уравнение (1) необходимо ещё раз проинтегрировать

$$r = \int_0^1 v \cdot \frac{b}{v_0} dx = \frac{b}{v_0}\int_0^1 (-4x^2 + 4x + 0{,}5) dx , \qquad (2)$$

$$r = \frac{b}{v_0}\left(-\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + 0{,}5x\right)\Bigg|_0^1 \cong 245\text{м} \qquad (3)$$

---

27. На листе бумаги начерчен прямой угол. Стержень, оставаясь перпендикулярным биссектрисе угла, движется со скоростью, изменяющейся по закону:

$$v_c(t) = 10 - 5t .$$

Концы стержня пересекают стороны начерченного угла. С какой скоростью движутся точки пересечения стержня и угла? Как будет двигаться стержень через три секунды после начала движения?

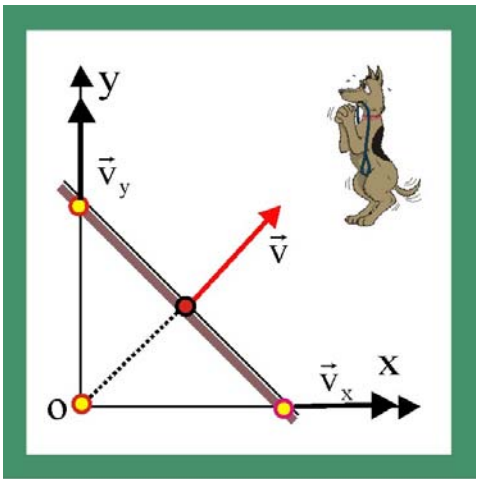


Рис. 27. Движение стержня

Решение

1. Судя по уравнению скорости, стержень движется с ускорением, т.е.

$$\vec{v}_c(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t , \qquad (1)$$

при этом v_0 = 10 м/с, a = – 5м/с^2.

2. Скорости точек пересечения будут двигаться с одинаковыми по модулю и перпендикулярными векторами скоростей ($v_x = v_y = v$), другими словами, вектор скорости центра стержня является диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\vec{v}_x$ и $\vec{v}_y$. Математически это обстоятельство представляется так:

$$|\vec{v}_c| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{2v^2} = v\sqrt{2} . \qquad (2)$$

3. Таким образом, точки пересечения стержня со сторонами угла движутся со скоростями

$$|\vec{v}_x| = |\vec{v}_y| = \frac{|\vec{v}_c|}{\sqrt{2}} = \frac{10 - 5t}{\sqrt{2}} . \qquad (3)$$

4. Через три секунды центр стержня будет двигаться в обратном направлении, т.к. при t = 2 с скорость стержня станет равной нулю, а затем поменяет своё направление.

---

28. С какой высоты H упало тело, если последний метр своего пути оно прошло за t_1 = 0,1с?

Решение

1. Определим начальную скорость тела на последнем метровом участке пути

$$h = v_B t_1 + \frac{g t_1^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v_B = \frac{1}{t_1}\left(h - \frac{g t_1^2}{2}\right). \qquad (1)$$

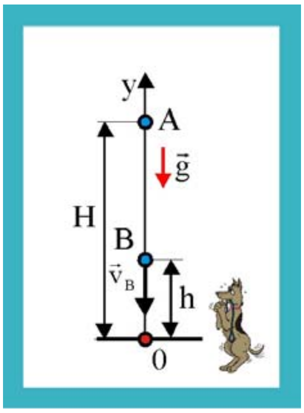


Рис. 28. Падение тела

2. Конечная скорость падения тела

$$v_0 = v_B + g t_1 = g t_2 , \qquad (2)$$

где t_2 – время падения с высоты H.

3. Время полёта тела t_2 определится из уравнения (2) при подстановке в него значения v_B из (1)

$$t_2 = \frac{1}{g}\left(v_B + g t_1\right) = \frac{h}{g t_1} + \frac{t_1}{2} \cong 1{,}05\text{с}. \qquad (3)$$

4. Искомая высота H, с учётом того, что в точке А скорость была нулевой, запишется так:

$$H = \frac{g t_2^2}{2} \cong 5{,}5\text{м}.$$

---

29. Пеликан охотится за рыбкой, падая свободно с высоты 25 м. Если у рыбки есть 0,15 с времени, то она может уклониться от прожорливой птицы. На какой высоте над поверхностью воды рыбка должна заметить пеликана, если она плавает у поверхности?

Решение

1. Определим время падения пеликана до поверхности воды (точка В)

$$y_1 = \frac{g t_1^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \cong 2{,}24\text{с}.$$

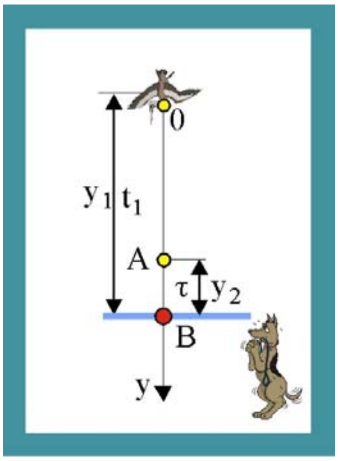


Рис. 29. Пеликан

2. Определим далее время полёта птицы до точки А, где её должна заметить рыбка

$$t_2 - \tau = 2{,}09\text{с}.$$

3. Найдём расстояние ОА, т.е. расстояние которое пролетит пеликан

$$y_3 = \frac{g t_2^2}{2} \cong 20{,}6\text{м}.$$

4. Искомая безопасная для рыбки высота определится в виде разности

$$y_2 = y_1 - y_3 = 4{,}4\text{м}.$$

---

30. Камень падает с высоты 1200 м. Какой путь пройдёт камень за последнюю секунду своего движения?

Решение

1. Представим время падения булыжника в виде суммы двух времён, полёт до того как осталась одна секунда и в течение последней секунды

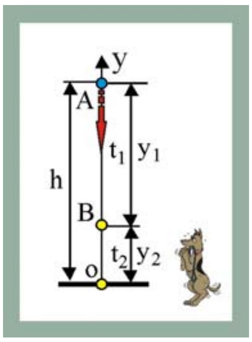


Рис. 30. Камень

$$h = \frac{g(t_1 + t_2)^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} - t_2 \cong 14{,}5с.$$

2. За время t_1 камень пролетит расстояние AB

$$y_1 = \frac{gt_1^2}{2} \cong 1050м.$$

3. За последнюю секунду камень пролетит расстояние BO

$$y_2 = h - y_1 = 150м.$$

---

31. Камень бросили вертикально вверх с начальной скоростью 20 м/с. По прошествии какого времени камень окажется на высоте 15 м. Чему равна скорость камня на этой высоте?

Решение

1. Камень, брошенный вертикально вверх без сопротивления, движется в соответствии с уравнением

$$y_1 = v_0 t_1 - \frac{gt_1^2}{2}, \qquad (1)$$

которое легко преобразовать в квадратное, относительно искомого времени

$$t_1^2 - \frac{2v_0}{g} t_1 + \frac{2y_1}{g} = 0. \qquad (2)$$

2. Уравнение (2) имеет два вещественных корня $t_1 = 1с$, и $t_1^* = 3с$. Это значит, что камень побывает за время всего полёта на высоте 15м два раза. Первый раз, путешествуя вверх, а второй раз – при спуске.

3. Определим скорость камня в момент прохождения им заданной высоты при полёте вверх

$$|\vec{v}_1| = v_0 - gt_1 = 10м/с. \qquad (3)$$

4. Скорость камня при движении вниз, определится из условия, что время его подъёма в верхнюю точку составляет две секунды, значит вниз до высоты 15 м падает в течение $t_3 = 1с$

$$|\vec{v}_1^*| = gt_3 = 10м/с. \qquad (4)$$

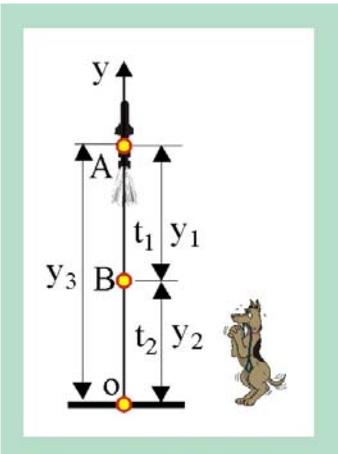


Рис. 32. Ракета

32. Ракета с поверхности Земли поднимается вертикально вверх с ускорением a = 10 м/с^2. Через время t_2 = 10с после старта от неё отделяется первая ступень. Через какое время t_3 эта ступень упадёт на землю? Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение

1. Высота подъёма ракеты до момента отделения третьей ступени

$$y_2 = \frac{gt_2^2}{2} \cong 500м. \qquad (1)$$

2. Начальная скорость отделившейся ступени равна скорости ракеты

$$v_0 = at_2 = 100м/с. \qquad (2)$$

3. Время до остановки, отделившейся ступени

$$t_0 = \frac{v_0}{g} = 10c. \quad (3)$$

4. Расстояние, пройденное ступенью до полной её остановки

$$y_3 = \frac{gt_0^2}{2} = 500м. \quad (4)$$

5. Время падения ступени

$$t_3 = \sqrt{\frac{2(y_1 + y_2)}{g}} \cong 14{,}1c. \quad (5)$$

---

33. Материальная точка скользит без трения по произвольной наклонной плоскости. Докажите, что после того как точка опустится на расстояние h, скорость её будет такой же, как и при свободном падении с той же высоты.

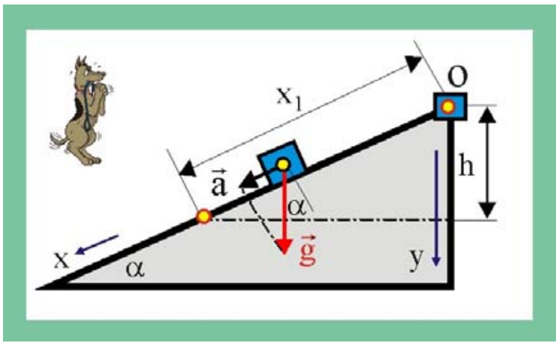


Рис. 33. Наклонная плоскость

Решение

1. Свободное падение тела вертикально вниз без сопротивления будет описываться уравнениями

$$h = \frac{gt^2}{2}, \quad v_y = gt. \quad (1)$$

Из первого уравнения определим время падения и подставим его значение во второе уравнение

$$t = \sqrt{2h/g} \quad \Rightarrow \quad v_y = \sqrt{2gh}. \quad (2)$$

2. При скольжении по наклонной плоскости с ускорением a = g·sinα уравнения для скорости и координаты примут вид

$$v_x = g\sin\alpha t_1, \quad x = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{at_1^2}{2}. \quad (3)$$

3. Выразим из уравнения координаты время движения t_1 и подставим его значение в уравнение скорости

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g\sin^2\alpha}} = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad v_x = \sqrt{2gh}, \quad (4)$$

что, собственно и требовалось доказать.

4. Полученный результат ($v_x = v_y$) можно распространить и на спуск тела по поверхности произвольной конфигурации.

---

34. Тормозящий автомобиль движется по прямой. Абсолютная величина ускорения зависит от его текущей скорости v по закону $a = a_0\sqrt{v/v_0}$, где a_0 = 10 м/с^2, v_0 = 90 км/час, значения соответствующих кинематических параметров при t = 0. За какое время это произойдёт?

Решение

1. Определим зависимость скорости тормозящего автомобиля от времени

$$\frac{dv}{dt} = -a = -a_0\sqrt{\frac{v}{v_0}}, \quad \Rightarrow \quad dv = -a_0\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{v_0}}t. \quad (1)$$

2. Поделим в уравнении (2) переменные и проинтегрируем

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{a_0}{\sqrt{v_0}} dt, \Rightarrow \quad 2\sqrt{v} = -\frac{a_0}{\sqrt{v_0}} t + 2\sqrt{v_0}. \qquad (2)$$

3. Определим из уравнения (2) скорость и подставим условие $t = 2v_0/a_0$

$$v(t) = v_0\left(1 - \frac{a_0 t}{2v_0}\right)^2, \Rightarrow \tau = 2v_0/a_0 = 2 \cdot 25/10 = 5c$$

---

35. Нормальное ускорение частицы постоянно по модулю. Что можно сказать о форме траектории этой частицы в случаях, когда проекция тангенциального ускорения на направление движения: 1) равна нулю; 2) отрицательная; в) положительная?

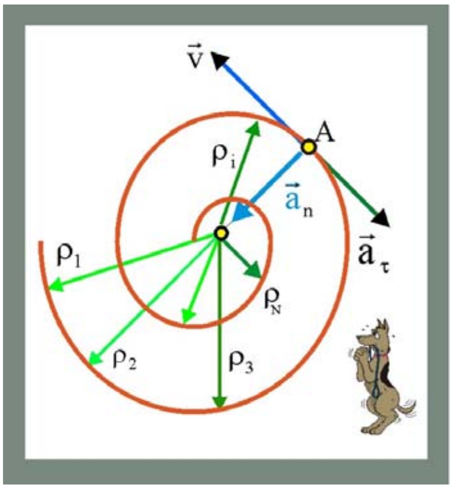


Рис. 35. Нормальное ускорение

Решение

1. Так как $a_\tau = dv/dt$, то равенство нулю тангенциальной составляющей ускорения может иметь место только при постоянстве модуля скорости $|\vec{v}| = \omega \cdot R = const$, частица в этом случае движется по круговой траектории постоянного радиуса с постоянной угловой скоростью: $\omega = const; R = const$.

2. Отрицательная проекция тангенциальной составляющей ускорения на направление вектора скорости при $a_n = v^2/\rho = const$ может наблюдаться в том случае, если скорость частицы при движении по траектории уменьшается, а радиус кривизны увеличивается. Такая ситуация возможна при движении по раскручивающейся спирали, когда радиус кривизны ρ увеличивается, а циклическая частота ω уменьшается.

3. Положительная проекция a_τ на направление $\vec{v}$, при постоянстве $\vec{a}_n$ будет наблюдаться в случае скручивающейся спирали.

---

36. Движение точки по окружности радиусом R = 4м задано в виде зависимости криволинейной координаты, отсчитываемой от некоторой начальной точки на окружности, от времени:

$$\xi(t) = A + Bt + Ct^2,$$

где A = 10 м, B = -2 м/с, C = 1 м/с^2. Найдите модуль полного ускорения его нормальную и тангенциальную составляющие для времени t_1 = 2 с после начала движения.

Решение

1. Заданное уравнение движение можно переписать в виде

$$\xi(t) = \xi_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}, \qquad (1)$$

после чего становится очевидным, что

$$v_0 = -2м/c; \; a_0 = 2м/c^2; \; \xi_0 = 10м.$$

2. Определим модуль скорости, продифференцировав заданное уравнение движения по времени

$$v=\frac{d\xi}{dt}=v_0+Ct. \tag{2}$$

3. Модуль нормального ускорения

$$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(v_0+Ct)^2}{R}=1\frac{м}{с^2}. \tag{3}$$

4. Модуль тангенциального ускорения

$$a_\tau=\frac{dv}{dt}=C=2\frac{м}{с^2}. \tag{4}$$

5. Существенно отметить, что заданное движение проходит с переменным во времени ускорением (нормальное ускорение изменяется во времени по модулю), поэтому, модуль полного ускорения не будет равен a_0, а определится соотношением

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=2{,}34\,м/с^2. \tag{5}$$

---

37. По дуге окружности радиусом R = 10м движется частица. В некоторый момент времени нормальное ускорение частицы a_n = 4,9 м/с^2; в этот момент векторы полного и нормального ускорений образуют угол φ = 60^0. Найдите скорость и тангенциальное ускорение частицы.

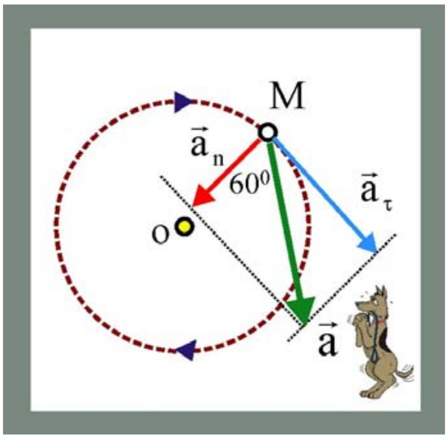


Рис. 37. Скорость и ускорение

Решение

1. Из заданных и искомых векторов $\vec{a}_n, \vec{a}_\tau$ и $\vec{a}$ можно образовать прямоугольный треугольник со всеми известными углами, что позволяет для определения искомых величин использовать традиционные тригонометрические уравнения

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{a_n}{a}; \quad a=\frac{a_n}{\sin 30^0}=9{,}8\frac{м}{с^2};$$

2. Определим далее модуль тангенциального ускорения

$$a_\tau=\sqrt{a^2-a_n^2}=8{,}5м/с^2.$$

3. Модуль скорости, при этом, будет равна

$$a_n=\frac{v^2}{R}, \quad \Rightarrow \quad v=\sqrt{a_nR}=7м/с.$$

---

38. Из верхней точки окружности по гладкому желобу под углом φ к вертикали начинает скользить шарик. За какое время он достигнет окружности, если её диаметр D?

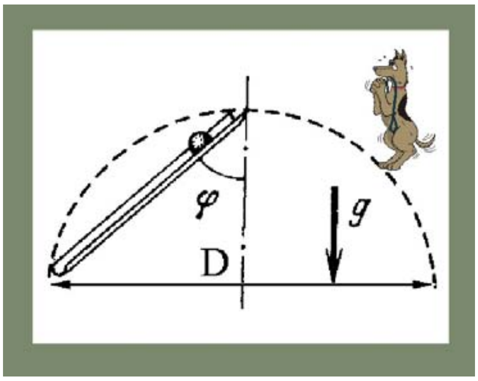


Рис. 38. Скатывание шарика по жёлобу

Решение

1. По гладкому жёлобу шарик будет двигаться с ускорением, равным проекции ускорения свободного падения на направление движения, т.е.

$$a=g\cdot\cos\varphi.$$

2. Перемещение шарика представляет собой хорду окружности диаметром D, величина которой связана с диаметром, следующим соотношением

$$r = D\cos\varphi .$$

3. Запишем далее уравнение ускоренного движения шарика и из него найдём время движения

$$r = \frac{at^2}{2}, \quad D\cos\varphi = \frac{g\cos\varphi}{2}t^2, \quad t = \sqrt{\frac{2D}{g}} .$$

4. Существенно отметит, что в уравнение времени не входит угол, это означает, что независимо от его величины время движения шарика из верхней точки окружности по прямолинейной траектории любого наклона будет одинаковым. Сила тяжести в поле, которой происходит движение, является консервативной.

---

39. Из точки А по спицам с разным наклоном одновременно начинают скользить без трения маленькие бусинки. На какой кривой будут находиться бусинки в момент времени t_1?

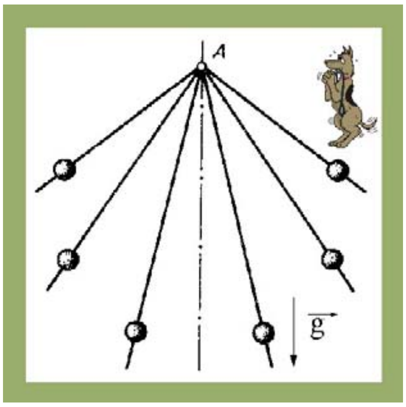


Рис. 39. Скольжение бусинок

Решение

1. Элементарное перемещение произвольной бусинки можно охарактеризовать следующим уравнением

$$dr_i = \frac{g\cos\varphi_i}{2}t^2 .$$

2. Как было показано в предыдущей задаче, время движения бусинок не зависит от наклона спиц, поэтому в уравнении переменной величиной является угол φ. Проинтегрируем уравнение в пределах возможного изменения угла φ

$$r_i = \frac{gt^2}{2}\int_0^{\pi}\cos\varphi_i d\varphi_i = \frac{gt^2}{2}\sin\varphi\Big|_0^{\pi} = \frac{gt^2}{2},$$

3. Таким образом, за одинаковое время t бусинки совершат в поле силы тяжести одинаковые перемещения, другими словами, они будут находиться на окружности с центром в точке старта и радиусом, определяемым последним уравнением.

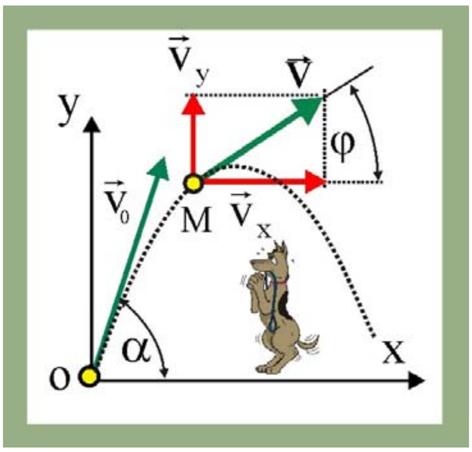


Рис. 40. Полёт камня

40. Камень бросают со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Через какое время, прошедшее с момента начала движения, вектор скорости камня будет составлять угол φ с горизонтом? Сопротивление со стороны воздуха отсутствует.

Решение

1. Запишем уравнения для проекций скоростей материальной точки, брошенной под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0

$$\vec{v}_x = \vec{i}(v_0 \cos\alpha);$$
$$\vec{v}_y = \vec{j}(v_0 \sin\alpha - gt).$$

2. Образуем из векторов $\vec{v}_x, \vec{v}_y$ и $\vec{v}$ прямоугольный треугольник с искомым углом φ, для которого можно записать очевидное соотношение

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{v_0 \sin\alpha - gt}{v_0 \cos\alpha}.$$

3. Разрешим уравнение относительно времени

$$\mathrm{tg}\varphi \cdot v_0 \cos\alpha = v_0 \sin\alpha - gt,$$

$$t = \frac{v_0}{g}(\sin\alpha - \cos\alpha\,\mathrm{tg}\varphi).$$

---

41. Частицу бросают под углом 60^0 к горизонту. В какой точке траектории угол между вектором начальной скорости и вектором текущей скорости будет максимальным. Какова величина этого угла?

Решение

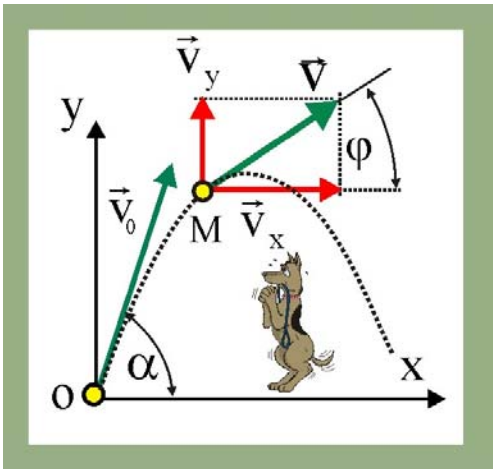


Рис 41. Полёт частицы

1. Движение материальных тел в воздушной среде без сопротивления предполагает, в частности, что параболическая траектория симметрична относительно точки С, а модуль вектора начальной скорости равен модулю конечной скорости.

2. Если произвести параллельный перенос вектора начальной скорости $\vec{v}_0$ в конечную точку полёта, то станет ясно, что именно в точке В угол $(\vec{v}_0;\vec{v}_B)$ будет максимальным.

3. Найдём величину угла между вектором конечной скорости и горизонтальной осью, для чего запишем систему четырёх уравнений, описывающих данный тип движения, с учётом того, что по вертикальной оси движение будет ускоренным (g_y = - g), а по горизонтальной оси – равномерным (g_x = 0)

$$v_x = v_0 \cos\alpha; \qquad v_y = v_0 \sin\alpha - gt,$$

$$x = v_0 t \cos\alpha; \qquad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

4. Определим время подъёма в верхнюю точку траектории С, воспользовавшись тем обстоятельством, что вертикальная составляющая скорости равна нулю

$$v_{Cy} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_C = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}.$$

5. Время подъёма из О в С равно времени спуска из С в В, поэтому полное время полёта частицы определится как

$$t_B = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}.$$

6. Найдём модуль и направление вектора конечной скорости

$$v_{Bx} = v_0 \cos\alpha; \quad v_{By} = v_0 \sin\alpha - 2v_0 \sin\alpha = -v_0 \sin\alpha .$$

$$\left|\vec{v}_B\right| = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2} = v_0 .$$

$$\left(\vec{v}_B; \vec{i}\right) = \arccos\frac{v_{Bx}}{\left|\vec{v}_B\right|} = \arccos(\cos\alpha) = \alpha .$$

7. Таким образом, угол между векторами конечной и начальной скорости частицы составляет 2α, т.е. 120^0.

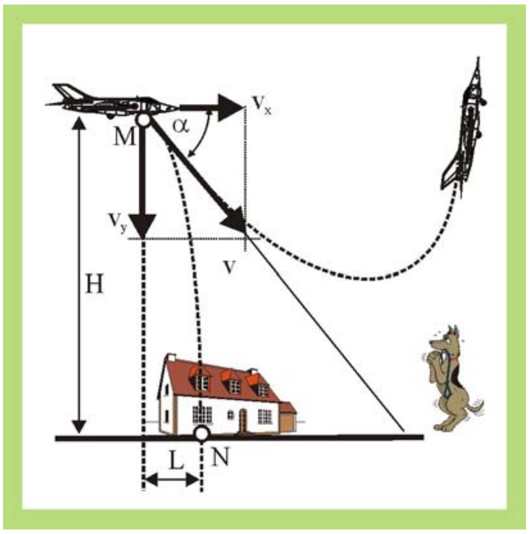


Рис. 42. Бомбометание

42. Бомбардировщик пикирует по прямой, составляющий угол α = 45^0 с горизонтом. В целях безопасности экипажа бомбы должны покидать самолёт на минимальной высоте полёта 1000 м. На каком расстоянии от цели необходимо начать бомбометание при скорости пикирования 850 км/час?

Решение

1. В начальный момент времени сбрасываемая бомба имеет скорость бомбардировщика, которую можно представить двумя составляющими. Вертикальная составляющая характеризует свободное падение бомбы до поверхности земли, горизонтальная составляющая скорости постоянна по модулю и определяет перемещение вдоль оси OX.

2. Запишем кинематические уравнения, определяющие движение бомбы

$$v_x = v\cos\alpha;$$

$$v_y = v\sin\alpha + gt;$$

$$x = vt\cos\alpha;$$

$$y = vt\sin\alpha + gt^2/2.$$

3. Из четвёртого уравнения системы определим время полёта бомбы до цели t_1

$$H = vt_1\sin\alpha + \frac{gt_1^2}{2}; \Rightarrow t^2 + \frac{v\sin\alpha}{g}t_1 - \frac{2H}{g} = 0 .$$

$$t_1 = -\frac{v\sin\alpha}{2g} + \sqrt{\frac{v^2\sin^2\alpha}{g^2} + \frac{2H}{g}} .$$

4. Третье уравнение системы даёт возможность определить искомое расстояние L

$$L = vt_1\cos\alpha = \frac{v^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}\left(\sqrt{1 + \frac{2gH}{v^2\sin^2\alpha}} - 1\right) \cong 1335\text{м} .$$

---

43. Частицу бросают с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. В какой точке траектории частицы нормальное ускорение будет максимальным. Сопротивление движению отсутствует.

Решение

1. Получим уравнение траектории, т.е. уравнение вида y = f(x), для чего запишем уравнения движения и исключим из них время

$$x(t) = v_0 t\cos\alpha; \qquad y(t) = v_0 t\sin\alpha - gt^2/2 .$$

Выразим далее из первого уравнения время t и подставим во второе уравнение системы

$$t = \frac{x}{v_0\cos\alpha}; \qquad y = v_0\frac{x\sin\alpha}{v_0\cos\alpha} - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha} .$$

Преобразуем уравнение траектории к виду, более удобному для дальнейшего анализа

$$y(x) = -x^2\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha} + x\,\mathrm{tg}\alpha .$$

Величины $\{v_0; g; \alpha\}$ для условий данной задачи представляются постоянными, не зависящими от времени и координат, поэтому

$$y = -Ax^2 + Bx .$$

2. Уравнение y = f(x) является уравнением симметричной параболы с вертикальной осью. Радиус кривизны параболы величина переменная, имеющая минимальное значение в вершине параболы, т.е. в точке 2, соответствующей наивысшей точке траектории полёта частицы. В этой точке векторы нормального и тангенциального ускорений совпадают по направлению с осями декартовой системы координат.

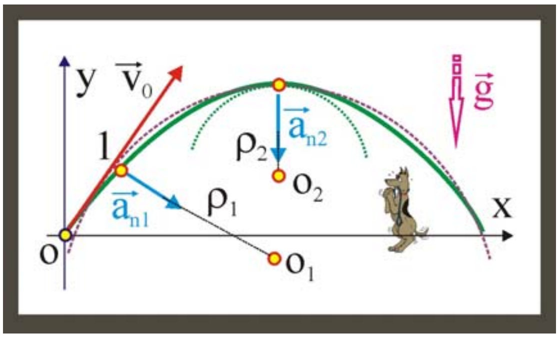


Рис. 43. Максимальное нормальное ускорение

3. Таким образом, в точке 2 нормальное ускорение будет иметь максимальное значение, равное ускорению свободного падения $\vec{g}$. Во всех прочих точках траектории частицы, например, в 1, нормальное ускорение, вектор которого направлен по радиусу кривизны ρ_1, будет являться проекцией $\vec{g}$ на направление радиуса кривизны.

---

44. Сферический резервуар, стоящий на поверхности земли имеет радиус R. При какой минимальной скорости, брошенный с поверхности камень, перелетит резервуар, только коснувшись его вершины. Сопротивление движению со стороны воздуха отсутствует.

Решение

1. Естественно предположить, что камень нужно бросать под углом к горизонту, т.е. камень полетит, удовлетворяя уравнениям

$$v_x = v\cos\alpha; \qquad v_y = v\sin\alpha + gt;$$

$$x = vt\cos\alpha; \qquad y = vt\sin\alpha - gt^2/2.$$

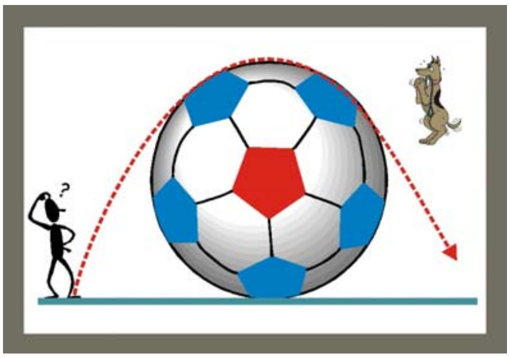


Рис. 44. Минимальная скорость

2. Используя уравнение для проекции скорости на вертикальную ось, определим время подъёма камня t_1 на высоту 2R

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt; \quad v_{yC} = 0; \quad t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}.$$

3. Максимальная высота подъёма камня по вертикальной оси должна быть равна $y_{max} = 2R$, поэтому

$$y_{max} = 2R = \frac{1}{2}\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g}.$$

4. Определим значение начальной скорости броска

$$v_0 = \sqrt{\frac{4gR}{\sin^2\alpha}}.$$

5. Угол, под которым следует бросать камень, определим из условия

$$y_{max} = x_{max} = 2R;$$

$$x_{max} = v_0 \cos\alpha t_1 = \frac{1}{2}\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cos\alpha \cdot \sin\alpha}{g};$$

$$tg\alpha = 2; \qquad \alpha = arctg2 \cong 63^0.$$

6. Совместим далее уравнения v_0 и x_{max}

$$v_0 = \sqrt{\frac{4Rg}{\sin^2\alpha}} = \sqrt{\frac{4Rg}{\sin^2 63^0}} \cong \sqrt{5Rg}.$$

---

45. Частица брошена под углом α к горизонту. Определите, чему должен быть равен этот угол, если дальность броска в четыре раза превышает максимальную высоту подъёма над горизонтом? Сопротивление движению со стороны воздуха отсутствует.

Решение

1. Время полёта частицы в отсутствие сопротивления равно удвоенному времени её подъёма в верхнюю точку траектории (см. предыдущее решение)

$$t_{пол} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

2. Если это значение времени подставить в уравнения координат, то получим

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}; \qquad x_{max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

3. По условию этой задачи $x_{max} = 4y_{max}$, поэтому

$$\frac{v_0^2 2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \sin^2\alpha}{g}; \quad \Rightarrow \quad tg\alpha = 1; \quad \alpha = 45^0.$$

---

46. По гладкой наклонной плоскости со скоростью v пускают шарик. Какое расстояние по горизонтали пройдёт шарик, прежде чем скатится с плоскости? Плоскость наклонена под углом 45^0 к горизонту. Начальная скорость составляет 45^0 с горизонтальным краем плоскости.

Решение

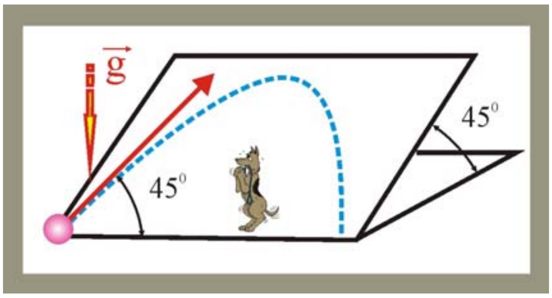


Рис. 46. Шарик на плоскости

1 Особенность заданного движения заключается в том, что на шарик будет действовать проекция ускорения свободного падения

$$a = g\cos 45^0 .$$

2 Дальность броска в этом случае определится следующим образом

$$x_{max} = \frac{v_0^2 \sin 2\cdot 45_0}{g\cos 45^0} = \frac{v_0^2\sqrt{2}}{g}.$$

---

47. С какой скоростью должен в момент старта ракеты вылететь снаряд из пушки, чтобы поразить ракету, стартующую вертикально с ускорением a. Расстояние от пушки до старта ракеты равно L. Из пушки стреляют под углом 45^0 к горизонту.

Решение

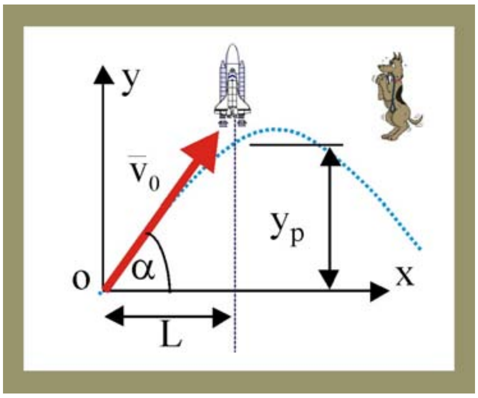


Рис. 47. Из пушки по ракете

1. Уравнения движения пушечного снаряда:

$$x_1 = v_0 t\cos\alpha;$$

$$y_1 = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

2. Время полёта снаряда до встречи с ракетой определим, подставив в уравнение движения условие $x_1 = L$

$$t = L/v_0\cos\alpha .$$

3. Уравнение движения ракеты

$$y_2 = at^2/2 .$$

4. Снаряд попадёт в ракету, когда их вертикальные координаты совпадут, т.е.

$$\frac{at^2}{2} = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad a + g = \frac{2v_0\sin\alpha}{t}.$$

5. Подставляя далее значение времени в последнее уравнение, получим:

$$a + g = \frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{L} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{L},$$

$$v_0 = \sqrt{L(a+g)} .$$

---

48. Танк, расположенный на вершине горы, производит горизонтальные выстрелы. Снаряды разрываются на расстоянии 5 км ниже по склону. Определить начальную скорость снаряда, если склон горы образует с горизонтом угол $\alpha = 30^0$.

Решение

1. Горизонтальная составляющая скорости снаряда будет постоянной и равной v_0, это даёт основание определить горизонтальное перемещение снаряда за время t в виде

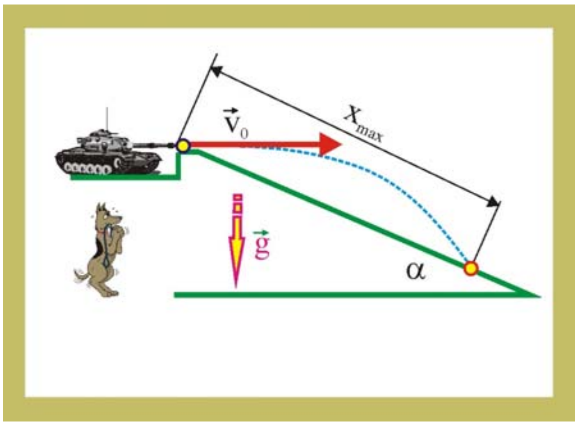


Рис. 48. Стрельба по склону

$$v_0 t = x_{max}\cos\alpha .$$

2. Изменение вертикальной координаты снаряда будет протекать в соответствии с уравнением

$$y(t) = \frac{gt^2}{2} = x_{max}\sin\alpha .$$

3. Выразим далее время

$$t = \frac{x_{max}\cos\alpha}{v_0},$$

и подставим это значение в уравнение вертикальной координаты

$$\frac{g}{2}\frac{x_{max}^2\cos^2\alpha}{v_0^2} = x_{max}\sin\alpha .$$

4. Разрешая полученное уравнение относительно искомой начальной скорости снаряда, получим

$$v_0 = \sqrt{\frac{gx_{max}\cos^2\alpha}{2\sin\alpha}} \cong 194\text{м/с} .$$

---

49. Шарик с высоты 2м вертикально отпускают на наклонную плоскость, от которой он упруго отражается. На каком расстоянии от места падения окажется на этой плоскости шарик после отскока? Плоскость наклонена к горизонту под углом 30^0.

Решение

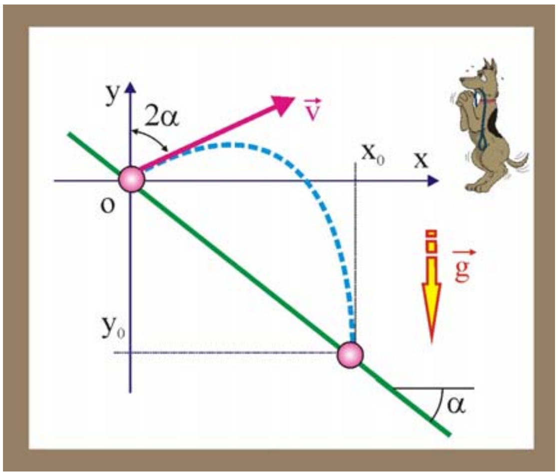


Рис. 49. Отскок шарика от плоскости

1. Падение шарика с заданной высоты h будет свободным, поэтому скорость в момент касания равна

$$v = \sqrt{2gh} .$$

2. При упругом соударении шарика с наклонной плоскостью составляющая скорости параллельная поверхности остаётся неизменной, а составляющая перпендикулярная плоскости, оставаясь неизменной по модулю, меняет своё направление на противоположное. Угол падения при упругом ударе равен углу отражения.

3. Если оси декартовой системы координат выбрать традиционным образом, то начальная координата шарика y_0 будет отрицательной. После отскока шарик попадёт в точку плоскости с координатами, $\{x_0, y_0\}$, которые связаны с углом наклона плоскости соотношением

$$-y_0/x_0 = \text{tg}\alpha .$$

4. Определим вертикальное и горизонтальное перемещение шарика за время t

$$y = vt\cos 2\alpha - \frac{gt^2}{2}, \qquad x = vt\sin 2\alpha .$$

5. Найдём далее вид траектории шарика, для чего из второго уравнения системы выразим время и подставим это значение в первое уравнение

$$y = x\operatorname{ctg}2\alpha - \frac{g}{2v^2}\frac{x^2}{\sin^2 2\alpha}.$$

6. В момент второго отскока координаты шарика станут равны $\{x_0, y_0\}$, поэтому

$$y_0 = \left(x_0\operatorname{ctg}2\alpha - \frac{gx_0^2}{2v^2\sin^2 2\alpha}\right).$$

7. Выразим далее определим величину x_0 ($x_0 = -y_0/\operatorname{tg}\alpha$) и подставим в уравнение y_0

$$y_0 = -\frac{y_0}{\operatorname{tg}\alpha}\operatorname{ctg}2\alpha + \frac{y_0^2}{\operatorname{tg}^2\alpha}\frac{g}{2v^2\sin^2 2\alpha},$$

откуда с учётом получим:

$$y_0 = -4h\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2 2\alpha\left(1 + \frac{\operatorname{ctg}2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right).$$

8. Преобразуем последнее уравнение с учётом следующих тригонометрических соотношений:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \quad \operatorname{ctg}2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{2},$$

$$y_0 = -8h\sin^2\alpha.$$

9. Горизонтальное перемещение шарика запишется после всего этого очень просто

$$s = \frac{|y_0|}{\sin\alpha} = 8h\sin\alpha = 4h = 8\text{м}.$$

---

50. Автомобиль движется без скольжения по горизонтальному шоссе со скоростью 72 км/час. На какую максимальную высоту отбрасываются капли воды с колёс автомобиля, если они имеют радиус 0,8 м.

Решение

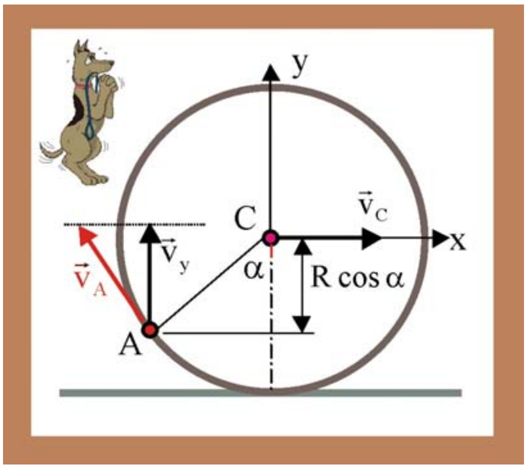


Рис. 50. Полёт капель от колеса

1. Линейная скорость периферийных точек колеса

$$v_A = \omega R = \frac{v_C}{R}R = v_C.$$

2. Вертикальная составляющая скорости отрывающейся капли

$$v_y = v_C\sin\alpha.$$

3. Вертикальная координата капли в момент отрыва (начальное положение относительно полотна дороги)

$$y_0 = R - R\cos\alpha.$$

4. После отрыва от колеса, каля будет двигаться как частица, брошенная под углом к горизонту, максимальная высота подъёма капли над горизонтом определится как

$$y_{max} = R - R\cos\alpha + \frac{v_C^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

5. Преобразуем уравнение к виду, более удобному для решения

$$y_{max}2g = R2g - 2gR\cos\alpha + v_C^2 - v_C^2\cos^2\alpha,$$

$$(\cos^2\alpha - 1) + \frac{2Rg}{v_C^2}(\cos\alpha - 1) + \frac{2y_{max}g}{v_C^2} = 0.$$

$$\cos\alpha_{1,2} = -\frac{Rg}{v_C^2} \pm \sqrt{\left(\frac{Rg}{v_C^2} + 1\right)^2 - \frac{2gy_{max}}{v_C^2}}.$$

6. Из полученного уравнения можно видеть, что подкоренное выражение не может быть отрицательным, т.е.

$$y_{max} \le \left(\frac{v^2}{2g}\right)\left[\frac{Rg}{v_C^2} + 1\right]^2,$$

кроме того, $|\cos\alpha_{1,2}| \le 1$. В соответствии с условиями задачи

$$\frac{Rg}{v_C^2} \cong \frac{8}{400} << 1,$$

другими словами, $\cos\alpha_1$ имеет физический смысл при условии

$$y_{max} \le \frac{v_C^2}{2g}\left(\frac{Rg}{v_C^2} + 1\right)^2,$$

а $\cos\alpha_2$ – при $y_{max} \ge 2R$.

7. Таким образом, максимальная высота полёта капель будет равна

$$y_{max} = \frac{v_C^2}{2g}\left(\frac{Rg}{v_C^2} + 1\right)^2 \cong 20\text{м}.$$

8. Задачу можно решить приближённо иным способом, более простым. Поскольку направление полёта капель не ограничивается никакими условиями, то естественно предположить, что на максимальную высоту поднимутся капли отлетающие от колеса вертикально вверх, причём полёт начнётся при $y_0 = R$. Время их полёта составит $t = v_C/g \cong 2c$, т.е. капли поднимутся на высоту

$$y_{max} = R + \frac{gt^2}{2} \cong 20{,}8\text{м}.$$

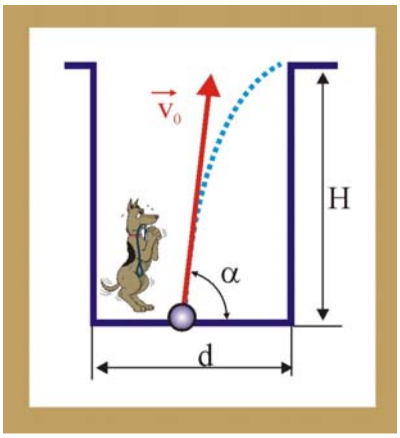


Рис. 51. Испытание гранаты

51. Испытания нового образца гранаты производится в центре дна цилиндрической ямы глубиной H. Каким должен быть минимальный диаметр ямы, чтобы осколки, имеющие скорость v_0, не вылетели из неё?

Решение

1. Запишем уравнения движения «критического» осколка

$$v_0\cos\alpha t = \frac{d}{2}, \quad v_0\sin\alpha t - \frac{gt^2}{2} = H.$$

2. Выразим из время и подставим это значение, т.е. получим уравнение траектории

$$tg^2\alpha - \frac{4v_0^2}{gd}tg\alpha + \left(\frac{8Hv_0^2}{gd^2} + 1\right) = 0,$$

которое можно рассматривать, как квадратное уравнение относительно tgα. Условие задачи будет выполняться, если уравнение не будет иметь решений, в этом случае осколки останутся в яме.

3. Чтобы уравнение не имело решений, его дискриминант должен быть меньше нуля

$$\left(\frac{4v_0^2}{gd}\right)^2 - 4\left(\frac{8Hv_0^2}{gd^2} + 1\right) \le 0,$$

или

$$d \ge \sqrt{\frac{4v_0^2}{g^2}\left(v_0^2 - 2gH\right)} \ge \frac{2v_0}{g}\sqrt{v_0^2 - 2gH}.$$

4. Минимальный диаметр ямы, таким образом, должен быть равен

$$d_{min} = \frac{2v_0}{g}\sqrt{v_0^2 - 2gH}.$$

---

52. Между сдвоенными шинами грузового автомобиля застрял камень на расстоянии 0,8 R от центра колеса радиусом R = 1м. При скорости автомобиля 72 км/час камень покидает колесо. На каком минимальном расстоянии от грузовика должен двигаться легковой автомобиль, чтобы в него камень не попал?

Решение

1. Камень будем считать телом, брошенным под углом α к горизонту, причём наиболее далеко булыжник полетит, когда этот угол будет составлять 45^0 к горизонту, потому что

$$x_{max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

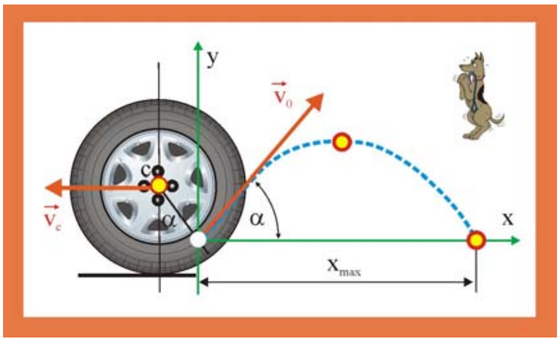


Рис. 52. Камень из сдвоенных колёс грузовика

2. Линейная скорость камня в начальной точке его полёта определится как

$$v_0 = \frac{v_c}{R}0{,}8R = 0{,}8v_c = 16 м/с.$$

3. Безопасное расстояние до легкового автомобиля в этом случае будет равно

$$x_{min} = \frac{16^2}{10} = 25{,}6 м.$$

---

53. На катушку намотаны четыре невесомых нерастяжимых нити. Угловая скорость катушки равна ω, радиус внутреннего цилиндра равен r, а внешних цилиндров R. Каковы скорости катушки и груза относительно неподвижной системы отсчёта.

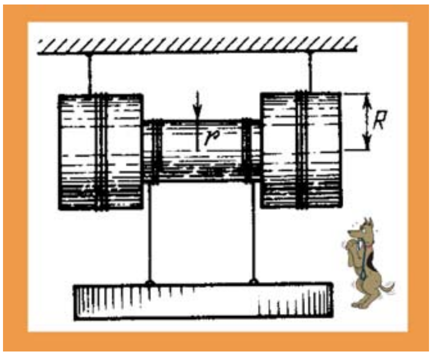


Рис. 53. Линейные скорости

Решение

1. Так как угловая скорость вращающегося твёрдого тела определяется как $\omega = d\varphi/dt$, то все точки катушки будут иметь одинаковую угловую скорость, но различную линейную скорость

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

в зависимости от расстояния до оси вращения.

2. Модуль линейной скорости оси катушки, таким образом, определится так:

$$v_k = \omega R .$$

3. Скорость опускания груза, связанного с внутренним цилиндром радиуса r ,будет равна

$$v_{гр} = \omega(R - r). \qquad (3)$$

---

54. Плоское твёрдое тело вращается вокруг оси, перпендикулярной его плоскости. Координаты начального положения точек А и В этого тела (-1,2) и (3,1), а конечного положения (-3,1) и (-2,-3). Определите геометрическим построением координаты оси вращения.

Решение

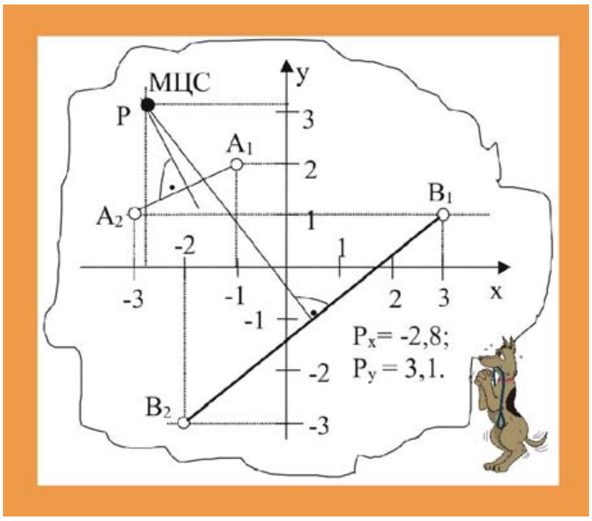


Рис. 54. Координаты оси вращения

1. В системе декартовых координат наносим точки A_1,A_2 и B_1,B_2 и соединяем их прямыми линиями.

2. Находим геометрически середины отрезков A_1,A_2 и B_1,B_2.

3. Строим из середин этих отрезков перпендикуляры и находим точку их пересечения P, это и будет положение мгновенного центра скоростей МЦС, через который в данный момент времени проходит ось вращения перпендикулярно плоскости чертежа.

---

55. Бусинка может двигаться по кольцу радиуса R, подталкиваемая спицей, равномерно вращающейся с угловой скоростью ω в плоскости кольца. Ось вращения спицы свободно движется по кольцу. Определите ускорение бусинки.

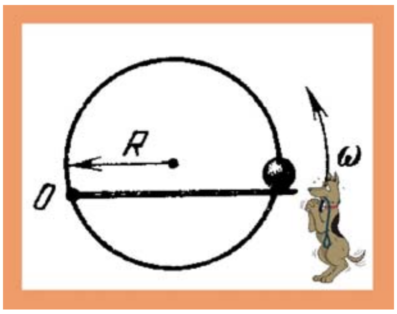


Рис. 55. Бусинка в кольце

Решение

1. Бусинка вращается с угловой скорость ω вокруг мгновенной оси вращения, располагаясь постоянно на расстоянии 2R, поэтому, в соответствии с формулой Эйлера

$$v = \omega 2R .$$

2. Поскольку величины ω и R остаются во время движения постоянными, то бусинка имеет

только нормальную составляющую ускорения. Траекторией движения бусинки будет окружность радиуса R, поэтому:

$$a \equiv a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{4\omega^2 R^2}{R} = 4\omega^2 R\ .$$

---

56. Нить, намотанную на ось катушки, тянут со скоростью v, направленной под углом α к горизонту. Катушка катится по горизонтальной плоскости без проскальзывания. Определите угловую скорость катушки и линейную скорость её центра. При каких углах α катушка будет двигаться вправо? Влево? При движении угол α не изменяется.

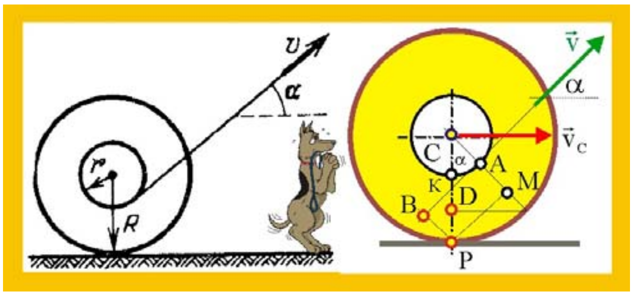


Рис. 56. Плоское движение

Решение

1. Катушка совершает плоское движение, т.е. движется поступательно вправо или влево и вращается вокруг точки P, которая, являясь общей у движущейся катушки и неподвижной плоскости, в данный момент времени совпадает с мгновенной осью вращения. Ось вращения проходит через P перпендикулярно плоскости чертежа.

2. Все точки катушки в данный момент времени движутся вокруг точки P. Вектор заданной скорости $\vec{v}$ приложен в точке A, следовательно расстояние от A до мгновенной оси вращения равно PB =AM = KD, потому что точки M и D лежат на одной окружности.

3. Определим расстояние KD как (CD – CK) или

$$BP = KD = R\cos\alpha - r\ .$$

4. В соответствии с формулой Эйлера, угловая скорость определится как

$$\omega = \frac{v}{R\cos\alpha - r}\ .$$

5. Центр катушки отстоит от точки P на расстоянии R, линейная скорость центра катушки будет равна

$$v_C = \frac{vR}{\cos\alpha - \dfrac{r}{R}}\ .$$

6. Если за положительное принять движение центра катушки вправо, то это будет происходить всегда когда $\cos\alpha > r/R$, если же $r/R > \cos\alpha$, то катушка станет двигаться влево. А вот если случится так, что $\cos\alpha = r/R$, то катушка станет крутится на месте, точка C будет неподвижной.

---

57. Бревно, упираясь нижним своим концом в угол между стеной и землёй, касается рамы грузовика на высоте H от земли. Определите угловую скорость бревна в зависимости от угла α, если грузовик отъезжает от стены со скоростью v.

Решение

1. При отъезде грузовика, бревно будет вращаться вокруг точки O, при этом, векторы линейных скоростей всех точек бревна должны быть перпендикулярны его оси.

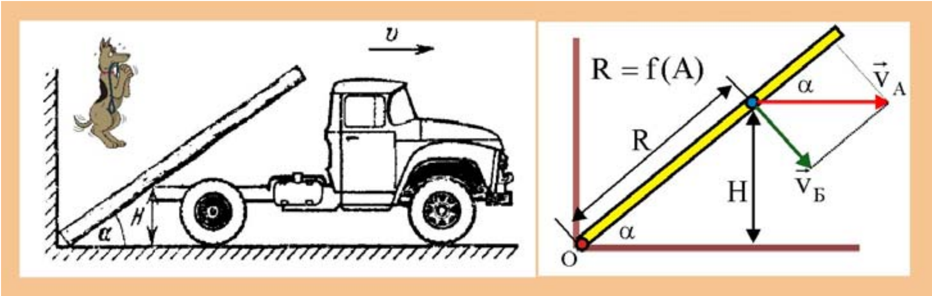


Рис. 57. Угловая скорость бревна

2. Разложим скорость грузовика на две составляющие, одна из которых перпендикулярна оси бревна, а вторая – параллельна оси. Определим перпендикулярную составляющую скорости

$$v_Б = v_A \sin\alpha \, .$$

3.. С другой стороны, расстояние от оси вращения бревна до точки касания с рамой грузовика R, тоже меняется в зависимости от величины H, следовательно, $R = f(\alpha)$, другими словами

$$R = \frac{H}{\sin\alpha} \, .$$

4. Угловая скорость бревна прямо пропорциональна его линейной скорости и обратно пропорциональна расстоянию данной точки до оси вращения, т.е.

$$\omega = \frac{v_Б}{R} = \frac{v_A \sin^2\alpha}{H} \, .$$

---

58. Колесо известного радиуса R = 1м катится по горизонтальному полу, так что скорость его центра остаётся постоянной и равной v_C = 2м/с. Определите: 1) модуль и направление вектора угловой скорости колеса $\vec{\omega}$; 2) скорости заданных точек A,B,D и P, лежащих на ободе; 3) векторы линейного ускорения этих точек; 4) траектории по которым движутся точки A,B, C и D.

Решение

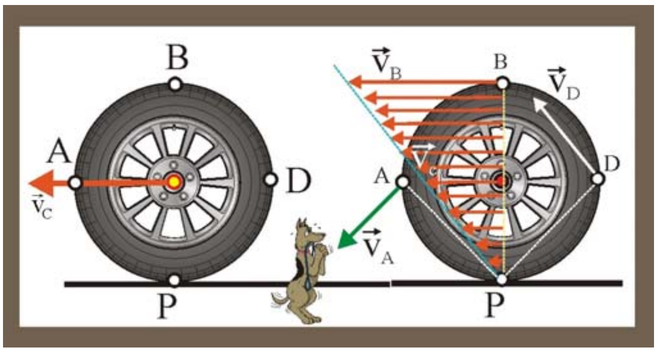


Рис. 58. Плоское движение колеса

1. Колесо совершает плоское движение, симбиоз поступательного и вращательного, точка P в данный момент является мгновенным центром скоростей (МЦС) v_P = 0. Именно через точку P перпендикулярно плоскости чертежа проходит мгновенная ось вращения. Модуль угловой скорости можно определить по известной скорости центра колеса

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \Rightarrow \quad |\vec{\omega}| = |\vec{v}| / |\vec{r}| = v_C / R = 2 рад/с \, .$$

Вектор угловой скорости совпадает по направлению с мгновенной осью вращения и направлен на зрителя.

2. Скорости заданных точек определим из следующих соображений. Во-первых, векторы линейных скоростей указанных точек перпендикулярны отрезкам, соединяющих их с мгновенным центром скоростей. Во-вторых, угловая скорость всего колеса одинакова и равна $\omega = v_C / R = 2 рад/с$. Таким образом:

$$|\vec{v}_B| = PB \cdot \omega = 2R\omega = 2v_C = 4м/с,$$

$$|\vec{v}_A| = \omega AP = \omega R\sqrt{2} = 2{,}82м/с,$$

$$|\vec{v}_D| = \omega R\sqrt{2} = 2{,}82м/с.$$

3. Линейное ускорение всех указанных точек одинаково по модулю и равно нормальному ускорению

$$a_A = a_B = a_D = v_C^2/R = 4м/с^2,$$

направлено ускорение, как ему и положено, от данной точки к центру колеса С.

4. Траектории точек представляют собой концентрические окружности с общим центром в точке Р.

---

59. Сферический буй радиуса R привязан к дну бассейна. Уровень воды в бассейне поднимается со скоростью v. Какова скорость перемещения границы затопленной части буя по его поверхности в момент, когда уровень воды оказывается на h выше центра буя?

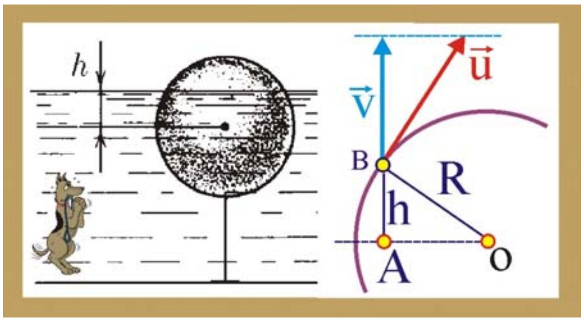


Рис. 59. Перемещение границы воды

Решение

1.Граница воды относительно системы отсчёта, связанной с неподвижным центром буя О будет перемещаться по круговой траектории со скоростью $\vec{u}$, направлен вектор этой скорости будет по касательной к поверхности сферы.

2. Соединив концы векторов вертикальной скорости подъёма воды в бассейне $\vec{v}$ и скорости движения границы воды $\vec{u}$, получим прямоугольный треугольник, который будет подобен ΔОАВ. Из свойства подобия следует:

$$\frac{u}{v} = \frac{BO}{AO} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - h^2}}; \quad \Rightarrow \quad u = \frac{vR}{\sqrt{R^2 - h^2}};$$

---

60. На цилиндр, который может вращаться около горизонтальной оси, намотана нить. К концу нити привязали грузик и предоставили ему возможность опускаться. Двигаясь равноускоренно, грузик за время 3с опустился на y= 1,5 м. Определить угловое ускорение цилиндра, если его радиус r = 4 см.

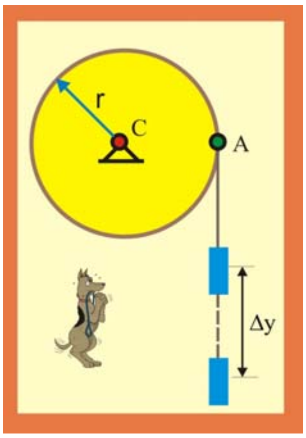


Рис. 60. Угловое ускорение

Решение:

1. Запишем кинематические уравнения движения тела, скреплённого с нитью

$$\left.v = at, \quad y = \frac{at^2}{2}.\right\}$$

2. Решая совместно уравнения, определим скорость опускания груза в заданный момент времени

$$v = 2y/t.$$

3. Угловая скорость диска

$$\omega = v/r = 2y/rt.$$

4. Угловое ускорение диска

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{2y}{rt^2} \cong 8{,}33\frac{рад}{с}.$$

---

2. Динамика

Законы Ньютона

61. По достоверным сведениям, однажды, барон Мюнхгаузен, увязнув в болоте, вытащил из болота сам себя и свою лошадь за волосы. Какие законы физики сумел нарушить барон?

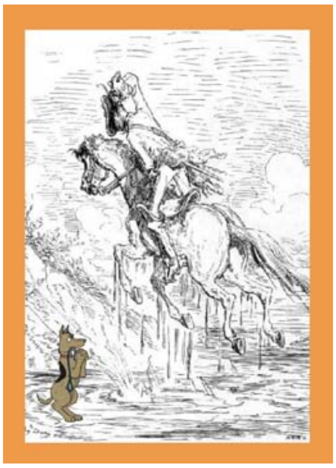


Рис. 61. Внутренние силы

Решение:

1. В данной задаче идёт речь о механической системе в которую следует включить лошадь барона и его самого, включая руку, тянущую его же за знаменитую косичку.

2. Как известно, все силы, действующие в механических системах принято разделять на внешние и внутренние. Внешние силы своим происхождением обязаны взаимодействием с телами, не входящими в данную систему, а внутренние силы вызваны взаимодействием исключительно между телами анализируемой механической системы.

3. В соответствии с третьим законом Ньютона каждая из внутренних сил будет встречаться попарно, причём двойки сил будут равны по модулю и противоположны по направлению. Геометрическая сумма (главный вектор) внутренних сил и их моментов (главный момент) относительно некоторого неподвижного центра в любой системе равны нулю, т.е.

$$\vec{\Re}^{i} = \sum_{k=1}^{k=n} \vec{F}_k^{i} = 0, \quad \vec{M}_O^{i} = \sum_{k=1}^{k=n} \vec{m}_O^{i}\left(\vec{F}_k^{i}\right) = 0. \qquad (1)$$

4. Уравнения, в частности, показывают, что внутренние силы не могут изменить механического состояния системы. В этой связи, все старания барона Мюнхгаузена по вытягиванию себя совместно с лошадью из болота не увенчаются успехом, так как третий закон Ньютона и уравнения (1) неумолимы.

---

62. Шайба, скользившая по льду, остановилась через время t = 5с после удара о клюшку на расстоянии L = 20 м от места удара. Масса шайбы m = 100 г. Определите среднюю величину действовавшей на шайбу силы трения.

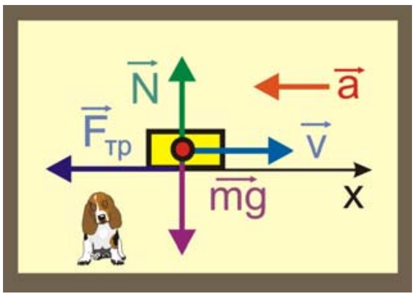


Рис. 62. Шайба на льду

Решение:

1. Движение шайбы происходит под действием трёх сил, две из которых mg и N, перпендикулярны направлению движения, поэтому их работа на перемещении вдоль оси OX равна нулю. Движение вдоль горизонтальной оси будет равнозамедленным

$$x = at^2/2, \quad \Rightarrow \quad a = 2x/t_2 .$$

2. В соответствии со вторым законом Ньютона

$$\sum_{k=1}^{k=n}\vec{F}_k = m\vec{a}, \quad \Rightarrow \quad \langle F_{тр}\rangle = \frac{2mx}{t^2} = 0{,}16H\,.$$

---

63. В электронно-лучевой трубке электроны с начальной горизонтальной скоростью v_0 влетают в область электрического поля протяженности ℓ, где на них действует вертикальная сила со стороны заряженных отклоняющих пластин. Чему равна эта сила, если электроны, попадая на экран, смещаются на расстояние y по сравнению со случаем незаряженных пластин? Экран находится на расстоянии L от центра области действия электрической силы. Масса электрона m_e.

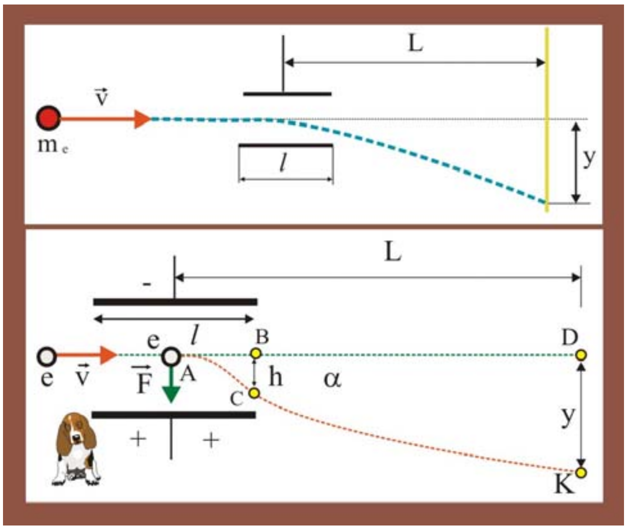


Рис. 63. Движение электрона

Решение:

1. В горизонтальном направлении электрон будет двигаться с постоянной начальной скоростью, т.к. в этом направлении действует только сила тяжести, которой ввиду малости массы электрона ($m_e \cong 1\cdot 10^{-30}$ кг) можно пренебречь. В вертикальном направлении, перпендикулярно нижней, положительно заряженной пластине действует кулоновская сила, которая обеспечивает ускоренное движение электрона по вертикальному направлению.

2. Определим смещение электрона h на выходе отклоняющих пластин, для чего рассмотрим два подобных треугольника ABC и ADK

$$\mathrm{tg}\alpha = y/L; \quad \mathrm{tg}\alpha = 2h/l, \quad \Rightarrow \quad h = yl/2L\,. \tag{1}$$

3. Для движения в пространстве между пластинами кинематические уравнения примут вид

$$h = at^2/2; \qquad l = v_0 t \quad \Rightarrow \quad t = l/v_0\,. \tag{2}$$

4. Объединяя уравнения (1) и (2) определим величину ускорения, действующего на электрон

$$a = \frac{2h}{t^2} = \frac{2yl}{2L}\frac{v_0^2}{l^2} = \frac{v_0^2 y}{Ll}\,. \tag{3}$$

5. Зная ускорение и массу электрона можно найти действующую силу

$$F = m_e a = \frac{m_e v_0^2 y}{Ll}\,. \tag{4}$$

---

64. Четырьмя натянутыми нитями груз закреплен на тележке. Сила натяжения горизонтальных нитей соответственно T_1 и T_2, а вертикальных – T_3 и T_4. С каким ускорением тележка движется по горизонтальной плоскости?

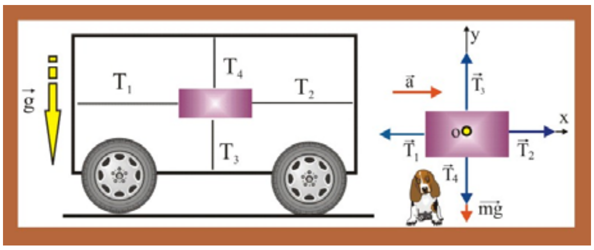


Рис. 64. Ускорение тележки

Решение:

1. Запишем уравнение второго закона Ньютона в проекции на оси координат

$$\left.\begin{aligned} T_2 - T_1 &= ma, \\ T_3 - T_4 - mg &= 0 \end{aligned}\right\},$$

откуда несложно определить ускорение

$$a = g\frac{T_2 - T_1}{T_3 - T_4}.$$

---

65. Какая сила действует в поперечном сечении однородного стержня длины ℓ на расстоянии x от того конца, к которому вдоль стержня приложена сила F?

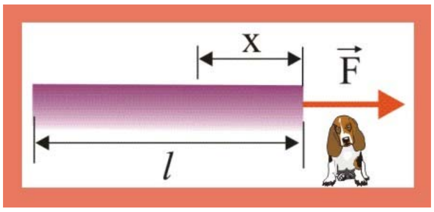


Рис. 65. Растяжение стержня

Решение

1 Сила, действующая на единицу длины стержня

$$f = F/\ell, [\text{Н/м}].$$

2 Натяжение в указанном сечении обусловлено действием части стержня длины $(\ell - x)$, другими словами,

$$T = \frac{F}{\ell}(\ell - x) = F\left(1 - \frac{x}{\ell}\right).$$

---

66. Два тела массы m_1 и m_2 связаны нитью, выдерживающей силу натяжения T. К телам приложены силы $F_1 = \alpha t$ и $F_2 = 2\alpha t$, где α - постоянный коэффициент, имеющий размерность, t - время действия силы. Определите, в какой момент времени нить порвется.

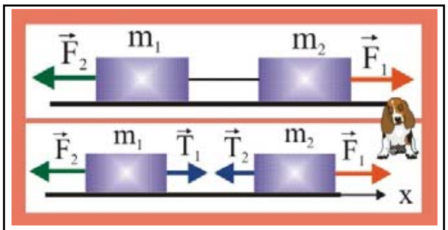


Рис. 66. Разрыв нити

Решение

1. Нить, связывающая тела, является в данном случае связью, которую можно заменить соответствующими реакциями в виде сил натяжения. Тела при этом можно рассматривать как свободные и записать для каждого в отдельности второй закон Ньютона в проекции на направление возможного движения

$$\left.\begin{aligned} -F_1 + T_1 &= m_2 a, \\ T_1 - F_2 &= m_1 a. \end{aligned}\right\} \quad T_1 = T_2 = t \quad \Rightarrow \quad \frac{T - F_2}{F_1 - T} = \frac{m_2}{m_1}.$$

2. Подставив заданные значения действующих сил, получим следующее уравнение

$$T(m_1 + m_2) = \alpha t m_2 + 2\alpha t m_1,$$

откуда

$$t = \frac{T(m_1 + m_2)}{\alpha(2m_1 + m_2)}.$$

---

67. Для измерения массы космонавта на орбитальной станции используется подвижное сиденье известной массы m_0, прикрепленное к пружине. При одной и той же начальной деформации (сжатии) пружины пустое сиденье возвращается в исходное положение через время t_0, если же на сиденье находится космонавт - через время $t > t_0$. Какова масса космонавта?

Решение:

1. Предполагается, очевидно, что на орбитальной станции создаётся искусственное тяготение, путём ращения станции вокруг собственной оси с некоторой угловой скоростью ω. Если испытательное кресло соединено с пружиной, то по её деформации можно судить о исследуемой массе. При фиксированных значениях массы и частоты вращения станции состояние равновесия наступит при равенстве силы упругости силе инерции. В этом случае второй закон Ньютона для пустого кресла и кресла с космонавтом можно записать так:

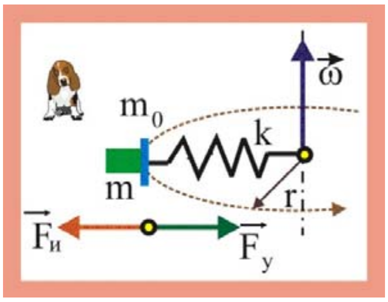


Рис. 67. Измерение массы

$$\left.\begin{aligned} kx_1 = k\frac{a_1 t_0^2}{2} = m_0 a_1, \\ kx_2 = k\frac{a_2 t^2}{2} = (m_0 + m)a_2 \end{aligned}\right\}.$$

2. После очевидных сокращений получим:

$$k\frac{t_0^2}{2} = m_0, \quad k\frac{t^2}{2} = (m_0 + m).$$

3. Деля уравнения, друг на друга, и разрешая полученный результат относительно массы космонавта, придём к окончательному соотношению

$$m = m_0\left[\left(\frac{t_0}{t}\right)^2 - 1\right].$$

---

68 Динамометр состоит из двух цилиндров, соединенных легкой пружиной. Найдите отношение масс этих цилиндров, если при приложенных к ним силам F_1 и F_2 динамометр показывает силу F.

Решение

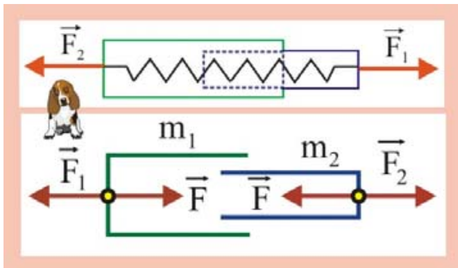


Рис. 68. Динамометр

1. Пружину в динамометре можно рассматривать как связь, которую можно заменить реакциями, приложив к цилиндрам соответствующую силу упругости .

2. Уравнения основного закона динамики в проекции на горизонтальную ось примут вид

$$\left.\begin{aligned} -F_1 + F = m_1 a, \\ F_2 - F = m_2 a \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{m_2}{m_1} = \frac{F_2 - F}{F - F_1}.$$

---

69. Для испытания оборудования в условиях невесомости контейнер подбрасывается вверх пневматическим поршневым устройством, находящимся на дне вакуумированной шахты. Поршень действует на контейнер в течение времени $\Delta t = 0{,}04$с с силой $F = nmg$, где m – масса контейнера с оборудованием, $n = 125$ – постоянный коэффициент. Через какое время контейнер упадет на дно шахты? В течение какого времени длится для оборудования состояние невесомости?

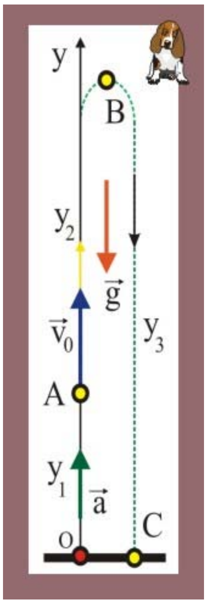


Рис. 69. Контейнер

Решение

1. Движение контейнера можно разделить на три участка: на разгонном участке OA, со стороны поршня действует сила $F = nmg$, которая разгоняет контейнер до скорости v_0; на втором участке AB контейнер движется как тело, брошенное вертикально вверх; на третьем участке, после остановки, контейнер с аппаратурой совершит свободное падение на дно шахты.

2. Запишем для разгонного участка уравнение основного закона динамики, что в сочетании с кинематическими условиями равноускоренного движения позволяет определить величины y_1, t_1 и v_0

$$nmg - mg = ma, \Rightarrow a = g(n-1) \cong 1240 м/с^2 .$$

$$v_0 = a\Delta t = g(n-1)\Delta t \cong 50 м/с;$$

$$y_1 = \frac{a\Delta t^2}{2} = \frac{g(n-1)\Delta t^2}{2} \cong 2м.$$

3. Определим время подъёма контейнера из точки A в точку B и величину y_2

$$t_2 = \frac{v_0}{g} = (n-1)\Delta t \cong 5с ,$$

$$y_2 = v_0 t_2 - \frac{g t_2^2}{2} = g(n-1)^2 \Delta t^2 - \frac{g}{2}(n-1)^2 \Delta t^2 = \frac{g(n-1)^2 \Delta t^2}{2};$$

$$y_2 \cong 123м .$$

4. Таким образом, контейнер остановится, достигнув высоты:

$$y_3 = y_1 + y_2 = \frac{g(n-1)\Delta t^2}{2} + \frac{g(n-1)^2 \Delta t^2}{2},$$

$$y_3 = \frac{g(n-1)\Delta t^2}{2}[1 + (n-1)] = \frac{ng(n-1)\Delta t^2}{2}.$$

5. Время падения контейнера с высоты y_3

$$t_3 = \sqrt{\frac{2y_3}{g}} = \Delta t\sqrt{n(n-1)} \cong 5с .$$

6. Время пребывания контейнера с аппаратурой в «безвоздушном» пространстве

$$t_{пол} = \Delta t + t_2 + t_3 = \Delta t + (n-1)\Delta t + \Delta t\sqrt{n(n-1)} ,$$

$$t_{пол} = \Delta t\left[1 + (n-1) + \sqrt{n(n-1)}\right] = \Delta t\left[n + \sqrt{n(n-1)}\right] \cong 10с .$$

7. Состояние невесомости аппаратура в контейнере будет испытывать в течение времени

$$t_н = t_{пол} - \Delta t \cong 9{,}979 - 0{,}04 = 9{,}939 \cong 10с .$$

---

70. Для подготовки к работе в условиях невесомости одетые в скафандры космонавты тренируются в воде. При этом сила тяжести, действующая на них, уравновешивается выталкивающей силой. В чем отличие такой "невесомости" от настоящей?

Решение

1. Вес тела – это сила, с которой тело давит на опору или растягивает подвес. Таким образом, вес тела приложен к опоре или подвесу со стороны тела и по третьему закону Ньютона численно равен реакции связи со стороны опоры или нити подвеса. Сила тяжести приложена к телу.

2. Если опора или подвес неподвижны относительно планеты либо движутся равномерно и прямолинейно, то вес тела численно равен силе тяжести. Во всех прочих случаях эти силы различны. Так, например, для тела, движущегося в лифте второй закон Ньютона, в общем случае, выглядит так

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N},$$

или в проекции на вертикальную ось

$$-ma = -mg + N$$

откуда $N = m(g - a)$. Очевидно, что если ускорение лифта по модулю будет равно нулю, то $N = 0$. Такая ситуация называется состоянием невесомости. В случае погружения тел в воду, уравнение основного закона динамики примет вид

$$-mg + \rho_ж g V_т = 0,$$

сила Архимеда и сила тяжести приложены к телу, в случае их равенства по модулю наступает состояние безразличного равновесия.

---

71. Найдите ускорение грузов массами m_1 и m_2, а так же силы натяжения невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через идеальный блок.

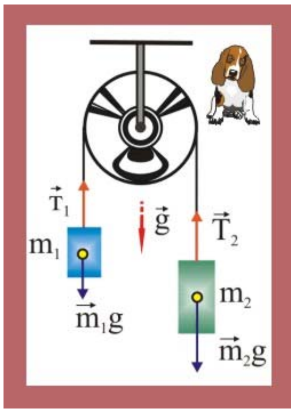


Рис. 71. Грузы на блоке

Решение

1. Поскольку нить нерастяжима и невесома, то её натяжение во всех точках будет одинаковым, т.е. $T_1 = T_2 = T$, кроме того, грузы за одинаковое время проходят одинаковые расстояния

$$y_1 = \frac{a_1 t^2}{2} = y_2 = \frac{a_2 t^2}{2},$$

т.е. движутся с одинаковыми ускорениями $a_1 = a_2$.

2. Второй закон Ньютона для движущихся тел запишется следующим образом

$$\left.\begin{aligned} m_1 g - T = m_1 a, \\ m_2 g - T = m_2 a. \end{aligned}\right\}$$

3. Поделив уравнения системы одно на другое, получим

$$m_1 g - m_1 a = m_2 g - m_2 a, \quad \Rightarrow \quad a = g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}.$$

4. Подставим далее значение ускорения в первое исходное уравнение и разрешим его относительно натяжения T

$$T = g\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

---

72. Некто из моляров – гастарбайтеров, поднимает себя вверх. Он принимается тянуть за веревку так, что сила его давления на пол люльки уменьшилась до 400 Н. Масса люльки 12 кг, масса гуманоида 72 кг. Чему равно ускорение люльки? Чему равна сила натяжения троса, на котором подвешен легкий блок?

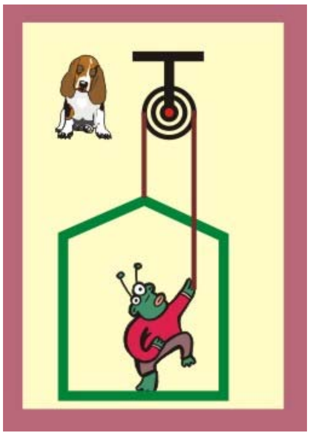


Рис. 72. Натяжение троса

Решение

1. Пусть масса моляра будет m_1, а масса люльки m_2, реакция опорной плоскости N. Уравнения второго закона Ньютона в проекции на вертикальную ось для маляра и люльки примут вид

$$\left.\begin{aligned} m_1 a &= T - m_1 g + N, \\ m_2 a &= T - m_2 g - N \end{aligned}\right\}.$$

2. Ускорение из проще всего найти, вычитая второе уравнение из первого

$$m_1 a - m_2 a = T - m_1 g + N - T + m_2 g + N,$$

$$a(m_1 - m_2) = 2N - (m_1 - m_2)g,$$

$$a = \frac{2N - (m_1 - m_2)g}{(m_1 - m_2)} = 3{,}3\ \text{м/с}^2.$$

3. Натяжение троса, на котором подвешена люлька, определим из системы уравнений

$$T = m_1 (a + g) - N = 560\ \text{Н}.$$

4. Сила натяжения троса, на котором подвешен блок, будет равна удвоенному натяжению T, потому что блок

$$T_0 = 2T = 1120\ \text{Н}.$$

---

73. Система из трех одинаковых шаров, связанных одинаковыми пружинами, подвешена на нити. Нить пережигают. Найдите ускорения шаров сразу после пережигания нити.

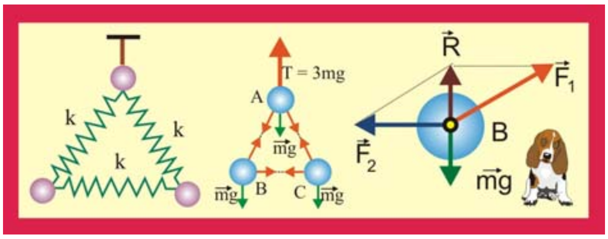


Рис. 73. Система подпружиненных шаров

Решение:

1. Три шара, соединённые пружинами можно рассматривать как материальную систему, в которой силы взаимодействия пружин и тел являются внутренними. Они встречаются попарно, причём равны по модулю и противоположны по направлению, другими словами

$$\sum_{k=1}^{k=6} \vec{F}_k^i = 0, \quad \sum_{k=1}^{k=6} M_0(\vec{F}_k^i) = 0.$$

Уравнения показывают, что внутренние силы не могут изменить движение системы, т.к. их главный вектор и главный момент равны нулю. При внезапном обрыве нити под действием внешних сил окажется только верхний шар.

2. Внешней, в данном случае является только сила натяжения нити подвеса T = 3mg, приложенная к шару A. Запишем для него уравнение второго закона ньютона

$$T = ma_A, \quad 3mg = ma_A, \quad \Rightarrow \quad a_A = 3g.$$

3. Два остальных шара в первый момент после обрыва нити окажутся под действием системы сил, равнодействующая которых равна нулю. Рассмотрим шар B, силы реакции связи со стороны пружин $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ при их геометрическом суммировании дадут силу $\vec{R}$, которая по модулю будет равна $m\vec{g}$ и противоположна по направлению, другими словами

$$\sum_{k=1}^{k=3}\vec{F}_{Bk}=0,\quad\Rightarrow\quad a_B=0\,.$$

Аналогичные рассуждения можно провести и для шара C – a_C = 0.

---

74. Тела массы m_1 и m_2 соединены пружиной жесткости k. На тело массы m_2 действует постоянная сила F, направленная вдоль пружины к телу массы m_1. Найдите, на сколько сжата пружина, если никаких других внешних сил нет, а колебания уже прекратились. Каким будет ускорение тел сразу же после прекращения действия силы F?

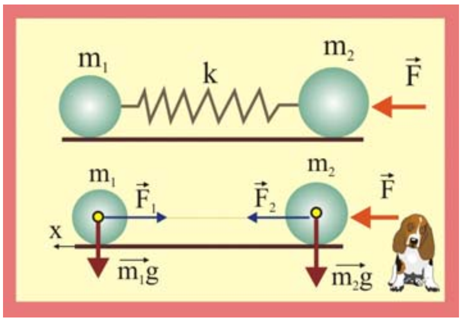


Рис. 74. Ускорение тел

Решение

1. Пружина в данной задаче является связью, которую можно заменить соответствующими реакциями связи F_1 и F_2, причём, эти силы, вызванные упругостью пружины, будут равны по модулю и противоположны по направлению.

2. Рассматривая далее тела как свободные, можно записать следующие уравнения

$$\left.\begin{aligned}-k\Delta x&=m_1a,\\ k\Delta x+F&=m_2a\end{aligned}\right\},\quad\Rightarrow\quad \Delta x=\frac{Fm_1}{k(m_1+m_2)}\,.$$

3. Для тел в отсутствии силы F уравнения второго закона Ньютона примут вид

$$-k\Delta x=m_1a_1,\quad a_1=-F/(m_1+m_2),$$
$$k\Delta x=m_2a_2,\quad a_2=Fm_1/m_2(m_1+m_2).$$

---

75. Тело массы m соединено двумя пружинами жесткости k_1 и k_2 с неподвижными стенками, пружины первоначально не деформированы. При возникших колебаниях наибольшее ускорение тела равно a. Найдите максимальное отклонение тела от положения равновесия и максимальные силы, с которыми пружины действуют на стенки.

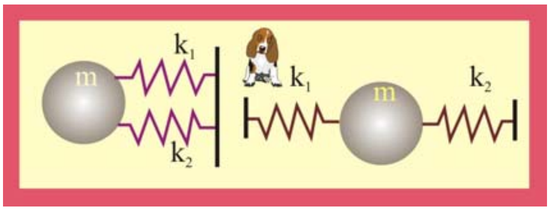


Рис. 75. Параллельное соединение

Решение

1. Пружины в данной задаче соединены параллельно, их деформация одинакова

$$\Delta x_1=\Delta x_2=\Delta x\,.$$

2. Сила, действующая на массу со стороны пружин, определится в виде суммы

$$F=F_1+F_2,\quad\text{или}\quad k_0\Delta x=k_1\Delta x+k_2\Delta x\,,$$

3. Запишем уравнение движения массы под действием эквивалентной пружины жёсткостью k_o, что позволит определить максимальное смещение

$$ma=(k_1+k_2)\Delta x_{max},\quad\Rightarrow\quad \Delta x_{max}=ma/(k_1+k_2).$$

4. Максимальные значения сил, действующих на массу

$$F_{1max}=k_1\Delta x_{max},\quad F_{2max}=k_2\Delta x_{max}\,.$$

---

76. Тело массы m прикреплено к двум соединенным последовательно пружинам жесткости k_1 и k_2. К свободному концу цепочки пружин приложена постоянная сила F. Каково суммарное удлинение пружин, если колебания уже прекратились?

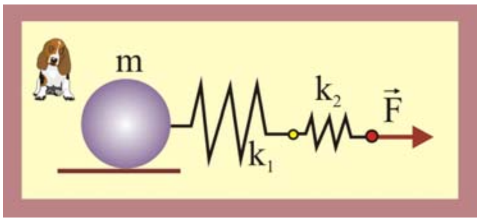


Рис.76. Последовательное соединение

Решение

1. При последовательном соединении пружин их деформация будет разной при одинаковой действующей силе, это обстоятельство позволяет определить общую жёсткость пружин следующим образом

$$\Delta x_o = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = \frac{F}{k_o}, \quad \Rightarrow \quad k_o = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$

2. Совместное действие на массу пружин при покоящейся массе будет равно приложенной силе F

$$k_o \Delta x_o = F, \quad \Rightarrow \quad \Delta x_0 = \frac{F(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}.$$

---

77. Легкий магнит с крюком на стальной вертикальной плите остается неподвижным, пока подвешенный к нему груз не превосходит по массе m_0. Чему равна магнитная сила, если коэффициент трения магнита по стали равен μ. С каким ускорением скользит магнитная подвеска, если масса груза $m > m_0$?

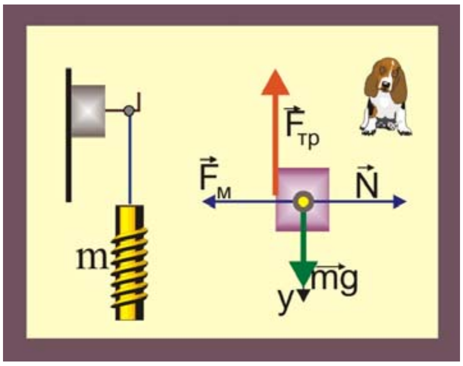


Рис. 77. Магнитная сила

Решение

1. Тело можно рассматривать как свободное, если связи заменить их реакциями. Сила трения в данном случае вызывается действием магнитной силы, т.е.

$$F_{тр} = \mu F_м.$$

2. Условие равновесия массы в этом случае будет иметь место при равенстве модулей силы тяжести и силы трения

$$m_0 g = \mu F_м, \quad \Rightarrow \quad F_м = g m_0 / \mu.$$

3. Когда тело станет двигаться при $m > m_0$, то станет справедливо уравнение второго закона Ньютона, которое в проекции на ось y запишется следующим образом

$$mg - m_0 g = ma, \quad \Rightarrow \quad a = g\frac{m - m_0}{m}. \qquad (3)$$

---

78. Тело, находящееся на горизонтальной плоскости, тянут за нить, в горизонтальном направлении. Нарисуйте график зависимости силы трения, действующей на тело со стороны плоскости, от силы натяжения нити. Первоначально тело неподвижно. Масса тела 10 кг, коэффициент трения 0,51.

Решение

1. Если к телу прикладывают горизонтальную силу, а они вопреки стараниям не движется, то естественно предположить, что этому, что – то препятству-

ет. И этим «что-то» является сила трения покоя, равная по величине прикладываемой силе. Величина силы трения покоя может меняться в зависимости от величины приложенной силы. Наибольшее значение силы трения, при котором ещё не наступает скольжение, определится как:

$$F_{тр(max)} = \mu N = \mu mg = 51H\,.$$

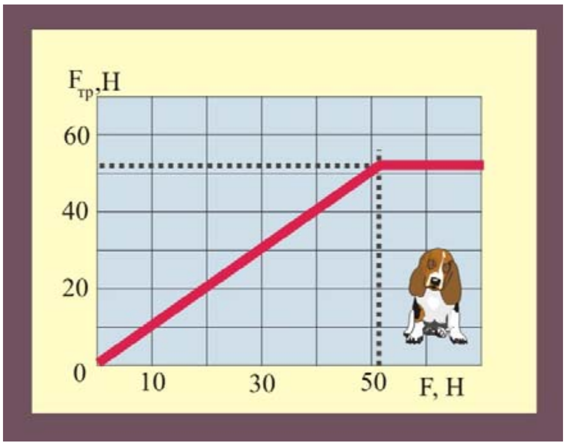


Рис. 78. Сила трения

2. Сила трения покоя, как и всякая приличная сила, имеет направление, она направлена в сторону возможного (виртуального) перемещения, причём при нулевой внешней силе, сила трения тоже будет равна нулю. Таким образом, сила трения покоя линейно меняется от нуля до максимального значения, оставаясь далее постоянной. Внешняя сила начинает сообщать телу ускорение.

79. Если нажимать пальцем на шариковую ручку, опирающуюся на твердую поверхность, одновременно наклоняя ее, то, пока ручка образует малый угол с перпендикуляром к поверхности, она будет послушно следовать за пальцем руки. Как только угол наклона ручки превысит некоторое максимальное значение α_{max}, она выскользнет из-под пальца, как бы сильно или слабо ни нажимать на нее. Почему? Проведите эксперимент со своей ручкой и оцените коэффициент трения между шариком ручки и поверхностью, на которую она опирается.

Решение

1. Для анализа условий равновесия шариковой ручки рассмотрим шарик, к которому приложены все действующие силы и реакции связи. Будем полагать далее, что F >> mg, это позволит силу тяжести в дальнейших расчётах не учитывать. Сила трения в данном случае определится как:

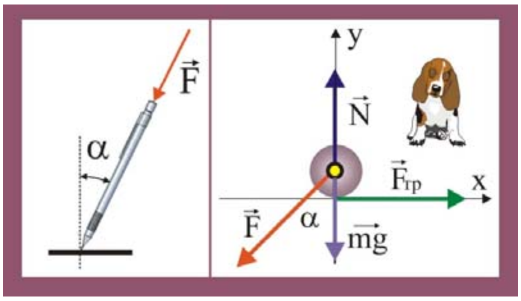


Рис. 79. Устойчивость шариковой ручки

$$F_{тр} = \mu mg + \mu F\cos\alpha, \text{ или } F_{тр} \cong \mu F\cos\alpha\,.$$

2. Условие равновесия, в проекции на горизонтальную ось, примет вид:

$$\mu F\cos\alpha \ge F\sin\alpha, \quad \Rightarrow \quad \mu = tg\alpha_{max}$$

3. Как видно из уравнения, скольжение шарика по бумаге, зависит от угла наклона ручки и коэффициента трения. Если лист бумаги положить на ровную горизонтальную поверхность, то скольжение начинается при $\alpha \cong 20^0$, коэффициент трения при этом равен $\mu \cong 0{,}36$.

80. На горизонтальной доске лежит брусок массы т. Доску медленно наклоняют. Определите зависимость силы трения, действующей на брусок, от угла наклона доски α. Коэффициент трения равен k.

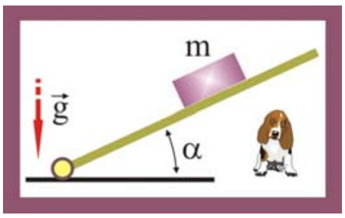


Рис. 80.1. Наклонная доска

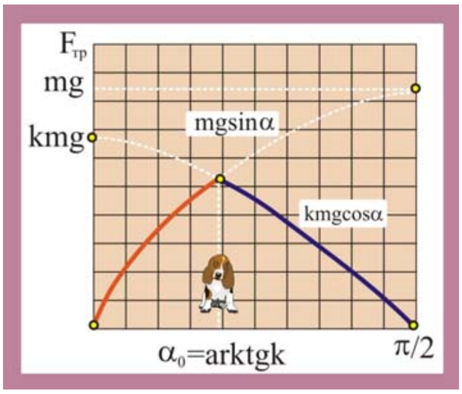


Рис. 80.2. Зависимость силы трения от угла наклона доски к горизонту

Решение

1. Сила трения по модулю не может превышать значения $F_{тр(max)} = kN$, где N – сумма проекций всех сил на направление перпендикулярное возможному перемещению. При равновесии же тела сила трения равна сумме проекций сил на направление движения. Таким образом, в состоянии покоя

$$F_{тр} = mg\sin\alpha\,.$$

2. В противном случае, при $k \ge tg\alpha$

$$F_{тр} = kmg\cos\alpha\,.$$

3. Максимальное значение силы трения будет иметь место при угле α_0

$$\alpha_0 = arctgk\,.$$

---

81. Ленточный подъемник образует угол α с горизонтом. С каким максимальным ускорением может подниматься ящик на таком подъемнике, если коэффициент трения равен μ? Лента не прогибается.

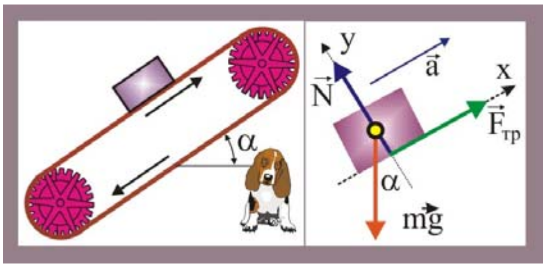


Рис. 81. Ящик на подъёмнике

Решение

1. Отбросив наложенные на ящик связи и заменив их реакциями, можно рассматривать его как свободное тело, способное перемещаться вдоль оси OX. Сила трения в данном случае направлена в сторону ускорения, т.е. против возможного перемещения ящика.

2. Уравнение второго закона Ньютона позволяет определить максимальное значение ускорения

$$\mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha \le ma,$$

$$a \le g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha).$$

---

82. Через какое время скорость тела, которому сообщили вверх по наклонной плоскости скорость v_0, снова будет равна $\mathbf{v_0}$? Коэффициент трения μ, угол между плоскостью и горизонтом α, tgα > μ.

Решение

1. Уравнение второго закона Ньютона при движении тела вверх:

$$\mu mg\cos\alpha + mg\sin\alpha = ma, \quad \Rightarrow \quad a = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

2. Время движения тела вверх t_1 определится из условия равенства нулю скорости в конце подъёма:

$$v = v_0 - at, \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{v_0}{a} = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}.$$

3. Движению тела вниз соответствует уравнение вида:

$$mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma, \quad \Rightarrow \quad a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

4. Скорость станет равной v_0 только в конце спуска, потому как закона сохранения энергии никто не отменял, поэтому

$$\frac{dv}{dt} = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha), \quad \int_0^{v_0} dv = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\int_0^{t_2} dt,$$

$$t_2 = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}.$$

5. Искомое время определится в виде суммы $t = t_1 + t_2$

$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g(\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha)}.$$

---

83. На тело массы m, лежащее на горизонтальной плоскости, действует сила F под углом α к горизонту. Коэффициент трения μ. Найдите ускорение тела, если оно не отрывается от плоскости.

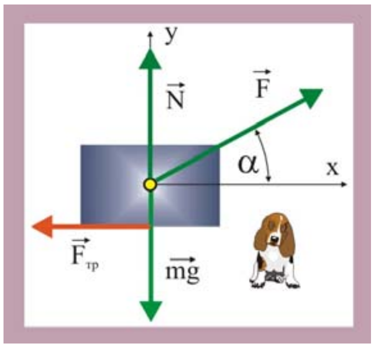


Рис. 83. Ускорение тела

Решение

1. Нормальная реакция связи в данном случае будет определяться как силой тяжести $m\vec{g}$, так и проекцией на ось OY приложенной силы:

$$N = mg - F\sin\alpha.$$

Сила трения определится как:

$$F_{тр} = \mu(mg - F\sin\alpha).$$

2. Основной закон динамики, таким образом, запишется следующим образом:

$$F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha) = ma.$$

3. Из уравнения второго закона Ньютона легко определить искомое ускорение

$$a = \frac{1}{m}(F\cos\alpha - \mu mg + F\sin\alpha),$$

$$a = \frac{F}{m}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu g.$$

---

84. Цилиндр скользит по желобу, имеющему вид двугранного угла с раствором α. Ребро двугранного угла наклонено под углом β к горизонту. Плоскости двугранного угла образуют одинаковые углы с горизонтом. Определите ускорение цилиндра. Коэффициент трения между цилиндром и поверхностью желоба μ.

Решение

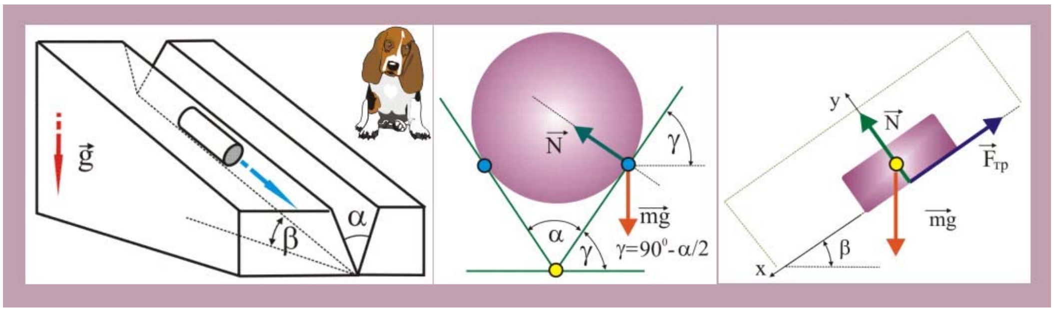


Рис. 84. Скольжение цилиндра по жёлобу

1. Определим нормальную реакцию связи цилиндра на ось, совпадающую с направлением движения. При вычислении N необходимо для каждой линии касания цилиндра и угла брать половинное значение массы

$$N_1 = \frac{m}{2} g\cos\gamma = \frac{m}{2} g\sin\frac{\alpha}{2},$$

а затем эти величины сложить, т.е.

$$N = N_1 + N_2 = mg\sin\frac{\alpha}{2}.$$

2. Определим силу трения, возникающую при скольжении цилиндра по жёлобу

$$F_{тр} = \mu mg\sin\frac{\alpha}{2}\cos\beta.$$

3. Проекция силы тяжести на направление движения (ось OX)

$$(mg)_x = mg\sin\frac{\alpha}{2}\mathrm{sim}\beta. \qquad (4)$$

4. Уравнение второго закона Ньютона в проекции на направление перемещения цилиндра примет вид

$$mg\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta - \mu mg\sin\frac{\alpha}{2}\cos\beta = ma,$$

откуда

$$a = g\left(\sin\beta - \frac{\mu\cos\beta}{\sin(\alpha/2)}\right).$$

---

85. Ящик массой m тянут за верёвку, составляющую некоторый угол ζ с горизонтом. Коэффициент трения ящика с горизонтальной плоскостью равен μ. При какой наименьшей силе натяжения верёвки ящик сдвинется с места? Под каким углом ζ должна быть направлена при этом верёвка? α

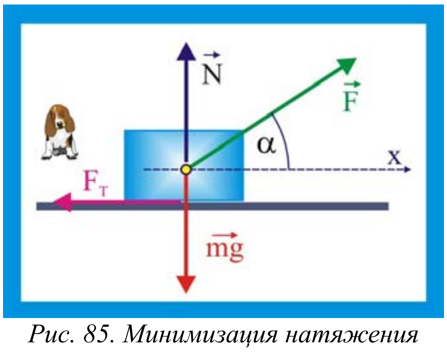


Рис. 85. Минимизация натяжения

Решение

1. Ящик сдвинется с места при условии

$$F\cos\alpha \ge F_T,$$

где F_T – сила трения, определяемая в данном случае уравнением:

$$F_T = \mu(mg - F\sin\alpha);$$

2. Перепишем первое уравнение и решим его относительно F

$$F\cos\alpha \ge \mu mg - \mu F\sin\alpha;$$

$$F \ge \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha};$$

3. При заданных величинах m и μ натяжение будет зависеть только от угла наклона верёвки к опорной плоскости, т.е. от экстремального значения функции $f(\alpha) = \cos\alpha + \mu\sin\alpha$. Найдём $f(\alpha)_{max}$

$$f'(\alpha) = 0; \quad -\sin\alpha + \mu\cos\alpha = 0; \quad \mathrm{tg}\alpha = \mu; \quad \alpha = \mathrm{arctg}\mu;$$

---

86. По деревянным сходням, образующим угол α с горизонтом, втаскивают за привязанную к нему верёвку ящик. Коэффициент трения ящика о сходни μ. Под каким углом к горизонту следует тянуть верёвку, чтобы с наименьшим усилием втащить ящик?

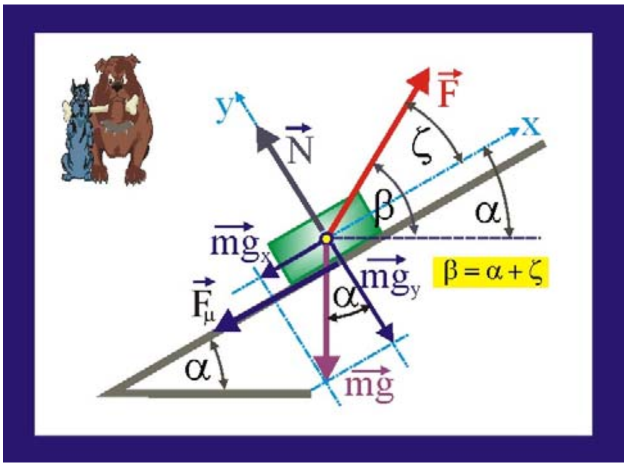


Рис. 86. Тело на наклонной плоскости

Решение

1. Минимальное значение силы $\vec{F}$, будет иметь место при движении ящика по наклонной плоскости с постоянной скоростью, т.е. $\vec{a} = 0$.

2. По условию задачи необходимо определить оптимальное значение угла β, который удобно представить в виде суммы:

$$\beta = \alpha + \zeta,$$

и искать оптимальное значение угла ζ.

3. Сила трения определится как:

$$F_\mu = \mu(mg\cos\alpha - F\sin\zeta);$$

4. Второй закон Ньютона в проекции на направление перемещения ящика:

$$F\cos\zeta - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha + \mu F\sin\zeta = 0;$$

$$F\cos\zeta + \mu F\sin\zeta = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha;$$

5. Выразим из последнего уравнения силу F

$$F = \frac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\zeta + \mu\sin\zeta},$$

числитель уравнения от угла ζ не зависит, поэтому минимальное значение силы будет наблюдаться при максимальном значении знаменателя.

6. Исследуем функцию

$$f(\zeta) = \cos\zeta + \mu\sin\zeta$$

на экстремум, т.е. найдём производную функции и приравняем её к нулю

$$f'(\zeta) = -\sin\zeta + \mu\cos\zeta = 0; \quad \Rightarrow \quad \mu\cos\zeta = \sin\zeta; \quad \mathrm{tg}\zeta = \mu; \quad \zeta = \mathrm{arctg}\mu;$$

7. Оптимальное значение угла β, при котором значение F минимально:

$$\beta = \alpha + \mathrm{arctg}\mu;$$

---

87. Нить, перекинутая через блок с неподвижной осью, пропущена через щель. На концах нити подвешены грузы, масса которых m_1 и m_2. Определите ускорения грузов и натяжение нити, если при движении нити на нее со стороны щели действует постоянная сила трения F_t.

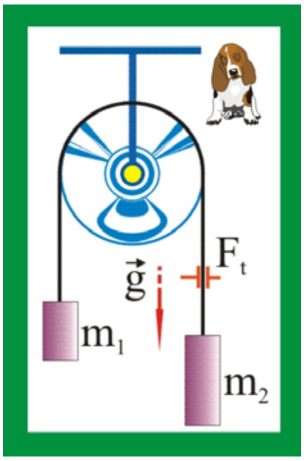


Рис. 87. Грузы на блоке

Решение

1. Ввиду невесомости и не растяжимости нити, а так же, идеальных свойств блока (отсутствие потерь и малый вес) задачу можно решать в следующем приближении)

$$a_1 = a_2 = a, \quad T_1 = T_2 = T.$$

2. Уравнения движения грузов в проекции на вертикальную ось в данном случае записываются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} m_1 a &= m_1 g - T, \\ m_2 a &= T - m_{2g} - F_{тр}. \end{aligned}\right\}.$$

3. Совместное решение системы уравнений даёт следующую величину ускорения

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g - F_{тр}}{m_1 + m_2}.$$

4. Подстановка в первое уравнение системы величины ускорения позволяет определить натяжение нити

$$T = m_1 \frac{2m_2 g + F_{тр}}{m_1 + m_2}.$$

---

88. На обледеневшем участке шоссе коэффициент трения между колесами и дорогой в десять раз меньше, чем на сухом асфальте. Во сколько раз нужно уменьшить скорость автомобиля, чтобы тормозной путь на обледеневшем участке шоссе остался прежним?

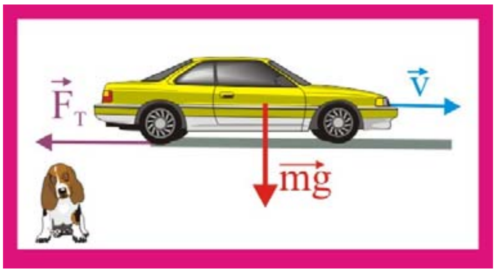


Рис. 88. Тормозной путь автомобиля

Решение

1. Внешней силой при движении автомобиля является сила трения, поэтому без учёта сопротивления со стороны воздуха, динамическое уравнение движения имеет вид

$$\mu mg = ma, \quad \Rightarrow \quad a = \mu g.$$

2. Кинематические уравнения движения:

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 - at, \\ x &= v_0 t - \frac{at^2}{2}. \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_0}{a} = \frac{v_0}{\mu g}.$$

3. Тормозной путь автомобиля

$$x = \frac{v_0^2}{\mu g} - \frac{v_0^2}{2\mu g} = \frac{v_0^2}{2\mu g},$$

откуда

$$v_0 = \sqrt{2\mu g x},$$

4. Очевидно, что при неизменности x и уменьшении μ в десять раз, скорость необходимо уменьшить в $\sqrt{10}$ раз, т.е.

$$v_1 = v_0 / \sqrt{10} \cong v_0 / 3{,}16 \cong 0{,}316 v_0.$$

---

89. Автомобиль с мощным двигателем, трогаясь с места, за 5с набирает скорость 72 км/ч. Найдите коэффициент трения между колесами и дорогой. Каков наименьший тормозной путь автомобиля, набравшего эту скорость?

Решение

1. Среднее ускорение и время движения автомобиля с учётом нулевого значения конечной скорости:

$$< a >= -\frac{v_0}{\Delta t} = -4\frac{м}{с}, \qquad \Delta t = \frac{v_0}{< a >}.$$

2. Кинематическое уравнение движения позволяет определить тормозной путь

$$x = v_0\Delta t - \frac{a\Delta t^2}{2} = \frac{v_0^2}{2a} = 50м.$$

3. Коэффициент трения колёс о дорогу

$$a = \mu g, \quad \Rightarrow \quad \mu = 0{,}4$$

---

90. Тело массы m_1 лежит на доске массы m_2, находящейся на гладкой горизонтальной плоскости. Коэффициент трения между телом и доской равен μ.

Какую силу нужно приложить к доске, чтобы тело соскользнуло с неё? За какое время тело соскользнёт, если к доске приложена сила F_0, а длина доски равна L.

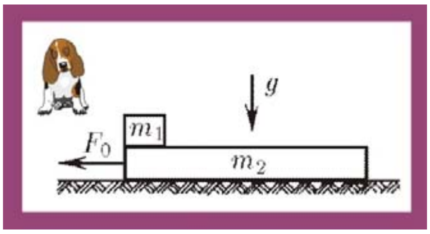


Рис. 90. Тело на доске

Решение

1. Чтобы тело начало скольжение прикладываемая сила должна превосходить силу трения. При определении величины силы трения необходимо учесть, что в соответствие с третьим законом Ньютона тело действует на доску, а доска на тело, поэтому будет проявляться двойная сила трения

$$F_T = \mu m_1 g + \mu m_2 g = \mu g(m_1 + m_2);$$

2. Условие начала движения:

$$F > \mu g(m_1 + m_2);$$

3. Для определения времени соскальзывания воспользуемся кинематическими уравнениями:

$$L = \frac{at^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2L}{a}};$$

4. Ускорение *a* при действии вдоль доски постоянной силы F_0 определим из уравнения второго закона Ньютона в проекции на направление движения

$$F_0 - F_T = m_2 a; \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F_0 - \mu g(m_1 + m_2)}{m_2};$$

5. Время соскальзывания:

$$t = \sqrt{\frac{2Lm_2}{F_0 - \mu g(m_1 + m_2)}};$$

---

91. Определить силу, действующую на вертикальную стенку со стороны клина, если на него положить груз массы m. Угол при основании клина α. Коэффициент трения между грузом и поверхностью клина μ. Трения между полом и клином нет.

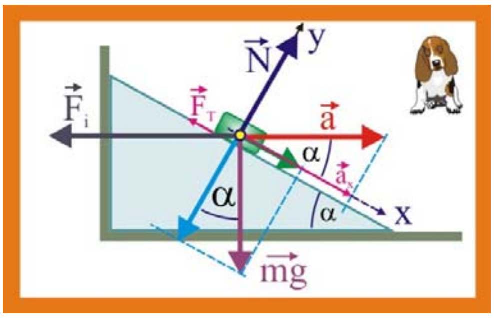


Рис. 91. Тело на клине

Решение

1. Возникновение действия на клин со стороны мела обусловлено ускорен-

ным движением тела по клину.

2. Движение становится возможным при условии

$$mg\sin\alpha \ge \mu mg\cos\alpha; \quad \Rightarrow \quad \mu \le tg\alpha,$$

в противном случае тело будет покоиться, и ускорение не возникнет.

3. Используя принципы освобождаемости, представим тело как свободную материальную частицу, находящуюся под действием системы сил $\{m\vec{g}; \vec{F}_T;\}$. Уравнение второго закона Ньютона в проекции на направление движения тела представится следующим образом:

$$mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma_x; \quad a_x = ag\cos\alpha(\sin\alpha - \mu\cos\alpha);$$

4. Сила, действующая на клин и вертикальную стенку

$$F_i = mg\cos\alpha(\sin\alpha - \mu\cos\alpha);$$

---

92. Тело массы m, расположенное на гладкой горизонтальной плоскости. Начинает движение под действием силы, изменяющейся во времени F = kt, где k – постоянная величина. Направление силы составляет угол α с горизонтом. Определите скорость тела в момент его отрыва от плоскости.

Решение

1 Тело оторвётся от плоскости в момент, когда проекция действующей силы на направление нормали станет равной силе тяжести, т.е.

$$kt\sin\alpha \ge mg,$$

откуда время от начала движения до отрыва определится как

$$t_o = \frac{mg}{k\sin\alpha}.$$

2 Уравнение второго закона Ньютона в проекции на горизонтальную ось можно записать в виде:

$$kt\cos\alpha = m\frac{dv}{dt},$$

в этом дифференциальном уравнении переменные делятся, что позволяет достаточно просто его проинтегрировать

$$\int_0^{v_0} dv = \frac{k\cos\alpha}{m}\int_0^{t_0} tdt,$$

или, после интегрирования и подстановки значения t_0, для скорости получим:

$$v = \frac{g^2\cos\alpha}{2k\sin^2\alpha}.$$

3 Перемещение до момента отрыва найдём путём интегрирования уравнения скорости

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{k\cos\alpha}{2m}t^2. \qquad \int_0^{t_0} dx = \frac{k\cos\alpha}{2m}\int_0^{t_0} t^2 dt,$$

$$x = \frac{m^2g^3}{6k^2\sin^3\alpha}.$$

---

93. Масса воздушного шара вместе с канатом, волочащимся по земле, равна m; выталкивающая сила, действующая на шар, равна F; коэффициент трения каната о землю равен μ. Сила сопротивления воздуха, действующая на шар, пропорциональна квадрату скорости шара относительно воздуха: $f = kv^2$. Найдите скорость шара относительно земли, если дует горизонтальный ветер со скоростью u.

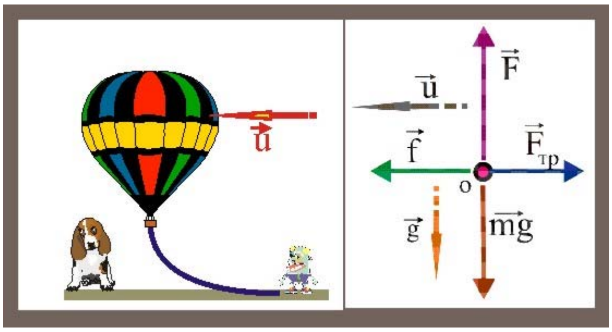


Рис. 93. Шар на ветру

Решение

1. Отбрасывая наложенные связи и заменяя их реакциями, будем рассматривать шар в виде свободной материальной точки. Нормальная реакция связи в этом случае определится как:

$$N = mg - F.$$

сила трения каната о поверхность земли будет равна

$$F_{тр} = \mu(mg - F).$$

2. Поскольку шар движется равномерно, то сумма проекций сил на направление перемещения должна быть равной нулю

$$\sum_{i=1}^{i=n} F_{ix} = 0, \quad \mu(mg - F) = \alpha v^2,$$

откуда, относительная скорость шара v_r (относительно воздуха)

$$v_r = \sqrt{\mu/\alpha(mg - F)}.$$

3. Абсолютная скорость (относительно земли) запишется в виде разности

$$v = u - \sqrt{\mu/\alpha(mg - F)}.$$

---

94. Скорость тела массы m в вязкой жидкости убывает с пройденным расстоянием x по закону $v = v_0 - \beta x$, где v_0 – начальная скорость, β - постоянный коэффициент. Как зависит, действующая на тело, сила сопротивления со стороны жидкости от скорости?

Решение

1. Уравнение второго закона Ньютона на направление движения:

$$ma = F_c, \quad \frac{dv_x}{dt} = \frac{F_c}{m}.$$

2. Производная скорости по времени

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(v_0 - \beta x) = \frac{dv_0}{dt} - \beta\frac{dx}{dt} = -\beta v,$$

знак минус показывает, что вектор ускорения направлен в сторону, противоположную вектору скорости.

3. Объединяя уравнения, получим значение силы сопротивления в функции скорости

$$\left|\vec{F}_c\right| = \beta m v.$$

---

95. Сила сопротивления воздуха, действующая на капли дождя, приближённо определяется уравнением: $f = C\rho_0 r^2 v^2$, где $\rho_0 \cong 1{,}3кг/м^3$ – плотность воздуха при нормальных условиях, r – радиус капли. Безразмерный коэффициент

сопротивления C для крупных капель равен примерно C ≅ 1. Какие капли, крупные или мелкие достигают земли с большей скоростью? Оцените скорость падения капли радиусом r с большой высоты.

Решение

1. Падение капель с большой высоты будет характеризоваться двумя участками: участком разгона, когда сила тяжести превосходит силу сопротивления

$$mg > C\rho_0 r^2 v^2,$$

и участком равномерного прямолинейного движения при:

$$mg \cong C\rho_0 r^2 v^2.$$

2. Выразим массу капли через её радиус и плотность воды ρ

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = C\rho_0 r^2 v^2,$$

откуда искомая скорость определится в виде зависимости

$$v = \sqrt{\frac{4\pi\rho r g}{C\rho_0}}.$$

3. Скорость капли на участке установившегося движения, таким образом, пропорциональна корню квадратному из её радиуса $v \sim \sqrt{r}$, другими словами, крупные капли, путешествующие с большой высоты, будут достигать земной поверхности с большей скорости.

4. Скорость капли $r_1 = 1\cdot 10^{-3}$ м составит всего $v_1 \cong 5{,}7$м/с ≅ 20км/час.

---

96. Сила сопротивления воздуха, действующая на капли тумана пропорциональна произведению радиуса на скорость:

$$f = \gamma r v.$$

Капли радиусом r = 0,1мм, падая с большой высоты, у земли имеют скорость около 1 м/с. Какую скорость будут иметь капли тумана, радиус которых в два раза меньше? В десять раз меньше?

Решение

1. Движение капли происходит в данном случае с постоянной скоростью, т.е. без ускорения, основной закон динамики для капли примет вид

$$\gamma r v = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g, \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{4\pi r_1^2 \rho g}{3\gamma}.$$

2. Так как скорость капли пропорциональна квадрату радиуса, то величины искомых скоростей можно представить следующим образом

$$v_2 = (0{,}5)^2 v_1 = 0{,}25 \text{ м/с},$$

$$v_3 = (0{,}1)^2 v_1 = 0{,}01 \text{ м/с}.$$

---

97. Воздушный шар массой m = 250 кг начал опускаться с ускорением a = 0,2 м/с^2. Определить массу балласта, который нужно сбросить с борта шара, чтобы аэростат начал подниматься вверх с таким же ускорением вверх.

Решение

1. Обозначим искомую массу балласта через Δm и запишем уравнения основного закона динамики для случая спуска и подъёма шара

$$mg - F_A = ma,$$
$$F_A - (m - \Delta m)g = (m - \Delta m)a .$$

2. Из первого уравнения выразим силу Архимеда и подставим её значение во второе уравнение

$$F_A = m(g - a), \quad m(g-a) - (m - \Delta m)g = (m - \Delta m)a ,$$

откуда

$$\Delta m = \frac{2ma}{g + a} .$$

---

98. Лента горизонтального транспортёра движется со скоростью u. На ленту по касательной влетает шайба, начальная скорость которой v перпендикулярна краю ленты. Определить максимальную ширину ленты, при которой шайба достигнет другого её края, если коэффициент трения между шайбой и лентой равен μ.

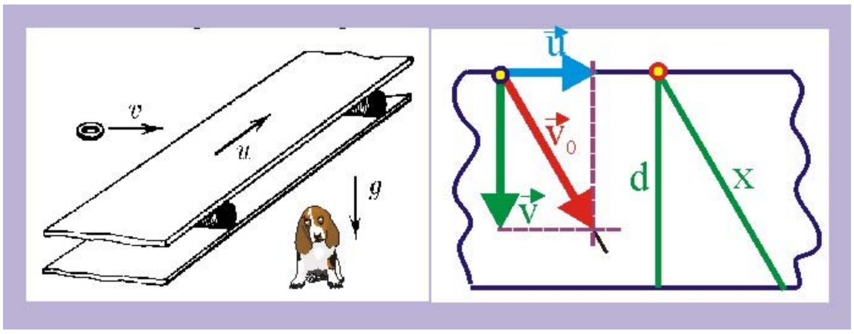


Рис. 98. Шайба на движущейся ленте транспортёра

Решение

1. Ускорение шайбы определится уравнением второго закона Ньютона:

$$\mu mg = ma; \quad \Rightarrow \quad a = \mu g;$$

2. При ширине ленты транспортёра d шайба ввиду движения ленты пройдёт равнозамедленно расстояние x. Из подобия прямоугольных треугольников, полученных на векторах заданных скоростей и геометрических параметрах движения шайбы очевидно соотношение:

$$\frac{d}{x} = \frac{v}{v_0}; \quad \frac{d}{x} = \frac{v}{\sqrt{v^2 + u^2}}; \quad d = \frac{xv}{\sqrt{v^2 + u^2}};$$

3. Расстояние, проходимое шайбой x найдём из кинематических соображений:

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 - at; \\ x &= v_0 t - \frac{at^2}{2}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} &v = 0; \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_0}{a} = \frac{\sqrt{v^2 + u^2}}{\mu g}; \\ &x = \frac{v^2 + u^2}{\mu g} - \frac{v^2 + u^2}{2\mu g} = \frac{v^2 + x^2}{2\mu g}; \end{aligned}\right\}$$

4. Подставим далее значение x в уравнение для d:

$$d = v\frac{(v^2 + u^2)}{2\mu g\sqrt{v^2 + u^2}} = v\frac{\sqrt{v^2 + u^2}}{2\mu g};$$

---

99. Какая шайба, вращающаяся вокруг своей оси симметрии или не вращающаяся, пройдёт больший путь до остановки на шероховатой горизонтальной поверхности? начальная скорость центра масс шайб одинакова.

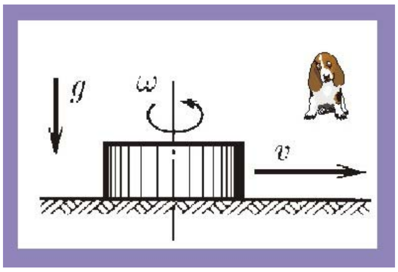


Рис. 99. Вращающаяся шайба

Решение

1. Поступательно движущаяся шайба обладает только кинетической энергией поступательного движения

$$K_1 = \frac{mv^2}{2} = 0{,}5mv^2,$$

плоское движение шайбы, представляющее собой симбиоз поступательного и вращательного движений, характеризуется двумя составляющими кинетической энергии: поступательной и вращательной

$$K_2 = \frac{mv^2}{2} + J_Z\frac{\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mr^2}{2}\frac{\omega^2}{2} = \frac{m}{2}\left(v^2 + \frac{r^2\omega^2}{2}\right) = \frac{3}{4}mv^2 = 0{,}75mv^2;$$

$$K_2 > K_1.$$

2. Начальная кинетическая энергия шайб в обоих случаях будет расходоваться на работу против силы трения

$$A(F_T) \approx \mu mg\Delta x\ .$$

3. В соответствии с теоремой об изменении кинетической энергии:

$$K_{Нач} - K_{Кон} = A(F_T); \quad \Delta K_1 \approx \mu mg\Delta x;$$

$$\Delta x_1 \approx \frac{0{,}5v^2}{\mu g}; \quad \Delta x_2 \approx \frac{0{,}75v^2}{\mu g}; \quad \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = 1{,}5.$$

---

100. По наклонной плоскости скользят два тела одинаковой массы, связанные невесомой нерастяжимой нитью. Сила натяжения нити T. Трения между одним телом и плоскостью нет. Определить силу трения между плоскостью и вторым телом.

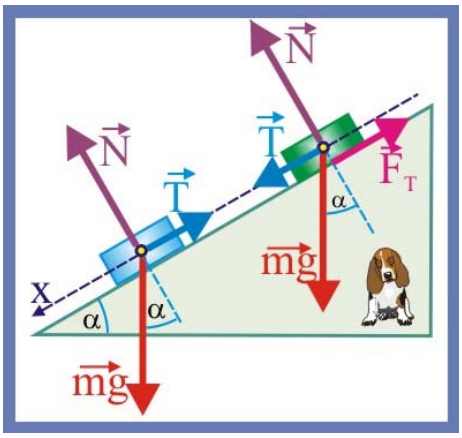


Рис. 100. Связанные тела

Решение

1. Поскольку тела одинаковой массы движутся вниз по плоскости при натянутой нити, то шероховатой поверхностью будет обладать верхнее тело. Тела при натянутой нити будут иметь одинаковые ускорения.

2. Запишем уравнения второго закона Ньютона в проекции на направление движения для каждого тела в отдельности:

$$\left.\begin{aligned} m_1 g\sin\alpha - T = m_1 a_1; \\ m_2 g\sin\alpha + T - F_T = m_2 a_2; \end{aligned}\right\}$$

$$a_1 = a_2; \quad m_1 = m_2; \quad \Rightarrow \quad mg\sin\alpha - T = mg\sin\alpha + T - F_T;$$

$$F_T = 2T;$$

---

101. В установке, показанной на рис. 101 массы тел m_0, m_1, и m_2 известны. Массы блока и нитей пренебрежительно малы, а трение в блоке отсутствует. Найти ускорение a, с которым опускается масса m_0, и силу натяжения нити между телами $m_1 - m_2$, если коэффициент трения между этими телами и поверхностью равен μ.

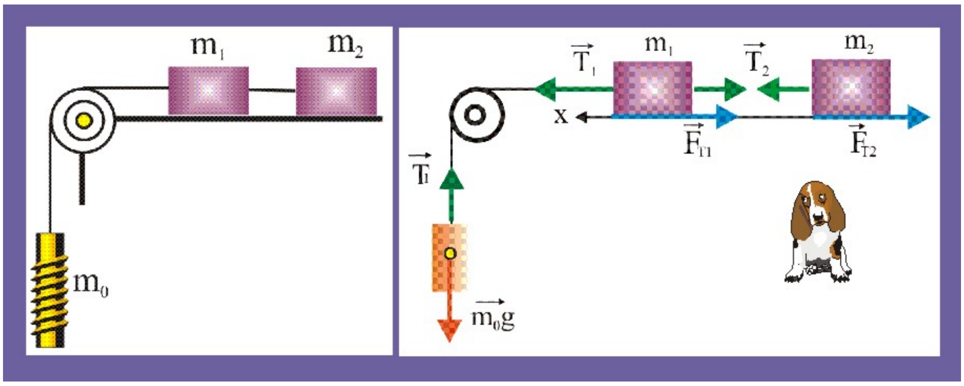


Рис. 101. Система трёх тел и идеальный блок

Решение

1. С учётом не растяжимости нити и идеальности блока уравнение второго закона Ньютона для трёх, движущихся с одинаковым ускорением масс, запишутся следующим образом

$$m_0 g - T_1 = m_0 a \qquad (1)$$

$$T_1 - T_2 - \mu m_1 g = m_1 a \qquad (2)$$

$$T_2 - \mu\ m_2 g = m_2 a\ . \qquad (3)$$

2. Выразим из первого уравнения T_1, а из третьего уравнения T_2 и подставим эти значения во второе уравнение

$$T_1 = m_0 g - m_0 a, \qquad T_2 = m_2 a + \mu m_2 g. \qquad (4)$$

$$m_0 g - m_0 a - m_2 a - \mu m_2 g - \mu m_1 g = m_1 a\ . \qquad (5)$$

3. Из уравнения (5) ускорение определится как

$$a = g\frac{m_0 - \mu(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_0}. \qquad (6)$$

4. Подставляя в уравнение (3) значение ускорения из (6), получим

$$T_2 = g\frac{(1+\mu)m_0 m_2}{m_0 + m_1 + m_2}. \qquad (7)$$

---

102. На наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом поместили два соприкасающихся бруска. Массы брусков равны m_1 и m_2, коэффициенты трения между плоскостью и брусками – соответственно μ_1 и μ_2, причём $\mu_1 > \mu_2$. Определите: а) силу взаимодействия между брусками во время движения; б) предельное значение угла, при котором бруски будут покоиться.

Решение

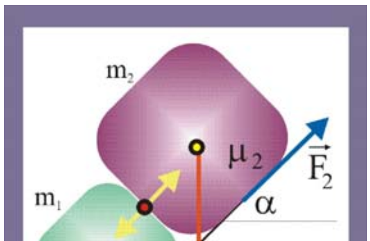


Рис. 102. Система двух тел

1. Запишем уравнение основного закона динамики в проекции на ось x для движущихся совместно тел с учётом того, что ускорение тел одинаково и силы взаимодействия N равны по модулю и противоположны по направлению

$$m_1 g\sin\alpha - \mu_1 m_1 g\cos\alpha - N = m_1 a, \quad (1)$$

$$m_2 g\sin\alpha - \mu_2 m_2 g\cos\alpha + N = m_2 a\ . \ (2)$$

2. Выразим из уравнений (1) и (2) ускорение и приравняем полученные зависимости

$$g\sin\alpha - \mu_1 g\cos\alpha - N/m_1 = g\sin\alpha - \mu_2 g\cos\alpha - N/m_2$$

откуда сила взаимодействия определится как:

$$N = \frac{m_1 m_2 \cos(\mu_1 - \mu_2)}{m_1 + m_2}. \qquad (4)$$

3. Предельное значение угла, при котором тела ещё будут покоится определится из условия равенства нулю суммы всех, действующих на тела сил, т.е.

$$m_1 g \sin\alpha - \mu_1 m_1 g \cos\alpha - N = 0, \qquad (5)$$

$$m_2 g \sin\alpha - \mu_2 m_2 g \cos\alpha + N = 0. \qquad (6)$$

4. Разрешая (5) и (6) относительно N и приравнивая результаты, получим

$$m_1 g \sin\alpha + m_2 g \sin\alpha = \mu_2 m_2 g \cos\alpha + \mu_1 m_1 g \cos\alpha,$$

или

$$\sin(m_1 + m_2) = \cos(\mu_2 m_2 + \mu_1 m_1),$$

откуда

$$\alpha \le \operatorname{arctg}\frac{\mu_2 m_2 + \mu_1 m_1}{m_1 + m_2}. \qquad (7)$$

---

103. Небольшое тело пустили снизу вверх по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Определить коэффициент трения μ тела о плоскость, если известно, что время подъёма тела в два раза меньше времени спуска.

Решение

1. Запишем кинематические уравнения движения тела вверх и вниз

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= v_0 t_1 - \frac{a_1 t_1^2}{2}, \\ v_1 &= v_0 - a_1 t_1 \end{aligned}\right\} \quad v_1 = 0, \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{v_0}{a_1}, \quad t_2 = \frac{2v_0}{a_1}, \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \frac{a_2 t_2^2}{2} = \frac{4v_0^2}{2a_1}, \\ v_2 &= a_2 t_2 \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

2. Подставим далее в первое уравнение системы (1) значение t_1 и приравняем x_1 и x_2 так как тело вверх и вниз проделывает одинаковый путь

$$x_1 = \frac{v_0^2}{a_1} - \frac{v_0^2}{2a_1} = \frac{v_0^2}{2a_1}, \quad x_2 = \frac{2a_2 v_0^2}{a_1^2}, \quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{4}. \qquad (3)$$

3. Запишем основное уравнение динамики для движения тела вверх и вниз по плоскости

$$-\mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha = ma_1, \; -mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha = ma_2,$$

откуда

$$a_1 = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha), \qquad a_2 = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha). \qquad (4)$$

4. Совмещая уравнения (3) и (4), получим

$$\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha} = \frac{1}{4}, \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{3}{5}\operatorname{tg}\alpha \cong 0{,}16. \qquad (5)$$

---

104. На наклонной плоскости с известным углом наклона α расположено тело массой m_1, соединённое, перекинутой через идеальный блок, невесомой и нерастяжимой нитью с другим телом массой m_2. В начальный момент времени тела покоятся. Определите отношение масс m_2/m_1 при котором тело m_2 начнёт: а) опускаться; б) подниматься.

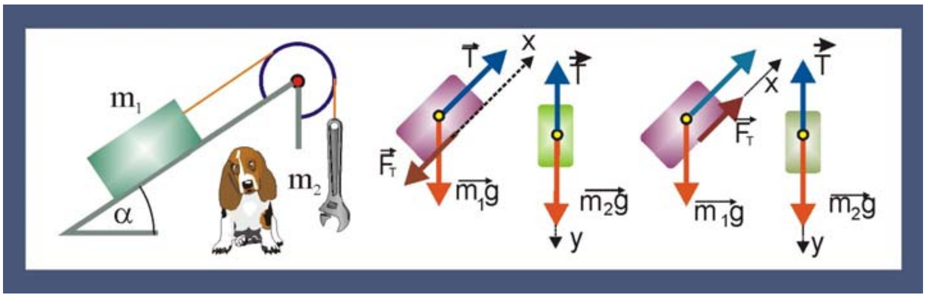


Рис. 104. Два тела, наклонная плоскость и идеальный блок

Решение

1. Тела будут покоиться относительно плоскости, если сумма, действующих на каждое из них сил, будет равна нулю. Предположим, что возможным перемещением тела с массой m_1 является его подъём вверх по наклонной плоскости (левая схема рисунка). Уравнения второго закона Ньютона, при этом, примут вид

$$T - \mu m_1 g\cos\alpha - m_1 g\sin\alpha = 0\,, \tag{1}$$

$$m_2 g - T = 0\,, \tag{2}$$

или

$$T = \mu m_1 g\cos\alpha + m_1 g\sin\alpha\,, \quad T = m_2 g\,. \tag{3}$$

2. Рассматриваемое виртуальное перемещение станет возможным при

$$m_2 \ge m_1(\mu\cos\alpha + \sin\alpha),$$

откуда следует, что

$$\frac{m_2}{m_1} \ge \mu\cos\alpha + \sin\alpha\,. \tag{4}$$

3. При рассмотрении виртуального перемещения системы тел в противоположном направлении (правая часть схемы) уравнения (3) запишутся следующим образом

$$T = \mu m_1 g\cos\alpha - m_1 g\sin\alpha\,, \quad T = m_2 g\,,$$

откуда

$$\frac{m_2}{m_1} \le \sin\alpha - \mu\cos\alpha\,.$$

---

105. Канат лежит на столе так, что часть его свешивается со стола и начинает скользить тогда, когда длина свешивающейся части составляет 30% от его длины. Определите коэффициент трения каната о стол.

Решение

1. Если предположить, что канат имеет одинаковый диаметр и погонную массу, то условие при котором возможно его соскальзывания запишется следующим образом:

$$0{,}7\mu mg \le 0{,}3mg\,,$$

другими словами, сила трения между столом и лежащей частью каната должна быть равна или меньше веса свешивающейся части.

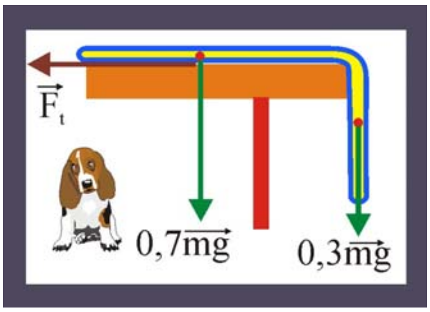


Рис. 105. Канат на столе

2. Решая уравнение относительно коэффициента трения, получим

$$\mu = 0{,}3/0{,}7 \cong 0{,}43\,.$$

---

106. При старте ракеты не отстыковался один из питающих кабелей массой 10 кг. Ракета массой M = 6 т, поднимается вертикально вверх. Сила тяги её стартовых двигателей составляет F = 500 кН. Определите ускорение ракеты и натяжение свободно свисающего кабеля, на расстоянии ¼ его длины от разъёма. Сопротивлением воздуха пренебречь.

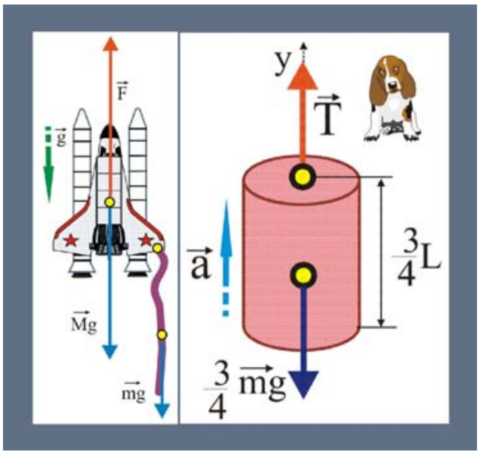


Рис. 106. Старт ракеты

Решение

1. Уравнение второго закона Ньютона в проекции на вертикальную ось при заданных силах имеет следующий вид

$$F - g(M+m) = (M+m)a,$$

откуда

$$a = \frac{F}{M+m} - g \cong 73\frac{м}{с}.$$

2. Натяжение в заданном сечении кабеля определим, полагая его однородным и представив свободным, т.е. наложенные связи заменим их реакциями. Ракета с частью (1/4 всей длины) кабеля заменяется силой натяжения T

$$T - \frac{3}{4}mg = \frac{3}{4}ma,$$

$$T = \frac{3}{4}m(g-a) = \frac{3}{4}\left(g + \frac{F}{M+m} - g\right) \cong 625Н.$$

---

107. Прямоугольный клин с острым углом α = 30^0 при основании закреплён на горизонтальной плоскости. На клине находится тело массой m_2, соединённое посредствам нитей, перекинутых через два идеальных блока, с телами массой m_1 и m_3. Коэффициент трения между телом m_2 и клином μ = 0,3. Найдите натяжение нитей.

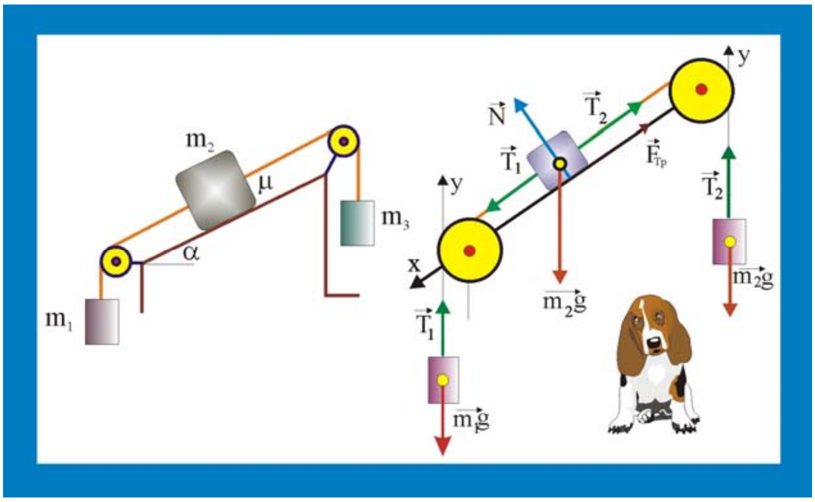


Рис. 107. Система блоков и тел

Решение

1. Уравнения второго закона Ньютона для масс с заданными связями запишутся так:

$$\left.\begin{aligned} &T_1 = m_1 g - m_1 a, \\ &T_1 - T_2 + m_2 g\sin\alpha - \mu m_2 g\cos\alpha = m_2 a, \\ &T_2 - m_3 g = m_3 a. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

2. Из первого и третьего уравнений системы (1) выразим натяжение нитей T_1 и T_2 и подставим эти значения во второе уравнение

$$T_1 = -m_1 a + m_1 g\,, \qquad (2)$$

$$T_2 = m_3 a + m_3 g\,. \qquad (3)$$

$$m_1 g - m_3 g + m_2 g\sin\alpha - \mu m_2 g\cos\alpha = a(m_1 + m_2 + m_2),$$

откуда несложно определить величину ускорения, с которым движутся массы (изначально принято, что масса m_1 опускается)

$$a = g\frac{(m_1 - m_3) + m_2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2 + m_3} \cong 5\frac{м}{c^2}\,. \qquad (4)$$

3. Подставим далее значение ускорения в уравнения (3,4)

$$T_1 = m_1(g - a) \cong 50Н\,, \quad T_2 = m_2(g + a) \cong 45Н\,.$$

---

108. На гладком горизонтальном столе лежат два одинаковых кубика массой m соединённые невесомой пружиной жёсткости k. Длина пружины в свободном состоянии равна L_0. К правому кубику прикреплена невесомая и нерастяжимая нить, переброшенная через идеальный блок. Ко второму концу нити подвешен груз массой 2m. Система приходит в движение из состояния покоя. Определите максимальное расстояние между кубиками при движении.

Решение

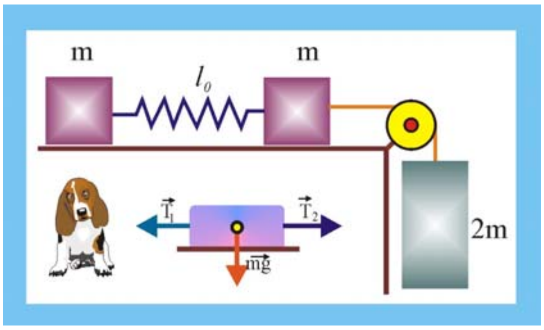


Рис. 108. Подпружиненные тела

1. Рассмотрим ситуацию до возникновения движения левого кубика. Начало перемещения масс m и 2m будет сопровождаться растяжением пружины.

2. В момент начала движения левого кубика, правый кубик будет находиться под действием двух горизонтальных сил T_1 и T_2, причём

$$T_1 = kx\,, \quad T_2 = 2mg\,,$$

с другой стороны, движение становится возможным при условии

$$T_2 > T_1, \quad \Rightarrow \quad 2mg > kx\,,$$

где x – удлинение пружины, которое, после затухания колебаний станет постоянным и равным

$$x = \frac{2mg}{k}, \quad \Rightarrow \quad L_{max} = L_0 + \frac{2mg}{k}\,.$$

---

109. Тело массой m = 1 кг тянут по горизонтальной поверхности под действием силы F = 3 Н, составляющей угол $\alpha = 45^0$ с горизонтом. При этом, за время Δt = 2 с скорость равнопеременного движения изменяется от v_1 = 1м/с до v_2 = 3м/с. Определите коэффициент трения μ тела о плоскость.

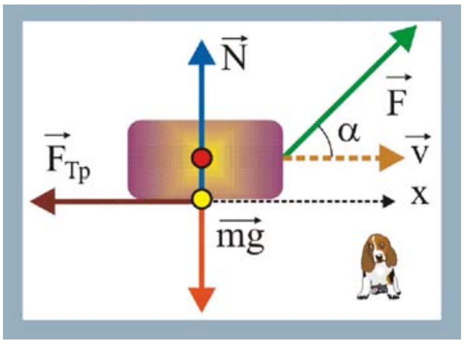


Рис. 109. Коэффициент трения

Решение

1. Нормальная реакция связи в данном случае определится в виде:

$$N = mg - F\sin\beta,$$

тогда сила трения примет вид:

$$F_{Тр} = \mu\left(mg - F\sin\alpha\right).$$

2. Основное уравнение динамики:

$$F\cos\alpha - \mu\left(mg - F\sin\beta\right) = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} m,$$

откуда

$$F\Delta t\cos\alpha - \left(v_2 - v_1\right)m = \mu\left(mg - F\sin\alpha\right),$$

или

$$\mu = \frac{F\cos\alpha\Delta t - \left(v_2 - v_1\right)m}{\left(mg - F\sin\alpha\right)\Delta t} \cong 0{,}14.$$

---

110. Через лёгкий вращающийся без трения блок перекинута невесомая и нерастяжимая нить. На одном конце нити прикреплен груз массой m_1, а по другому концу скользит с постоянным ускорением шайба массой m_2. Определите ускорение массы m_1 и величину силы трения шайбы о нить.

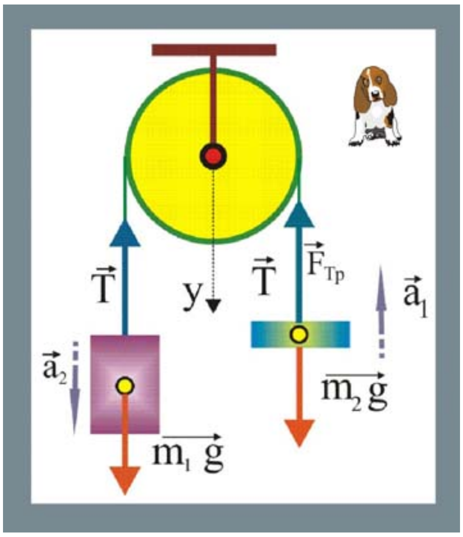


Рис. 110. Груз с шайбой

Решение

1. В данном случае сила натяжения нити равна силе трения

$$F_{Тр} = T, \qquad (1)$$

а ускорение шайбы относительно неподвижной вертикальной координаты определится как

$$a = \left(a_2 - a_1\right). \qquad (2)$$

2. С учётом условий (1) и (2) уравнения движения массы m_1 и шайбы в проекции на ось y примут вид

$$m_1 a_1 = m_1 g - F_{Тр};$$

$$m_2\left(a_2 - a_1\right) = m_2 g - F_{Тр}. \qquad (3)$$

откуда

$$m_1 a_1 - m_1 g = m_2\left(a_2 - a_1\right) - m_2 g. \qquad (4)$$

3. Разрешая (4) относительно a_1 получим

$$a_1 = \frac{m_1 g - m_2\left(g - a_2\right)}{m_1 + m_2}. \qquad (5)$$

4. Значение силы трения целесообразно получить, подставив (5) в первое уравнение системы (3)

$$F_{Тр} = \frac{m_1 m_2\left(2g - a_2\right)}{m_1 + m_2}. \qquad (6)$$

---

111. Тело массой m, посредствам с двух, последовательно соединённых пружин жёсткости k_1 и k_2 перемещается по гладкой горизонтальной плоскости

силой F, параллельной плоскости. Каково суммарное удлинение пружин при установившемся движении системы?

Решение

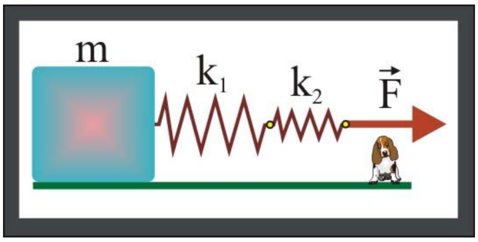


Рис. 111. Удлинение пружин

1. При растяжении пружин будут возникать силы упругости

$$F_1 = k_1 x_1, \quad F_2 = k_2 x_2, \quad F_O = k_O x_O,$$

откуда

$$x_1 = \frac{F_1}{k_1}, \quad x_2 = \frac{F_2}{k_2}, \quad x_O = \frac{F_O}{k_O}.$$

2. Поскольку пружины соединены последовательно, то каждая из них будет находиться под действием одинаковой силы, т.е.

$$F_O = F_1 = F_2 = F,$$

с другой стороны, удлинение соединения пружин будет равно сумме деформаций $x_O = x_1 + x_2$.

3. Определим общий коэффициент упругости соединения пружин:

$$x_O = \frac{F}{k_O} = x_1 + x_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}, \qquad k_O = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$

4. Суммарное удлинение пружин запишется следующим образом:

$$x_O = F\frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}.$$

---

112. Частица массы m движется по гладкой внутренней поверхности вертикального цилиндра радиуса R. Найти силу давления частицы на стенку цилиндра, если в начальный момент ее скорость равна **v** и составляет угол α с горизонтом.

Решение

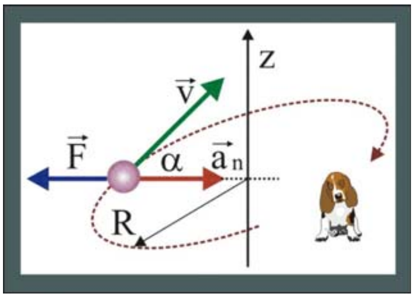


Рис. 112. Сила давления

1. Очевидно, что частица по внутренней поверхности цилиндра может двигаться, опускаясь по спиральной траектории. Криволинейное движение частицы будет сопровождаться возникновением нормального ускорения a_n, которое, в свою очередь приводит к появлению силы инерции F, направленной в противоположную сторону.

2. Определим проекцию скорости частицы на направление нормального ускорения и само нормальное ускорение

$$v_n = v\cos\alpha, \quad a_n = \frac{v^2\cos^2\alpha}{R},$$

откуда:

$$F = ma_n = mv^2\cos^2\alpha / R.$$

---

113. Два тела массами m_1 и m_2 связанные невесомой и нерастяжимой нитью, выдерживающей силу натяжения T, расположены на гладкой горизонтальной поверхности. К телам приложены силы противоположного направления: $F_1 = \alpha t^2$, $F_2 = 2\alpha t^2$, где α - положительная постоянная. Найти, в какой момент времени нить оборвется.

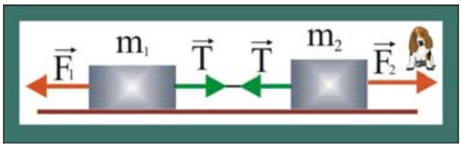


Рис. 113. Обрыв нити

Решение

1. Уравнения второго закона Ньютона в проекции на горизонтальную ось

$$-F_1 + T = m_1 a, \qquad -T + F_2 = m_2 a.$$

2. Ввиду не растяжимости нити, ускорение тел будет одинаковым. Другими словами:

$$\frac{T - F_1}{m_1} = \frac{F_2 - T}{m_2},$$

или с учётом заданных значений сил:

$$m_2\left(T - \alpha t^2\right) = m_1\left(2\alpha t^2 - T\right),$$

откуда

$$t = \sqrt{\frac{T(m_1 + m_2)}{\alpha(2m_1 + m_2)}}.$$

---

114. Ускорение звёзд, входящих в состав двойной звезды равны a_1 и a_2. Какова масса второй звезды, если масса первой равна m_1?

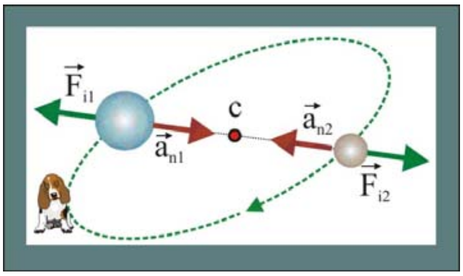


Рис. 114. Масса звезды

Решение

1. Двойными называются звёзды, вращающиеся вокруг общего центра масс C под действием сил тяготения. Нахождение тела на стационарной орбите возможно только при равенстве сил инерции, которые не являются силами в ньютоновском понимании, потому что вызваны не взаимодействием тел, а спецификой криволинейного движения. Таким образом:

$$\left|\vec{F}_{i1}\right| = \left|\vec{F}_{i2}\right|, \quad \frac{m_1 v_1^2}{r} = \frac{m_2 v_2^2}{r}, \text{ или } \quad m_1 a_{n1} = m_2 a_{n2},$$

откуда

$$m_2 = \frac{a_{n1} m_1}{a_{n2}}.$$

---

115. Электроны движутся по окружности любого радиуса вокруг заряженной нити, имея одинаковую скорость v. Как зависит сила, действующая на электрон массой m_e, в зависимости от его удаления от нити? Как будет меняться траектория электрона при изменении заряда нити?

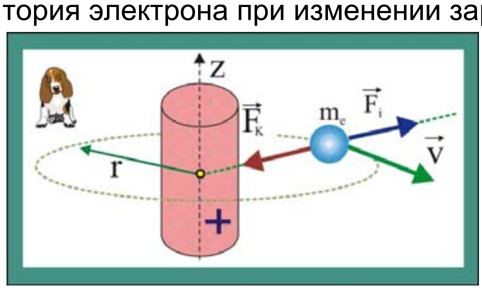


Рис. 115. Траектория электрона

Решение

1. Стационарная круговая орбита электрона, представляющего собой отрицательно заряженную частицу с массой покоя m_e будет иметь место в случае равенства по модулю кулоновской силы притяжения и силы инерции

$$\left|\vec{F}_K\right| = \left|\vec{F}_i\right|.$$

2. Сила инерции, как известно, прямо пропорциональна квадрату линейной скорости частицы и обратно пропорциональна расстоянию до оси вращения

$$\left|\vec{F}_i\right| = \frac{m_e v^2}{r}.$$

Таким образом, сила Кулона в данном случае обратно пропорциональна расстоянию между электроном и заряженной нитью.

3. При увеличении заряда нити

$$F_K > \frac{m_e v^2}{r},$$

для восстановления равновесия радиус орбиты должен уменьшится, при уменьшении заряда – наоборот, радиус увеличится.

---

116. Два шарика массы m каждый, связанные нитью длиной L, движутся со скоростью v по горизонтальному столу в направлении, перпендикулярном связывающей их не провисающей нити. Середина нити налетает на гвоздь. Чему равна сразу после этого сила натяжения нити?

Решение

1. Сразу после соприкосновения середины нити с гвоздём траектория масс изменится, они станут двигаться по круговой траектории радиуса L/2 навстречу друг другу. Массы можно рассматривать как свободные, если наложенную на них связь в виде нити заменить реакцией связи – силой натяжения нити, которая обусловлена её упругими свойствами. Сила натяжения нити по модулю равна силе инерции, т.е.

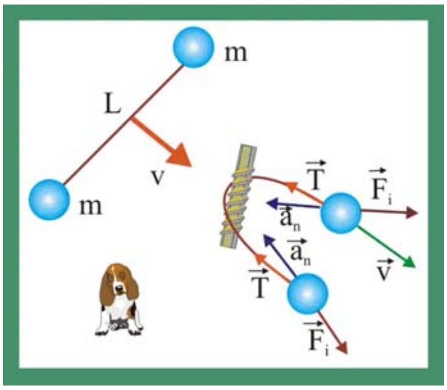


Рис. 116. Натяжение нити

$$\left|\vec{T}\right| = \left|\vec{F}_i\right| = \frac{2mv^2}{L}.$$

---

117. Тело массы M связано нитью длины L с осью, вокруг которой оно обращается с угловой скоростью ω. Найдите силу натяжения нити. Размеры тела малы, силой тяжести можно пренебречь. Нить заменили однородной верёвкой массой m. Определите натяжение верёвки на расстоянии x от оси вращения.

Решение

1. В случае невесомой и нерастяжимой нити её натяжение определится как:

$$\left|\vec{T}\right| = \left|\vec{F}_i\right| = \frac{mv^2}{L} = \frac{m\omega^2 L^2}{L} = m\omega^2 L.$$

2. Выделим заданное сечение верёвки и определим массу её части длиной (L-x)

$$m_x = \frac{m}{L}(L - x).$$

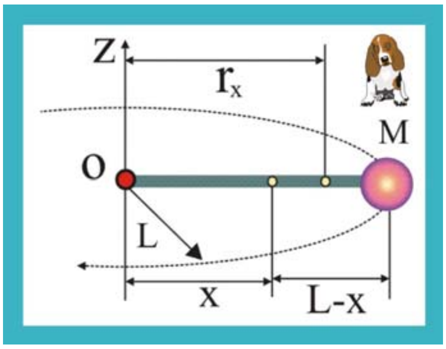


Рис. 117. Натяжение верёвки

3. Определим расстояние от оси вращения oz до центра масс отрезка верёвки

$$r_x = L - \frac{L - x}{2} = \frac{L + x}{2}.$$

4. Натяжение верёвки в сечении x будет обусловлено вращающейся массой

М и массой верёвки m_x

$$\left|\vec{T}\right| = M\omega^2 L + \frac{m\omega^2\left(L^2 - x^2\right)}{2L}.$$

---

118. К тяжёлому шарику, подвешенному на нити длины L,подвешен второй тяжёлый шарик на нити той же длины. При вращении шариков вокруг вертикальной оси, проходящей через верхнюю точку подвеса, обе нити лежат в одной плоскости и составляют с вертикалью постоянные углы α и β. Найдите угловую скорость вращения шариков.

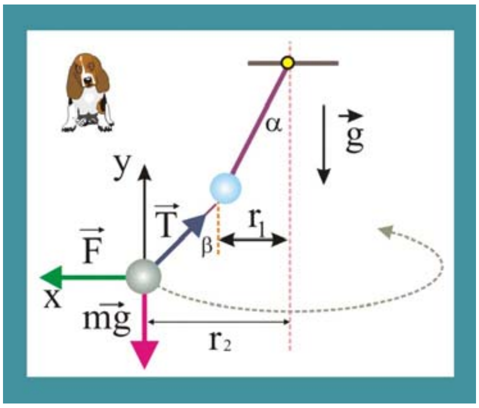


Рис. 118. Угловая скорость

Решение

1. Рассмотрим условие вращения по круговой орбите радиуса r_2 нижнего шарика. Шарик находится под действием двух сил: силы тяжести mg и силы натяжения нити T. Если к шарику приложить силу инерции F, противоположную по направлению вектору нормального ускорения, то его можно рассматривать как неподвижный. Уравнения второго закона Ньютона в проекции на оси координат, при этом, примут вид:

$$\left.\begin{aligned} T\sin\beta = m\omega^2 r_2, \\ T\cos\beta = mg \end{aligned}\right\},$$

откуда, поделив уравнения, друг на друга, получим

$$\omega = \sqrt{\frac{g\,\mathrm{tg}\beta}{r_2}} = \sqrt{\frac{g\,\mathrm{tg}\beta}{L(\sin\alpha + \sin\beta)}}.$$

---

119. Груз массы m, прикреплённый к пружиной жёсткостью k к оси, движется по круговой траектории радиуса R вокруг этой оси с угловой скоростью ω. Определите длину недеформируемой пружины.

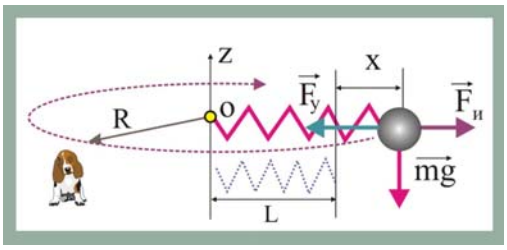


Рис. 119. Длина пружины

Решение

1. Пусть длина недеформированной пружины равна L, а удлинение при вращении груза составляет – x.

2. Груз можно рассматривать свободным и неподвижным, если пружину заменить реакцией связи в виде силы упругости F_y и приложить силу инерции $F_и$. В этом случае

$$kx = m\omega^2 R.$$

Удлинение пружины

$$x = \frac{m\omega^2 R}{k}.$$

3. Длина не деформированной пружины определится в виде разности

$$L = R - x = R\left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right).$$

---

120. На периферии вращающегося горизонтального диска диаметром D подвешен на нити длиной *l* груз. Во время вращения диска вокруг неподвижной вертикальной оси нить отклоняется на угол α. Определите угловую скорость диска.

Решение

1. Сила тяжести и сила натяжения нити дают результирующую горизонтальную силу инерции F, которая является причиной отклонения груза от вертикального положения на угол α. Уравнение второго закона Ньютона на направление нити представится следующим образом

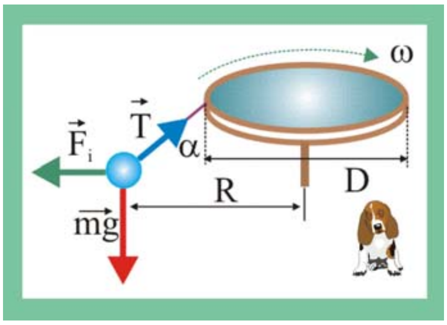


Рис. 120. Угловая скорость диска

$$mg\sin\alpha = m\omega^2 R\cos\alpha, \quad \text{или} \quad m\omega^2 R = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

2. Выразим расстояние R от оси вращения до груза через длину нити и диаметр диска

$$R = D/2 + l\sin\alpha.$$

3. Подставим значение R и разрешим полученное уравнение относительно угловой скорости ω

$$\omega = \sqrt{\frac{2g\cdot \mathrm{tg}\,\alpha}{D + 2l\sin\alpha}}.$$

---

121. На нижнем краю поверхности конуса с углом наклона α покоится тело массой m. Конус начинает равномерно вращаться вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω. Центр масс тела находится на расстоянии r от оси вращения. Определите, при каком наименьшем коэффициенте трения тело удержится на поверхности конуса.

Решение

1. Вращение тела с постоянной угловой скоростью даёт основание полагать, что равнодействующая всех, действующих на тело сил, будет по величине равна силе инерции F_I, т.е.

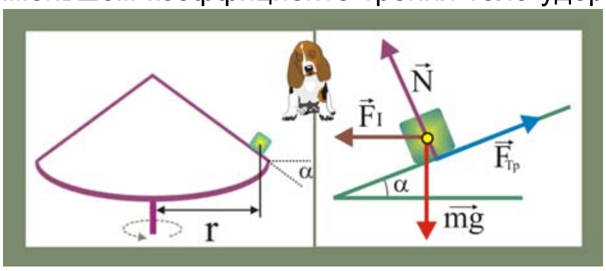


Рис. 121. Вращающийся конус

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{Тр} = m\vec{a}_n.$$

2. В проекции на традиционное направление декартовых осей векторное уравнение представится следующим образом

$$F_{Тр}\cos\alpha - N\sin\alpha = m\omega^2 r,$$

$$F_{Тр}\sin\alpha + N\cos\alpha - mg = 0.$$

3. Подставим в уравнения значение силы трения

$$\mu mg\cos\alpha + N\sin\alpha = m\omega^2 r,$$

$$\mu mg\sin\alpha + N\cos\alpha - mg = 0,$$

и исключим неизвестную нормальную реакцию связи

$$\frac{\mu\sin\alpha+\cos\alpha}{\mu\cos\alpha-\omega^2 r\sin\alpha}=\frac{g}{\omega^2 r}.$$

4. Коэффициент трения запишется следующим образом

$$\mu\geq\frac{\omega^2 r\cos\alpha+g\sin\alpha}{g\cos\alpha-\omega^2 r\sin\alpha}.$$

5. Уравнение справедливо при

$$g\cos\alpha-\omega^2 r\sin\alpha\geq 0,$$

или

$$\mathrm{tg}\alpha\leq g/\omega^2 r.$$

---

122. Груз вращается на подвесе, выполненном в виде резинового шнура, вокруг вертикальной оси. Начальная длина подвеса равна l, а при вращении подвес растягивается до длины L. Определите угловую скорость вращения груза, если статическое удлинение шнура при подвешивании к нему груза составляет nl.

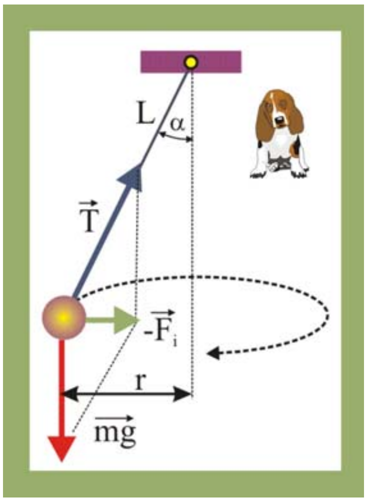


Рис. 122. Груз на резиновом шнуре

Решение

1. Уравнение движения груза на горизонтальную ось при его вращении

$$m\omega^2 r=T\sin\alpha. \quad (1)$$

2. Расстояние до оси вращения r можно выразить через длину подвеса $r=L\sin\alpha$, и переписать (1) в виде

$$T=m\omega^2 L. \quad (2)$$

3. С другой стороны, растяжение шнура при вращении обусловит проявление его упругих свойств

$$T=k\Delta l=k(L-l). \quad (3)$$

4. Коэффициент упругости шнура k определяется из условия его статического удлинения, заданного условием задачи

$$mg=k(nl-l)=kl(n-1), \quad (4)$$

откуда

$$k=\frac{mg}{l(n-1)}. \quad (5)$$

5. Приравняем далее (3) и (2)

$$kl(n-1)=m\omega^2 L,$$

и определим величину угловой скорости

$$m\omega^2 L=\frac{mg(L-l)}{l(n-1)},\quad\Rightarrow\quad\omega=\sqrt{\frac{g(L-l)}{Ll(n-1)}}.$$

---

123. Водопроводная труба диаметром d, располагается горизонтально и делает поворот с закруглением R. Через поперечное сечение трубы ежесекундно протекает вода, массой M. Определите давление воды на стенку трубы в месте закругления.

Решение

1. Частички воды, движущиеся по криволинейным траекториям, имеют нормальное ускорение, направленное к центру вращения. Реакция воды, равная по модулю силе инерции, определится как

$$N = mv^2/R.$$

2. Поскольку в задаче идёт речь о сплошной среде, то массу жидкости m, участвующей в круговом движении, необходимо определить d (ℓ) как $m = \rho\ell s$, где ρ – плотность жидкости, ℓ – длина изогнутого участка, s – сечение трубы.

3. Скорость при этом будет равна

$$v = M/\rho s.$$

4. Давление, как известно, определяется в виде отношения проекции действующей силы на нормаль к площади, т.е.

$$p = \frac{N}{\ell d} = \frac{mv^2}{R\ell d} = \frac{\rho\ell s v^2}{R\ell d} = \frac{M^2}{\rho R d s}.$$

---

124. Определите закон изменения силы тяжести на поверхности нашей планеты в зависимости от широты, считая Землю правильной сферой.

Решение

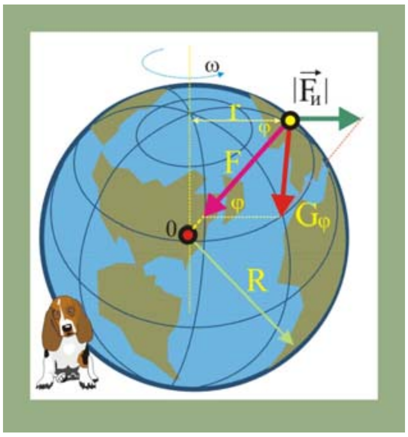


Рис. 124. Изменение силы тяжести

1. Выделим на поверхности Земли некую точку и определим её линейную скорость с учётом широты, определяемой углом φ

$$v = \omega R\cos\varphi, \qquad (1)$$

где R – радиус Земли.

2. Определим величины сил инерции, и гравитации действующих на всякое тело массой m, вращающееся вместе с планетой с угловой скоростью ω

$$F = \gamma\frac{Mm}{R^2}, \quad F_и = \frac{mv^2}{R\cos\varphi} = m\omega^2 R\cos\varphi. \qquad (2)$$

3. Таким образом, результирующая сила, действующая на тело, будет равна геометрической сумме

$$G_\varphi = \sqrt{\frac{\gamma^2 M^2 m^2}{R^4} + 2m^2\gamma\frac{M}{R}\cos^2\varphi + m^2\omega^4 R^2\cos^2\varphi}. \qquad (3)$$

4. Уравнение (3) возможно упростить, с учётом того, что $F >> F_и$, а $F \cong mg$, действительно,

$$\frac{F_и}{F} = \frac{\omega^2 R}{g}\cos\varphi \cong \frac{1}{289}\cos\varphi.$$

5. Если силу инерции разложить на составляющую совпадающую по направлению с $\vec{F}$ и перпендикулярную ей, то можно видеть, что на величину G_φ оказывает влияние только вертикальная составляющая

$$G_\varphi = F - F_и\cos\varphi = m\left(g - \omega^2 R\cos^2\varphi\right). \qquad (5)$$

Горизонтальная составляющая силы инерции $m\omega^2 R\cos\varphi\sin\varphi$ изменяет направление силы тяжести, отклоняя её в сторону экватора. Эта составляющая равна нулю на полюсах и достигает максимума при $\varphi = 45^0$, а на экваторе снова спадает до нуля.

125. Шарик массой m катится с постоянной угловой скоростью ω по внутренней поверхности конуса, описывая горизонтальную окружность радиуса r. Угол при вершине конуса равен 2α, коэффициент трения шарика о поверхность конуса равен μ. Определите минимальное значение скорости, обеспечивающей такое движение.

Решение

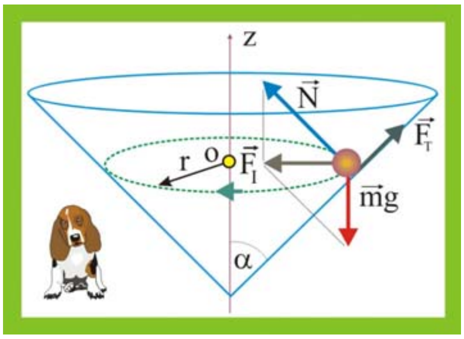


Рис. 125. Шарик в конусе

1. Условие движения тела по круговой траектории в векторной форме в данном случае запишется в виде

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{Tp} = m\vec{a}_n\,, \tag{1}$$

в проекции на оси координат уравнение (1) представится так

$$\left.\begin{aligned} N\cos\alpha - \mu N\sin\alpha &= \frac{mv^2}{r},\\ mg - N\sin\alpha - \mu N\cos\alpha &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

2. Исключая из системы уравнений (2) нормальную реакцию связи шарика N, найдём искомую скорость

$$v_{min} \ge \sqrt{\frac{rg(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}{\sin\alpha + \mu\sin\alpha}}\,. \tag{3}$$

3. Полученное для скорости уравнение будет справедливым при условии $\cos\alpha > \mu\sin\alpha$, или $\mu < \mathrm{ctg}\alpha$.

126. Пустотелый шар радиуса R вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. На внутренней поверхности шара находится в равновесном состоянии небольшая шайба. Определите величину коэффициента трения между шайбой и поверхностью, если угловая координата шайбы α известна.

Решение

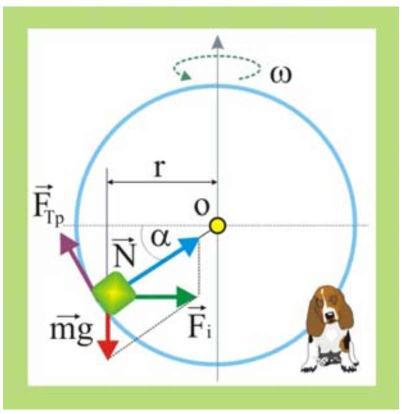


Рис. 126. Пустотелый шар

1. Запишем векторное уравнение второго закона Ньютона

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{Tp} = m\vec{a}_n\,, \tag{1}$$

2. Запишем далее проекцию (1) на горизонтальную ось

$$N\cos\alpha - F_{Tp}\sin\alpha = m\omega^2 r\,, \tag{2}$$

или

$$N\cos\alpha - F_{Tp}\sin\alpha = m\omega^2 R\cos\alpha\,.$$

3. На вертикальную ось уравнение (1) будет иметь следующую проекцию

$$F_{Tp}\cos\alpha + N\sin\alpha - mg = 0\,, \tag{3}$$

т.к. $F_{Tp} = \mu N$, то

$$\mu N\cos\alpha + N\sin\alpha - mg = 0\,. \tag{4}$$

4. Образуем далее систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} m\omega^2\cos\alpha &= N(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) \\ mg &= N(\mu\cos\alpha + \sin\alpha) \end{aligned}\right\},$$

и поделим одно на другое

$$\frac{\omega^2 R\cos\alpha}{g} = \frac{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}{\mu\cos\alpha + \sin\alpha}. \qquad (5)$$

5. Коэффициент трения из уравнения (5) определится следующим образом

$$\mu = \frac{\cos\alpha(g + \omega^2 R\sin\alpha)}{g\sin\alpha + \omega^2 R\cos^2\alpha}.$$

---

127. Сосуд с жидкостью вращается с частотой $n = 2c^{-1}$ вокруг вертикальной оси. Поверхность жидкости имеет форму воронки. Чему равен угол наклона φ поверхности жидкости в точках, лежащих на удалении $r = 5$ см от оси вращения?

Решение

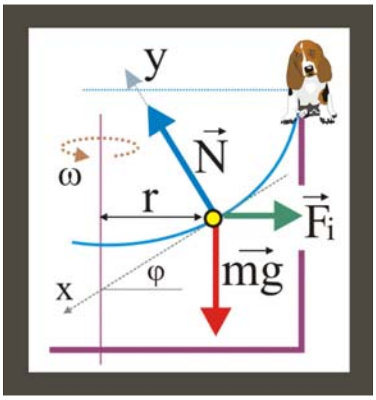


Рис. 127. Вращающийся сосуд

1. Частички жидкости, участвующие во вращении будут иметь нормальное ускорение, линейная скорость, как известно, пропорциональна расстоянию до оси вращения, поэтому и сила инерции тоже пропорциональна r. Выделим на заданном удалении r частичку жидкости и запишем для неё векторное уравнение второго закона Ньютона

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_n.$$

2. В проекции на горизонтальную ось это уравнение примет вид

$$m\omega^2 r\cos\varphi = mg\sin\varphi,$$

откуда

$$\varphi = \mathrm{arctg} = \frac{\omega^2 r}{g} = \mathrm{arctg}\frac{4\pi^2 n^2 r}{g} \cong 38{,}6^0.$$

---

128. Знаменитый американский физик-экспериментатор Роберт Вуд (тот самый, что освобождал от пыли трубу своего спектроскопа, заставляя там проползать кота) построил телескоп с параболическим зеркалом, поместив на дне колодца вращающийся сосуд с ртутью. Определите, в каких пределах можно было менять фокусное расстояние ртутного зеркала при изменении угловой скорости в пределах от 2 рад/с до 4 рад/с.

Решение

1. Свободная жидкость во вращающемся сосуде принимает форму параболоида вращения. На каждую частичку жидкости действуют две силы: сила тяжести mg и нормальная реакция связи N. Геометрическая сумма этих сил R по модулю равна силе инерции. Приложив мысленно к исследуемому элементарному объёму жидкости силу инерции, можно рассматривать его как неподвижный, при постоянстве угловой скорости, разумеется. Как показано в предыдущей задаче^

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{m\omega^2 x}{mg} = \frac{\omega^2 x}{g}.$$

2. Уравнение можно представить в декартовых координатах

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g}, \quad \Rightarrow \quad \int dy = \frac{\omega^2}{g}\int x dx,$$

$$y = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + C.$$

3. Исходя из свойств параболы, её фокус определится как

$$F = \frac{g}{2\omega^2}.$$

4. Таким образом, для телескопа Роберта Вуда фокусное расстояние будет меняться в пределах

$$F_{min} = \frac{g}{2\omega_{max}^2} = 1{,}22\text{м}, \qquad F_{max} = \frac{g}{2\omega_{min}^2} = 1{,}25\text{м}.$$

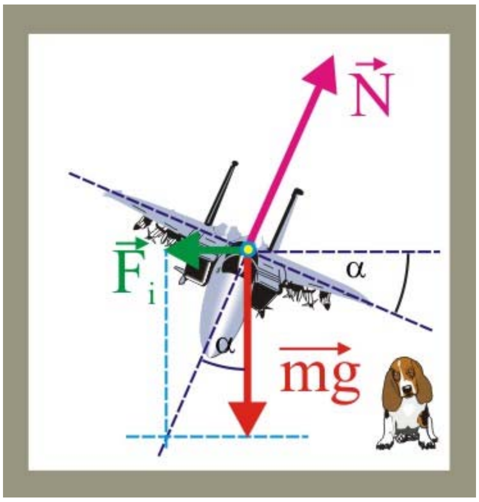


Рис. 129. Вираж самолёта

129. Самолёт совершает вираж, двигаясь по горизонтальной окружности радиуса r с постоянной по модулю скоростью v. Какой угол составляет плоскость крыльев с горизонтом?

Решение

1. Во время движения самолёта по криволинейной траектории можно рассматривать его в статическом варианте если к действующей силе тяжести добавить силу инерции, вызванную нормальным ускорением. Векторы этих сил дают основание получить прямоугольный треугольник из которого можно определить угол α

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{F_i}{mg}; \quad \Rightarrow \quad mg\,\mathrm{tg}\alpha = \frac{mv^2}{r}; \quad \Rightarrow \quad \alpha = \mathrm{arctg}\frac{v^2}{gr};$$

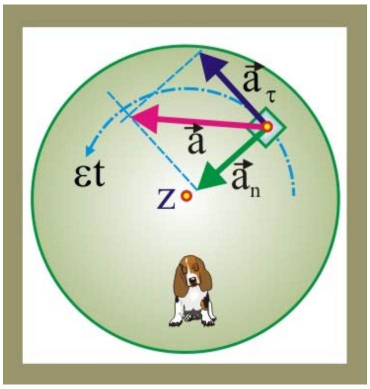


Рис. 130. Раскручивание диска

130. Горизонтальный диск начинают раскручивать вокруг его оси с линейно возрастающей во времени угловой скоростью $\omega = \varepsilon t$. При каком значении угловой скорости тело, расположенное на расстоянии r от оси вращения, начнёт соскальзывать, если коэффициент трения между телом и поверхностью диска равен μ?

Решение

1. В данном случае линейные скорости точек диска будут являться функциями времени. Ускорение тела вращающегося вместе с диском будет иметь две составляющие, нормальную и тангенциальную

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}; \quad a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = \frac{d(\varepsilon r t)}{dt} = \varepsilon r; \quad a_n = \frac{v^2}{r} = \varepsilon^2 r t^2;$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\varepsilon r)^2 + (\varepsilon^2 r t^2)^2} = \sqrt{\varepsilon^2 r^2 + \omega^4 r^2};$$

2. Условие нахождения тела в покое на расстоянии r от оси вращения

$$\mu m g = m a; \quad \Rightarrow \quad a = \mu g;$$

$$\mu g = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}; \quad \omega = \sqrt[4]{\left(\frac{\mu g}{r}\right)^2 - \varepsilon^2}; \quad \text{при } \varepsilon < \frac{\mu g}{r};$$

---

131. Кольцевая цепочка массы m надета на горизонтальный диск радиуса r. Сила натяжения надетой цепочки T. Определить коэффициент трения между диском и цепочкой, если при вращении диска с угловой скоростью ω, цепочка с него слетает.

Решение

1. Реакция связи со стороны диска обусловлена натяжением цепочки и силой инерции, возникающей за счёт нормального ускорения, этими же силами определяется и сила трения.

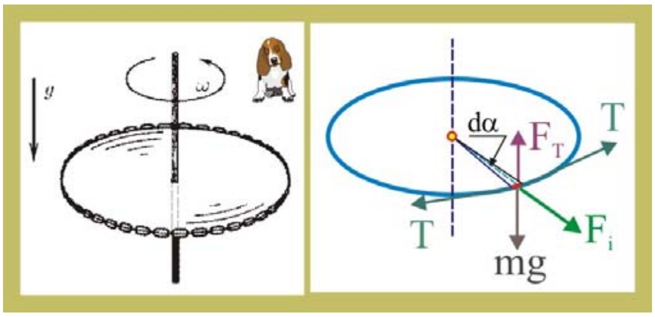


Рис. 131. Цепочка на вращающемся диске

2. Натяжение цепочки в данном случае является распределённой силой, суммарная сила натяжения определится как:

$$T_\Sigma = \int_0^{2\pi} T d\alpha = 2\pi T.$$

3. Проекция действующих сил на направление радиуса:

$$\sum_1^2 F_r = 2\pi T - m\omega^2 r;$$

4. Сила трения:

$$F_T = \mu\left(2\pi T - m\omega^2 r\right);$$

5. Условие соскакивания цепочки с диска:

$$mg = \mu\left(2\pi T - m\omega^2 r\right); \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{mg}{2\pi T - m\omega^2 r};$$

---

132. С какой максимальной скоростью может ехать мотоциклист по горизонтальной плоскости, описывая круг радиусом r, если коэффициент трения равен μ?

Во сколько раз увеличится максимально допустимая скорость байкера при движении по наклонному треку с углом наклона α к горизонту, при одинаковом радиусе круговой траектории и значении коэффициента трения шин о покрытие?

Решение

1. Если массу движущегося мотоцикла вместе с байкером обозначить как m, а радиус описываемой в горизонтальной плоскости криволинейной траектории как r, коэффициент трения шин – μ, то можно выделить следующие силы: силу

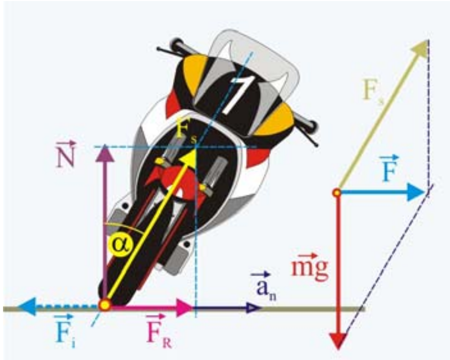


Рис. 132.1. Движение мотоцикла по горизонтальной поверхности

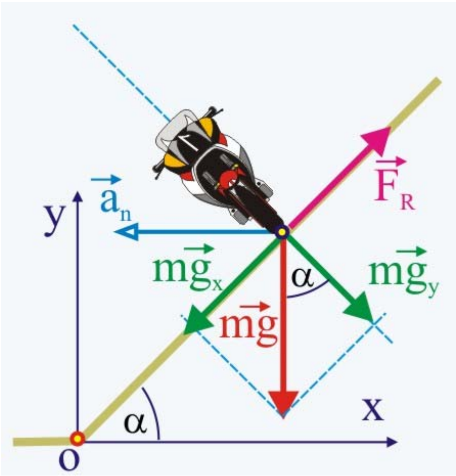


Рис. 132.2. Движение по наклонному треку

тяжести $m\vec{g}$, нормальную реакцию связи $\vec{N}$, силу трения $\vec{F}_R$, которая в данном случае по модулю должна быть равна фиктивной силе инерции $\left|\vec{F}_i\right| = mv^2/r$ (рис. 132.1).

2. Так как

$$F_R = \mu mg,$$

то условие движения без заноса по горизонтальной поверхности представится следующим образом:

$$\mu mg = \frac{mv^2}{r}; \quad \Rightarrow \quad v_{max} = \sqrt{\mu gr;};$$

3. Чтобы мотоцикл не упал, линия действия равнодействующей

$$\vec{F}_s = \vec{N} + \vec{F}_R,$$

должна проходить через центр масс мотоцикла, при этом

$$tg\alpha = \frac{F_R}{N} = \frac{\mu mg}{mg} = \mu; \quad \alpha = arctg\mu;$$

4. Для движения по наклонной поверхности трека запишем второй закон Ньютона в проекциях на выбранное направление осей координат (рис. 132.2)

$$\left.\begin{array}{l} N\sin\alpha + F_R\cos\alpha = \dfrac{mu^2}{r}\cos\alpha; \\ N\cos\alpha - F_R\sin\alpha - mg = 0; \end{array}\right\}$$

2. Поделим уравнения друг на друга

$$\frac{N(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{N(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)} = \frac{u^2\cos\alpha}{rg},$$

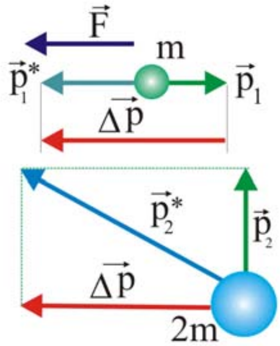
откуда следует, что

$$\frac{tg\alpha + \mu}{1 - \mu tg\alpha} = \frac{u^2}{rg}; \quad u = \sqrt{rg\frac{tg\alpha + \mu}{1 - \mu tg\alpha}};$$

$$\frac{u}{v} = \sqrt{\frac{\mu + tg\alpha}{\mu(1 - \mu tg\alpha)}};$$

Импульс. Центр масс

133. Частица массы m движется со скоростью v, а частица массы 2m движется со скоростью 2v в направлении, перпендикулярном направлению движения первой частицы. На, каждую частицу начинают действовать одинаковые силы. После прекращения действия сил первая частица движется со скоростью 2v направлении, обратном первоначальному. Определите скорость второй частицы.



Решение

1. Определим изменение импульса первого тела в результате действия постоянной силы

$$\Delta p = p_1^* - p_1,$$

где $p_1 = -mv$, $p_1^* = 2mv$. Таким образом,

$$\Delta p = 2mv - (-mv) = 3mv. \qquad (1)$$

2. Поскольку на второе тело массой 2m, движущееся со скоростью 2v действует такая же сила, как и на первое тело, а движется оно перпендикулярно первому телу, то импульс второго тела представится следующим образом

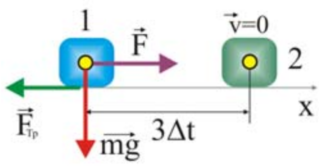
$$p_2^* = \sqrt{p_2^2 + \Delta p^2} = \sqrt{(2m \cdot 2v)^2 + (3mv)^2} = 5mv. \qquad (2)$$

3. Скорость второго тела после действия силы определится так

$$p_2^* = 2mv_2^* = 5mv, \quad \Rightarrow \quad v_2^* = \frac{5}{2}v. \qquad (3)$$

---

134. Первоначально неподвижное тело массой m, находящееся на горизонтальной плоскости, начали тянуть за привязанную к нему веревку с постоянной горизонтальной силой F. Через время Δt действие этой силы прекратилось. Какой коэффициент трения имел место во время его движения, если тело остановилось спустя время $3\Delta t$ после начала движения?



Решение

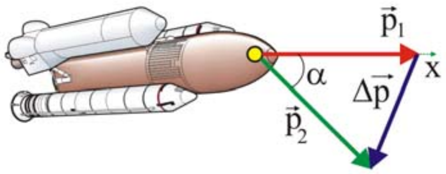
1. Для определения скорости, приобретенной телом при воздействии силы целесообразно воспользоваться теоремой об изменении импульса. С учётом начала движения из состояния покоя, уравнение теоремы представится так

$$F\Delta t = mv, \quad v = \frac{F\Delta t}{m}. \qquad (1)$$

2. После прекращения действия силы F, тело продолжит движение при воздействии только силы трения. Сила тяжести и нормальная реакция связи перпендикулярны направлению перемещения, поэтому не учитываются, их работа равна нулю. С учётом остановки тела через время $3\Delta t$ теорема примет вид
$\mu mg \cdot 3\Delta t = mv$, откуда:

$$\mu = \frac{v}{3g\Delta t} = \frac{F}{3mg}. \qquad (2)$$

135. Космический корабль должен, изменив курс, двигаться с прежним по модулю импульсом p под углом α к первоначальному направлению. На какое наименьшее время нужно включить двигатель с силой тяги F?



Решение

1. По условию задачи импульс космического корабля при манёвре не меняется по модулю, т.е.

$$|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = p. \qquad (1)$$

2. Изменение импульса определится равенством

$$|\Delta\vec{p}| = \sqrt{p^2 + p^2 - 2p^2\cos\alpha} = \sqrt{2p^2(1-\cos\alpha)},$$

или

$$|\Delta\vec{p}| = 2p\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)} = 2p\sin\frac{\alpha}{2}. \qquad (2)$$

3. С другой стороны, изменение импульса корабля, в соответствии с теоремой об изменении импульса, равно импульсу действующей силы

$$\Delta p = F\Delta t, \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta p}{F}, \qquad (3)$$

после подстановки в (3) значения Δp из (2), окончательно получаем

$$\Delta t = \frac{2p\sin(\alpha/2)}{F}. \qquad (4)$$

136. В масс пролетном спектрометре источник испускает сгусток заряженных частиц, которые сначала летят свободно и пролетают через первый датчик D_1, находящийся на расстоянии L от сетки. За сеткой по нормали к ней на частицы действует электрическая сила F. Частицы поворачиваются и вылетают через сетку назад, пролетая через второй датчик D_2, находящийся на том же расстоянии от сетки. От напряжения источника зависит скорость вылетающих частиц, но точное ее значение остается неизвестным. Меняя напряжение, измеряют время между срабатываниями датчиков и находят наименьшее его значение Δt. Какова масса частицы?

Решение

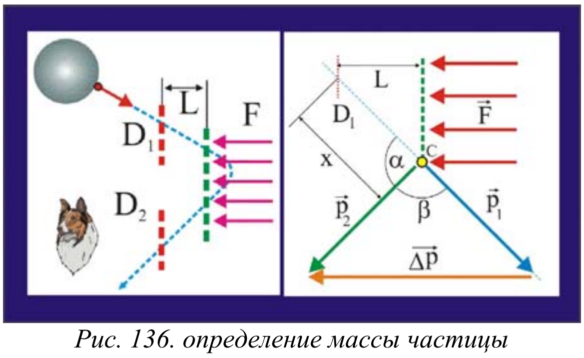


Рис. 136. определение массы частицы

1. По условию задачи при изменении траектории заряженных частиц сеткой модуль их импульса остаётся неизменным, т.е.

$$|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = p,$$

кроме того, при взаимодействии с потенциалом сетки импульс изменяет направление на $\beta = \pi - \alpha$.

2. Определим изменение импульса частицы при её взаимодействии с электрическим полем сетки

$$|\Delta\vec{p}| = \sqrt{2p^2 - 2p^2\cos(\pi-\alpha)} = \sqrt{2p^2 + 2p^2\cos\alpha},$$

$$|\Delta\vec{p}| = 2p\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)} = 2p\cos\frac{\alpha}{2} = 2mv\cos\frac{\alpha}{2}. \qquad (1)$$

3. Запишем кинематическое уравнение движение частицы на отрезке датчик – сетка

$$x = \frac{L}{\cos(\alpha/2)} = v\frac{\Delta t}{2} - \frac{a\Delta t^2}{8}. \qquad (2)$$

4. Ускорение частицы на перемещении x определим из условия равенства нулю скорости в точке поворота

$$v_c = v - at = 0 \quad \Rightarrow \quad a\frac{2v}{\Delta t}. \qquad (3)$$

5. Подставим далее значение ускорения из (3) в уравнение движения (2)

$$\frac{L}{\cos(\alpha/2)} = \frac{v\Delta t}{2} - \frac{2v\Delta t^2}{8} = \frac{2}{8}v\Delta t,$$

откуда

$$v = \frac{4L}{\cos(\alpha/2)\Delta t}. \qquad (4)$$

6. Совмещая (1) и (4), получим

$$|\Delta\vec{p}| = \frac{8mL}{\Delta t}. \qquad (5)$$

7. Импульс частицы (5) и импульс действующей силы связаны известным уравнением теоремы об изменении импульса, что позволяет определить искомую массу частицы

$$\frac{F\Delta t}{2} = \frac{8mL}{\Delta t}, \quad \Rightarrow \quad m = \frac{F\Delta t^2}{16L}.$$

---

137. Ящик с песком массы M лежит на горизонтальной плоскости, коэффициент трения, с которой равен μ. Под углом α к вертикали в ящик со скоростью v влетает пуля массы m и почти мгновенно застревает в песке. Через какое время после попадания пули в ящик, начав двигаться, остановится?

Решение

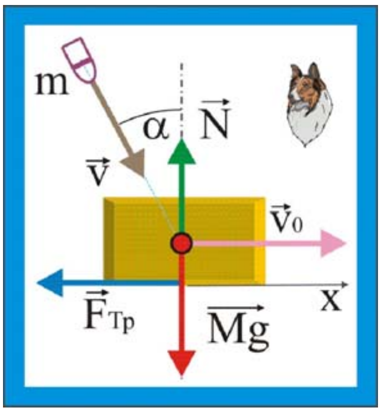


Рис.137. Движение ящика

1. Горизонтальная составляющая импульса пули, передаваемого ящику, будет расходоваться на придание ему горизонтальной скорости, а вертикальная составляющая будет увеличивать силу трения. Закон сохранения импульса в этом случае запишется следующим образом

$$mv\sin\alpha = (M+m)v_0 + \mu mv\cos\alpha, \qquad (1)$$

откуда начальная скорость ящика определится как

$$v_0 = \frac{mv(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{(M+m)}. \qquad (2)$$

2. Воспользовавшись далее кинематическими уравнениями равнозамедленного движения ящика, определим проделанный им путь

$$v_0 - at = 0, \quad \Rightarrow \quad a = v_0/t, \qquad (3)$$

$$x = v_0 t - \frac{at^2}{2} = \frac{v_0 t}{2}. \qquad (4)$$

3. Кинетическая энергия ящика, расходуется при его движении по шероховатой поверхности на работу против силы трения

$$\frac{(M+m)v_0^2}{2} = \mu(M+m)g \cdot \frac{v_0 t}{2}, \qquad (5)$$

откуда при подстановке в (5) значения v_0 из (2), получим для времени движения ящика

$$t = \frac{mv(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\mu g(M+m)}. \qquad (6)$$

4. Уравнение (6) представляется корректным при $t > 0$, т.е.

$$mv\sin\alpha = \mu mv\cos\alpha,$$

или при $\mathrm{tg}\alpha > \mu$, если же $\mathrm{tg}\alpha \le \mu$, то движение не возникнет.

---

138. На покоящееся тело массы m_1 налетает со скоростью v тело массы m_2. Сила, возникающая при взаимодействии тел, линейно зависящая от времени, растет от нуля до значения F_0 за время t_0, а затем равномерно убывает до нуля за то же время. Определите скорость тел после взаимодействия, считая, что все движения происходят по одной прямой.

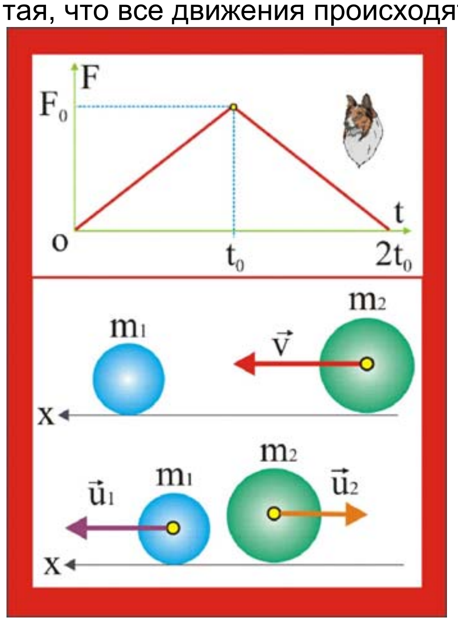


Рис. 138. Столкновение двух тел

Решение

1. Поскольку, судя по приведенному графику зависимости силы взаимодействия от времени, остаточных деформаций нет (при $t = 2t_0$, $F = 0$), то взаимодействие можно полагать абсолютно упругим.

2. Теорема об изменении импульса в данном случае в общем виде запишется так:

$$\Delta p = F_0 t_0.$$

3. Скорости тел после соударения определятся посредствам закона сохранения импульса, который для покоящегося первоначально тела массой m_1 запишется в виде:

$$F_0 t_0 = m_1 u_1, \quad \Rightarrow \quad u_1 = \frac{F_0 t_0}{m_1},$$

для тела массой m_2

$$F_0 t_0 = m_2 v - m_2 u_2,$$

откуда

$$u_2 = v - \frac{F_0 t_0}{m_2}.$$

---

139. Космический корабль перед отделением одной из ступени ракеты-носителя имел скорость v. После отбрасывания последней ступени его скорость стала равной 1,01v, при этом отделившаяся ступень удаляется относительно корабля со скоростью 0,04 v. Какова масса последней ступени, если масса корабля m_0?

Решение

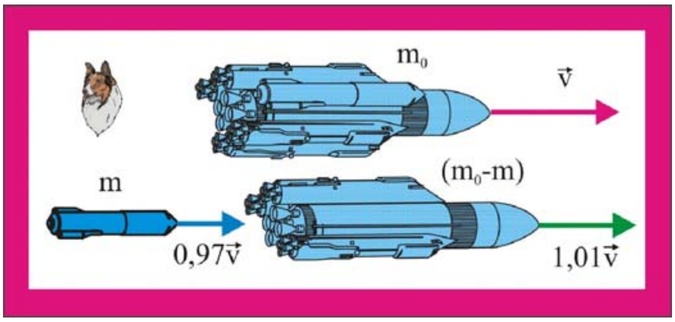


Рис. 139. Разделение ступеней корабля

1. Задачу можно решать как в системе отсчёта связанной с Землёй или другой планетой, а так же в системе отсчёта, связанной с кораблём, движущимся с постоянной скоростью, причём второй способ, на наш взгляд, более оправдан, так как уравнение закона сохранения импульса получается более компактным и очевидным.

2. До отделения последней ступени космический корабль имел постоянную скорость v, а его импульс был равен m_0v, после отделения ступени импульс системы корабль – ступень обязан сохраняться, т.к. разделение происходит при действии только внутренних сил, которые, как известно, импульса не меняют.

3. Запишем уравнение закона сохранения импульса в проекции на направление движения корабля и определим массу отделившейся ступени

$$m_0 v = 0{,}97mv + 1{,}01(m_0 - m)v, \quad \Rightarrow \quad m = \frac{m_0}{4}.$$

---

140. Протон с начальной скоростью v летит прямо на первоначально покоящееся ядро гелия. Какова скорость частиц при наибольшем их сближении? Масса ядра гелия близка к учетверенной массе протона.

Решение

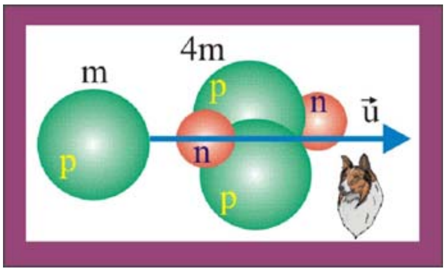


Рис. 140. Протон и ядро гелия

1 Протон и ядро имеют одноимённый заряд, поэтому схема их взаимодействия зависит от скорости протона. Если предположить, что протон не проникает в ядро гелия, которое, по сути, является, так называемой α-частицей, то взаимодействие станет протекать по неупругой схеме. При приближении протона к ядру будет преобладать над остальными кулоновская сила, которая обратно пропорциональна квадрату расстояния. Другими словами, ввиду несущественного различия масс частиц они будут двигаться в одну сторону и с одинаковой скоростью. Закон сохранения импульса представится так:

$$mv = (m + 4m)u,$$

откуда

$$u_1 = u_2 = u = \frac{1}{5}v.$$

---

141. Ракета разрывается в наивысшей точке траектории на расстоянии L по горизонтали от пусковой установки на два одинаковых фрагмента. Один из них вернулся к месту запуска по первоначальной траектории. Где упал второй фрагмент?

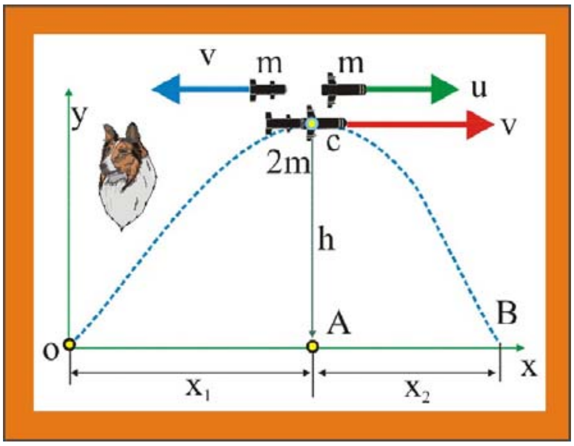


Рис. 141. Взрыв в высшей точке траектории

Решение

1. Чтобы фрагмент ракеты вернулся в точку О необходимо, в отсутствие сопротивления сообщить ему ту же скорость, с которой к точке С подлетела ракета, но с обратным знаком, т.е. первый осколок должен после разрыва полететь горизонтально в направлении обратном первоначальному, до разрыва. Закон сохранения импульса в проекции на горизонтальную ось позволят в данном случае сразу определить скорость второго фрагмента, которая обязана быть направлена по направлению первоначального полёта ракеты в точке С

$$2mv = -mv + mu,$$

откуда

$$u = 3v.$$

2. Как известно из кинематических соотношений, время падения тел зависит, без учёта сопротивления, только от высоты, т.е.

$$h = \frac{gt^2}{2}, \quad \Rightarrow \quad t_1 = t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

3. Вдоль оси *ox* движение любого тела брошенного горизонтально, а именно этот тип движения имеет место после разрыва снаряда, происходит с постоянной скоростью

$$x_1 = vt, \quad x_2 = ut = 3vt, \quad \Rightarrow \quad x_2 = 3x_1 = 3L.$$

4. Таким образом, от места старта второй осколок упадёт на расстоянии

$$OB = x_1 + x_2 = L + 3L = 4L.$$

---

142. Артиллерист стреляет из пушки ядром массы m так, чтобы оно упало в неприятельском лагере. На вылетевшее из пушки ядро вскакивает небезызвестный барон Мюнхгаузен, масса которого 5m. Какую часть пути до неприятельского лагеря барону придётся идти пешком?

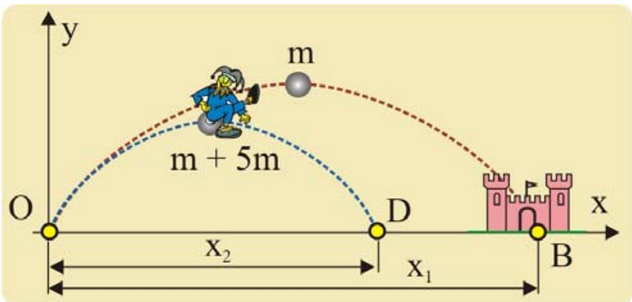


Рис. 142. Полёт барона на ядре

Решение

1. Предположим, что барон оседлает ядро сразу после его вылета из пушки, при этом скорость ядра v_2 уменьшится до величины v_2 вследствие увеличения массы. Закон сохранения импульса в проекции на горизонтальную ось запишется так

$$mv_1 = (5m + m)v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{mv_1}{(M + m)}.$$

2. Запишем далее кинематические соотношения для дальности полёта ядра x_1 и ядра с бароном x_2, считая их телами, брошенными под углом α к горизонту

$$x_1 = \frac{v_1^2 \sin 2\alpha}{g}, \qquad x_2 = \frac{v_2^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

3. Перепишем уравнение для x_2

$$x_2 = \frac{m^2 v_1^2}{(M+m)^2}\frac{\sin 2\alpha}{g}.$$

4. Если дальность полёта ядра без барона принять за единицу, то пешую часть пути в общем виде можно представить так

$$z = \frac{x_1 - x_2}{x_1} = \frac{v_1^2 \sin 2\alpha - \left(\frac{m}{6m}\right)^2 v_1^2 \sin 2\alpha}{v_1^2 \sin 2\alpha} = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}.$$

---

143. Частица массы m_1, имеющая скорость v, налетела на покоящееся тело массы m_2 и отскочила от него со скоростью u под прямым углом к направлению первоначального движения. Определите вектор скорости массы m_2?

Решение

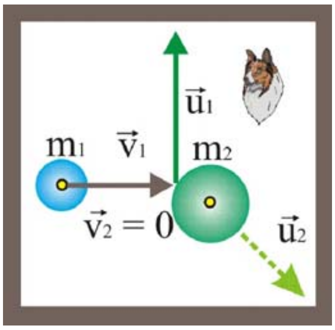


Рис.143. Столкновение

1. Определим изменение импульса тела массой m_1

$$\Delta p_1 = \sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_1 u_1)^2},$$

$$\Delta p_1 = m_1\sqrt{v_1^2 + u_1^2}.$$

2. Изменение импульса первого тела должно быть по модулю равно изменению импульса второго тела массой m_2, первоначально покоящегося

$$m_2 u_2 - m_2 v_2 = \Delta p_1 = m_1\sqrt{v_1^2 + u_1^2},$$

а так как $v_2 = 0$, то

$$u_2 = \frac{m_1}{m_2}\sqrt{v_1^2 + u_1^2}.$$

3. Угол между векторами $\vec{u}_2$ и $\vec{v}_1$ определится как:

$$\alpha = \operatorname{arctg}(u_1/v_1).$$

---

144. При β-распаде покоящегося первоначально нейтрона образуются протон, электрон и нейтрино. Импульсы протона и электрона p_p и p_e равны по модулю а угол между ними α = 120^0. Определите импульс нейтрино.

Решение

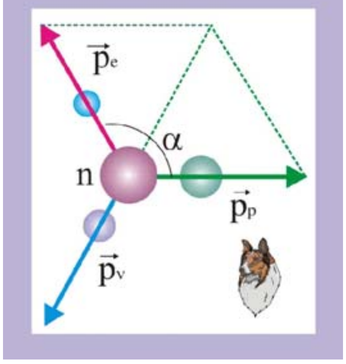


Рис. 144. β-распад

1. Суммарный импульс электрона и протона, с позиций закона сохранения, должен быть равен по модулю импульсу нейтрино, потому что распад происходит исключительно под действием внутренних сил, которые изменить движения не могут. Импульс нейтрино по модулю будет равен сумме импульсов электрона и протона, а направлен – в сторону противоположную $\vec{p}_p + \vec{p}_e$

$$|\vec{p}_v| = \sqrt{p_p^2 + p_e^2 + 2p_p p_e \cos 120^0},$$

или с учётом того, что $\left|\vec{p}_p\right| = \left|\vec{p}_e\right| = p$, уравнение (1) перепишется в виде

$$\left|\vec{p}_v\right| = \sqrt{p^2 + p^2 - p^2} = p.$$

---

145. Радиоактивное ядро распалось на три осколка массы m_1, m_2, m_3, имеющих скорость v_1, v_2, v_3 соответственно. Какова была скорость ядра до распада?

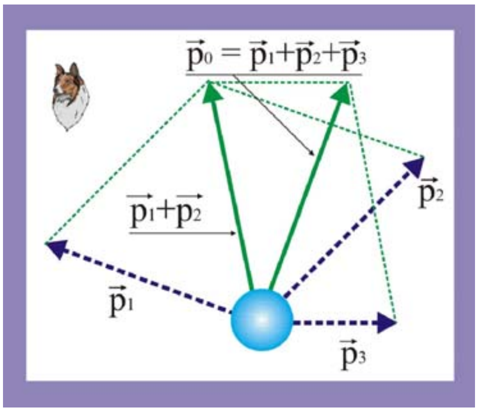


Рис. 145. Распад ядра

Решение

1. Как и в предыдущем случае, распад ядра происходит под действием внутренних сил, поэтому справедлив закон сохранения импульса, т.е. вектор импульса ядра до распада должен быть равен сумме векторов импульсов всех компонент распада. Суммарный импульс осколков определится по правилам сложения векторов

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3.$$

2. Закон сохранения импульса в векторной форме запишется в виде

$$(m_1 + m_2 + m_3)\vec{u} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3,$$

откуда

$$\vec{u} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3}{m_1 + m_2 + m_2}.$$

---

146. Космонавт массы m_1 приближается к космическому кораблю массы m_2 с помощью легкого троса. Первоначально корабль и космонавт неподвижны, а расстояние между ними равно L. Какое расстояние пройдут корабль и космонавт до встречи?

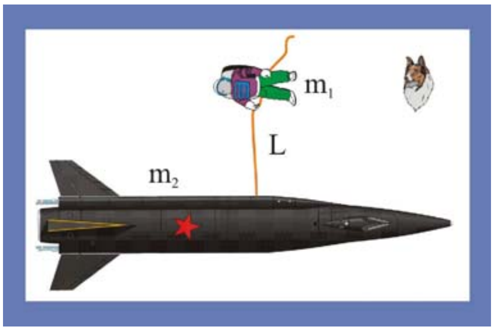


Рис. 146. Космонавт и корабль

Решение

1. Импульс системы корабль – космонавт при отсутствии внешних сил должен сохраняться. Взаимное сближение космонавта и корабля происходит под действием внутренних сил, сумма которых для любой системы точек равна нулю, поэтому закон сохранения импульса в проекции на направление прямолинейного перемещения примет вид:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0.$$

2. Считая скорости корабля и космонавта постоянными, можно записать для них следующие уравнения

$$v_1 = \frac{x_1}{t}, \qquad v_2 = \frac{(L - x_1)}{t},$$

где x_1 – перемещение космонавта за время t, $x_2 = (L - x_1)$ – перемещение космического корабля за то же время.

3. Сопоставляя уравнения, получим:

$$\frac{m_1x_1}{t}-\frac{m_2(L-x_1)}{t}, \Rightarrow\ x_1=\frac{m_2L}{m_1+m_2},$$

$$x_2=L-x_1=\frac{m_1L}{m_1+m_2}.$$

---

147. Две заряженные частицы массами m и 2m, имеющие равные по модулю импульсы одновременно вылетают навстречу друг к другу из точек А и В. По траектории частицы массой 2m установить траекторию частицы массой m.

Решение

1. Сила, с которой взаимодействуют частицы, подчиняется закону Кулона:

$$\left|\vec F_K\right|=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2},$$

т.е. сила взаимодействия обратно пропорциональна квадрату расстояния между частицами, что позволяет заключить, что траекториями частиц будут гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$$

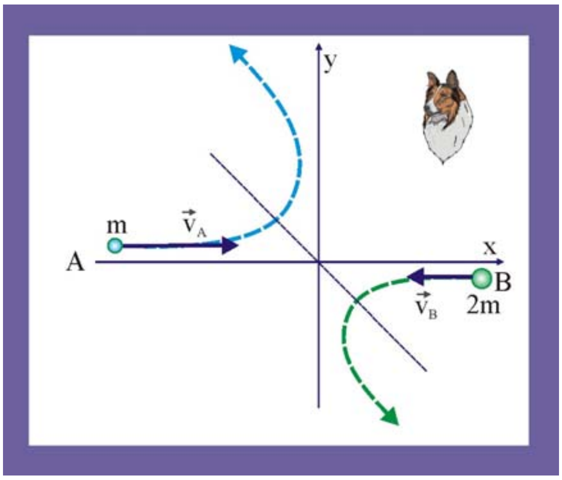


Рис. 147. Траектории заряженных частиц

2. Коэффициенты a и b, в данном случае определяются импульсами взаимодействующих частиц, их определение относится к задаче двух тел. Если помимо электростатического взаимодействия, прочие внешние силы отсутствуют, то, уравнения движения имеют вид:

$$m\frac{d^2\vec r_A}{dt^2}=\vec F_{A,B};\quad 2m\frac{d^2\vec r_B}{dt^2}=\vec F_{B.A};\quad \vec F_{A,B}=\vec F_{B,A};$$

3. Уравнения движения центра масс системы двух частиц:

$$(m_A+m_B)\frac{d^2\vec r_C}{dt^2}=0;\quad 3m\frac{d^2\vec r_c}{dt^2}=0;\quad \vec r_C=\frac{m\vec r_A+2m\vec r_B}{3m}=\frac{\vec r_A}{3}+\frac{2\vec r_B}{3},$$

т.е. Радиус-вектор частицы А должен быть в два раза больше по модулю радиус вектора частицы В, другими словами лёгкая частица тоже будет двигаться по гиперболической траектории с в два раза большим ускорением, по кривой растянутой в два раза относительно тяжёлой частицы.

---

148. Космическая станция представляет собой цилиндр радиуса R и массы m_2. Космонавт массы m_1 начал круговой обход станции по её поверхности. Определить траекторию космонавта и траекторию центра станции, если первоначально космонавт и станция были неподвижны.

Решение

1. Система двух тел (станция – космонавт) будет иметь центр масс, положение которого определяется радиус-вектором

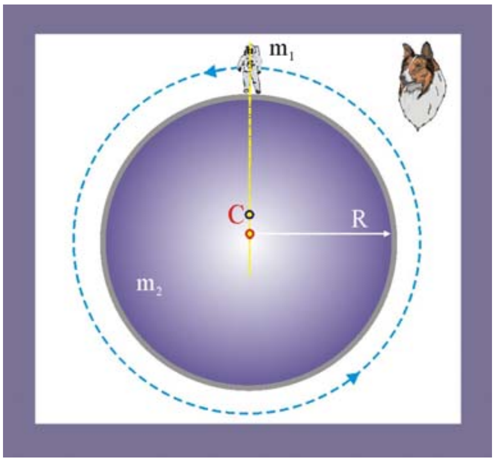


Рис. 148. Обход станции

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} m_k \vec{r}_k}{M} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2},$$

$$y_C = \frac{m_1 R}{m_1 + m_2},$$

движение космонавта и вызванное этим движение станции будут протекать по круговым траекториям с радиусами ρ_1 и ρ_2 относительно оси, проходящей через центр масс, при этом:

$$\rho_1 = \frac{Rm_2}{m_1 + m_2}; \quad \rho_2 = \frac{Rm_1}{m_1 + m_2};$$

149. Определите, где находится центр масс однородного прутка длиной L, согнутого посередине под прямым углом?

Решение

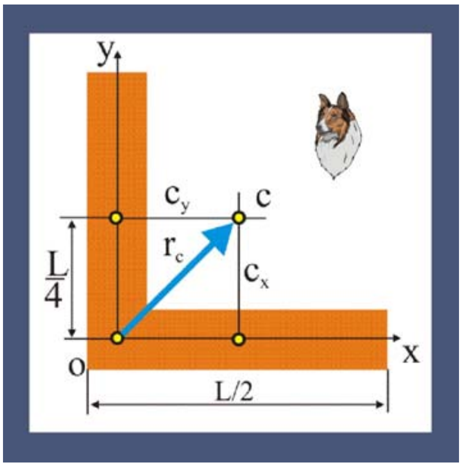


Рис. 149. Центр масс прутка

1. Положение центра масс системы материальных точек относительно выбранной системы отсчёта определяется следующим радиус – вектором

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} m_k \vec{r}_k}{M},$$

где m_k и $\vec{r}_k$ - масса и радиус – вектор некоторой k-й точки рассматриваемой системы. В данном случае ввиду однородности прутка его можно рассматривать, состоящим из двух элементов, центры масс которых c_y и c_x располагаются на расстоянии L/4 от торцов.

2. Рассматривая далее прямоугольный треугольник, например $\triangle OCc_x$, для модуля радиус-вектора центра масс, можно записать

$$|\vec{r}_C| = \sqrt{\left(\frac{L}{4}\right)^2 + \left(\frac{L}{4}\right)^2} = \frac{L}{4}\sqrt{2}.$$

3. Направление $\vec{r}_C$ определится углом

$$\left(\vec{r}_C; \vec{i}\right) = \arcsin\frac{0{,}25L}{0{,}35L} = \arcsin 0{,}707 \cong 45^0.$$

150. Определите положение центра масс пластинки в виде произвольного треугольника.

Решение

1. Разобьём площадь треугольника ADB прямыми, параллельными стороне AD, на большое число узких полосок, которые можно рассматривать как отрезки материальной прямой линии. Центр масс каждой такой полоски лежит на её середине, т.е. на медиане FB.

2. Естественно предположить, что и центр масс всего треугольника располагается где-то на этой медиане. Установить эту конкретную точку можно разбиением площади треугольника полосками параллельными другой стороне, например, DB. Центры масс новых полосок будут располагаться на медиане AE. Точка пересечения медиан BF и AE даст искомую точку C – центр масс.

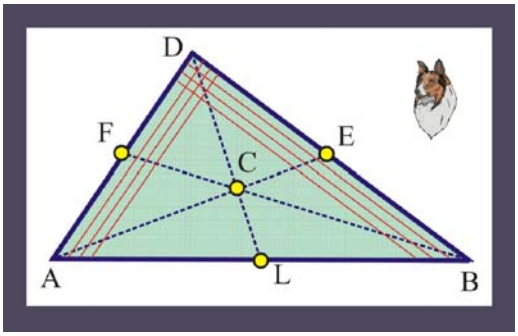


Рис. 150 Центр масс треугольника

3. Как известно из геометрии

$$CL = \frac{1}{3} DL .$$

---

151. Определите положение центра масс круглой пластины радиуса R, с вырезом в виде прямоугольника со сторонами a и b.

Решение

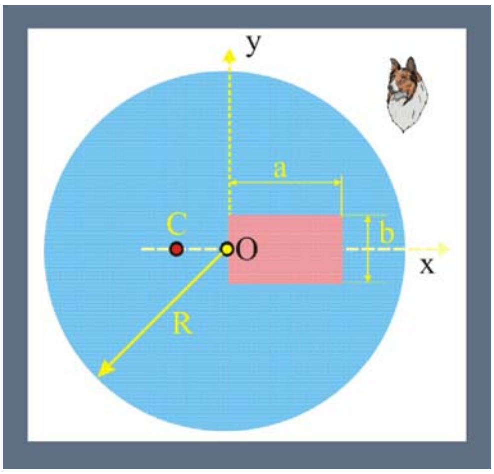


Рис. 151. Круглая пластина с вырезом

1. При определении положения центра масс фигур с вырезами пользуются, как правило, способом дополнения, считая массы вырезанных частей отрицательными.

2. Рассматриваемая пластина с вырезом имеет ось симметрии, на которой и следует искать центр масс.

3. Дополним пластину до полного круга, площадь которого определится как $S_0 = \pi R^2$. Центр масс этого круга совпадает с его геометрическим центром O, где и расположим начало системы координат. Абсцисса центра масс полного круга $x_0 = 0$.

4. Площадь вырезанного прямоугольника $S_1 = a \cdot b$. Абсцисса центра масс этой фигуры равна $x_1 = a/2$.

5. Координату центра масс заданной фигуры определим по уравнению

$$x_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} S_i x_i}{S}, \quad x_C = \frac{S_0 x_0 - S_1 x_1}{S_0 - S_1} = \frac{\pi R^2 0 - ab\dfrac{a}{2}}{\pi R^2 - ab} = -\frac{a^2 b}{2\left(\pi R^2 - ab\right)}.$$

2.2.18 На первоначально неподвижной тележке установлены два вертикальных цилиндрических сосуда, соединенных тонкой трубкой. Площадь сечения каждого сосуда S, расстояние между их осями L. Один из сосудов заполнен жидкостью плотности ρ. Кран на соединительной трубке открывают. Найдите скорость тележки в момент времени, когда скорость уровней жидкости равна v. Полная масса всей системы M.

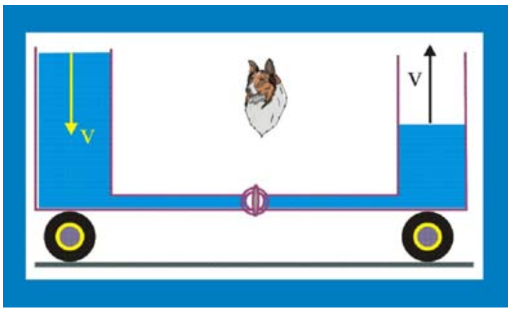


Рис. 152. Сообщающиеся сосуды

Решение

1. Движение сосуда при перетекании жидкости обусловлено изменением положения центра масс. Очевидно, что импульс перемещающейся жидкости по закону сохранения импульса должен быть равен по модулю импульсу системы

$$Mu = m\ v\ , \qquad (1)$$

где u – скорость тележки, m – масса жидкости.

2. Выразим массу жидкости через её плотность и объём

$$m = \rho V = \rho sL . \qquad (2)$$

3. Перепишем (1) с учётом (2)

$$Mu = \rho sLv ,$$

откуда

$$u = \frac{\rho sLv}{M} .$$

---

153. На гладком полу стоит сосуд, заполненный водой плотности ρ_0; объем воды Vo. Оказавшееся на дне сосуда насекомое объема V плотности ρ через некоторое время начинает ползти по дну сосуда со скоростью u относительно него. С какой скоростью станет двигаться сосуд по полу? Массой сосуда пренебречь, уровень воды все время остается горизонтальным.

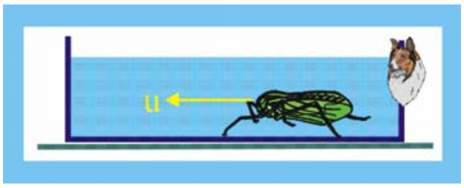


Рис. 153. Жук в аквариуме

Решение

1. Система «жук + сосуд» замкнута, т.к. все внешние силы перпендикулярны рассматриваемому перемещению жука и сосуда. Сумма проекций импульсов жука и сосуда на горизонтальную ось сохраняется и равна нулю, поскольку насекомое сначала сидит неподвижно.

2. Жук подвержен воздействию силы Архимеда, поэтому нормальная реакция связи определится в виде разности

$$\left|\vec{N}\right| = mg - F_A = \rho gV - \rho_0 gV = gV(\rho - \rho_0) . \qquad (1)$$

3. После того, как жук начал ползти прямолинейно и равномерно, его импульс приобрёл значение

$$p = uV(\rho - \rho_0) . \qquad (2)$$

4. При этом сосуд с ползущим жуком будет обладать импульсом

$$p_0 = v(\rho V + \rho_0 V_0) . \qquad (3)$$

5. Приравнивая (2) и (3) и разрешая полученное уравнение относительно скорости сосуда v, получим

$$v = \frac{uV(\rho - \rho_0)}{\rho V + \rho_0 V_0} . \qquad (4)$$

---

154. Для создания искусственной силы тяжести два отсека орбитальной станции (отношение масс 1:2) развели на расстояние R друг от друга и раскрутили вокруг их общего центра масс. Определите время полного оборота отсеков, если в более массивном отсеке искусственная сила тяжести в два раза меньше силы тяжести на Земле.

Решение

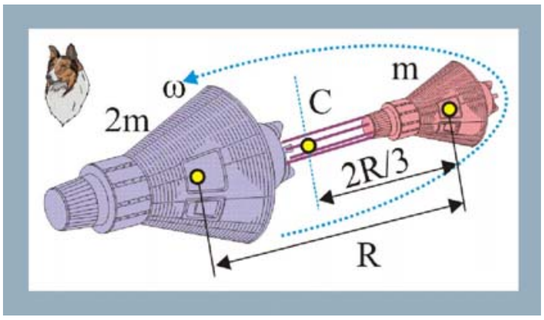


Рис. 154. Создание силы тяжести

1. Вращающаяся вокруг центра масс станция обладает симметрией относительно горизонтальной оси, проведенной через центры блоков, центр масс станции будет лежать на этой оси

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i} = \frac{2mR + m0}{3m} = \frac{2}{3}R .$$

2. Ускорение в более массивном блоке станции обусловлено вращением вокруг оси Cz

$$a_n = \omega^2 r = \omega^2 \frac{1}{3}R = \frac{1}{2}g ,$$

откуда

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2R}} .$$

3. Перейдём далее от угловой скорости ω к периоду T

$$T = \frac{\omega}{2\pi} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{3g}} .$$

---

155. Два тела массы m_1 и m_2 связаны натянутой нитью длины L и движутся по гладкой горизонтальной поверхности. В некоторый момент времени оказалось, что первое тело неподвижно, а скорость второго тела, равная u, перпендикулярна нити. Определите силу натяжения нити.

Решение

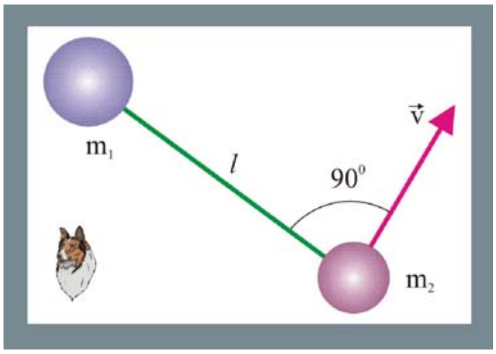


Рис. 155. Связанные нитью тела

1. Воспользовавшись вторым законом Ньютона, определим абсолютное ускорение

$$a_1 = \frac{F}{m_1}; \quad a_2 = \frac{F}{m_2};$$

,

$$a = a_1 + a_2 = F\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2};$$

где F – натяжение нити, a_1,a_2 – ускорение тел

2. Покой тела с массой m_1 и направление скорости тела с массой m_2 показывают, что они вращаются вокруг подвижной оси, которая в данный момент времени проходит перпендикулярно плоскости чертежа через тело массой m_2. Таким образом, тела будут обладать нормальным ускорением, т.е.

$$a \equiv a_n = \frac{v^2}{L} = F\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}, \quad \Rightarrow \quad F = \frac{m_1 m_2 v^2}{(m_1 + m_2)L} .$$

---

156. Космические корабли имеют массы m_1 и m_2 и соединены длинным однородным тросом длины L. Корабли вращаются вокруг оси, перпендикулярной тросу. Какова угловая скорость вращения, если сила натяжения у первого корабля вблизи T_1, а вблизи второго – T_2?

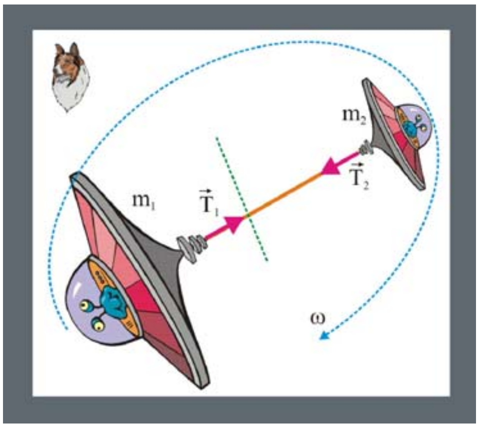


Рис. 156. Угловая скорость кораблей

Решение

1. ускорения космических кораблей

$$a_1 = \frac{T_1}{m_1}; \quad a_2 = \frac{T_2}{m_2}.$$

2. Абсолютное ускорение определится в виде суммы

$$a = a_1 + a_2 = \frac{T_1 m_2 + T_2 m_1}{m_1 m_2}.$$

3. Так как корабли вращаются, то ускорение будет нормальным, а именно

$$a \equiv a_n = \omega^2 L = \frac{T_1 m_2 + T_2 m_1}{m_1 m_2}.$$

4. Решая последнее уравнение относительно угловой скорости ω, получим

$$\omega = \sqrt{\frac{T_1 m_2 + T_2 m_1}{m_1 m_2 L}}.$$

---

157. В сосуде, наполненном водой плотности ρ, с ускорением a всплывает пузырек воздуха, объем которого V. Найдите силу давления со стороны сосуда на опору. Масса сосуда вместе с водой равна m.

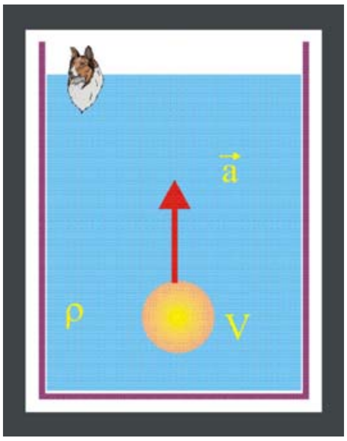


Рис. 157. Давление

Решение

1. Сосуд с пузырьком воздуха можно рассматривать как некий объём со сферической полостью (плотность воды 1000 кг/м^3, а воздуха при нормальных условиях 1,3 кг/м^3), который будет иметь центр масс. При всплывании пузырька центр масс будет перемещаться. Ускоренное движение пузырька приведёт к возникновению дополнительной нагрузки на опорную поверхность.

2. Определим массу вытесненной пузырьком жидкости

$$m_0 = \rho V.$$

3. Сила давления сосуда на опорную поверхность равна нормальной реакции связи N , взятой с обратным знаком. Так как N представляет собой в общем случае сумму проекций всех сил на нормаль к поверхности, т.е.

$$N = \sum_{k=1}^{k=n} F_{kn},$$

поэтому

$$N = mg + m_0 a = mg + \rho V a.$$

---

158. На тележке установлен цилиндрический сосуд с площадью сечения S, наполненный жидкостью плотностью ρ. От сосуда параллельно полу отходит тонкая длинная горизонтальная трубка, короткий отрезок которой на свободном конце загнут вертикально вниз. Расстояние от оси симметрии сосуда до отверстия в трубке равно L. Уровень жидкости в сосуде опускается с ускорением *a*. Какой горизонтальной силой F можно удержать тележку на месте?

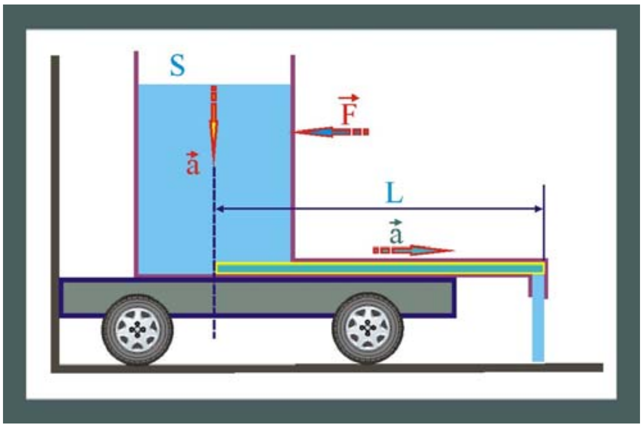


Рис. 158. Изменение положения центра масс

Решение

1. Движение тележки при истечении жидкости обусловлено изменением положения центра масс.

2. Выделим горизонтальный цилиндрический объём длиной L движение жидкости, в котором происходит в горизонтальном направлении. Ввиду не сжимаемости жидкости, ускорение жидкости в цилиндрическом горизонтальном объёме будет равно ускорению *a* опускания уровня жидкости в вертикальном сосуде.

3. Масса жидкости, участвующей в горизонтальном движении:

$$m = \rho V = \rho s L . \qquad (2)$$

4. Закон Ньютона для горизонтального цилиндрического объёма жидкости

$$F = ma = \rho L S a ;$$

---

159. На тросе висит небольшой ящик с песком, в котором застревают пули, летящие горизонтально со скоростью v. Масса пули m_1 много меньше массы ящика m_2. Трос отклоняется от вертикали на угол α. Какое число пуль попадает в песок за единицу времени?

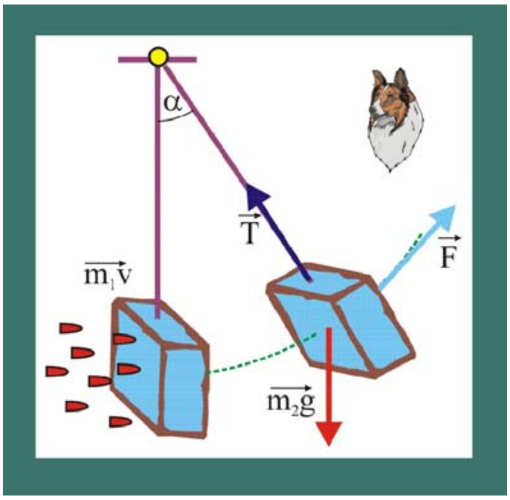


Рис. 159. Стрельба по ящику с песком

Решение

1. Теорема об изменении импульса для единичной пули запишется следующим образом

$$f_1 \Delta t = m_1 v .$$

2. В единицу времени для $n = N/\Delta t$ пуль, уравнение перепишется в виде

$$F = n m_1 v .$$

3. Статическое положение отклонённого из положения равновесия ящика позволяет составить на основе второго закона Ньютона следующую систему уравнений, решение которой определяет величину n

$$\left.\begin{array}{l} F - T\sin\alpha = 0, \\ T\cos\alpha - m_2 g = 0. \end{array}\right\},$$

$$tg\alpha = \frac{F}{m_2 g}, \quad \Rightarrow \quad tg\alpha = \frac{n m_1 v}{m_2 g}, \quad \Rightarrow \quad n = \frac{tg\alpha\, m_2 g}{n m_1 v}.$$

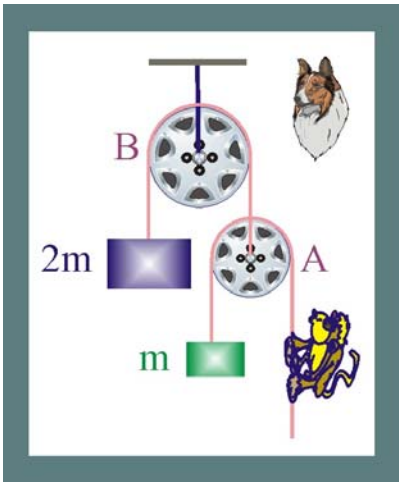


Рис. 160. Обезьянка

160. Примат (0безъянка) массой m уравновешен противовесом на подвижном блоке A. В свою очередь, блок A уравновешен грузом массой 2m на блоке B. В исходном состоянии система неподвижна. С какой скоростью станет подниматься груз, если обезьянка будет равномерно относительно себя выбирать верёвку со скоростью u. Блоки идеальны.

Решение

1. Поднимаясь равномерно вверх, обезьянка приобретает импульс

$$p_1 = mu;$$

2. В проекции на вертикальную ось импульс всей системы должен сохраняться, чтобы такое состоялось, груз должен опускаться вниз, при этом

$$(2m + 2m)v = mu; \quad \Rightarrow \quad v = \frac{u}{4};$$

---

161. На чаше весов прыгает N шариков массы m каждый. Какова средняя сила, действующая на чашу весов, если скорость шариков по модулю не меняется? Увеличивается или уменьшается эта сила, если после удара скорость каждого шарика уменьшается?

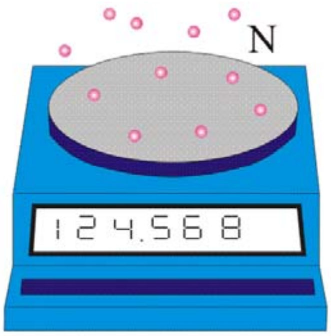


Рис. 161. Прыгающие шарики

Решение

1. Если модуль скорости шариков при отскоке не меняется, значит, их взаимодействие с чашкой весов происходит по абсолютно упругой схеме. Это значит, что средний импульс чашки не изменяется во время отскока.

2. При соприкосновении шарика с поверхностью происходит упругая деформация его объёма, которая в короткое время исчезает, сообщая шарику скорость в обратном направлении.

3. На показания весов оказывают влияние только те шарики, которые за исследуемый промежуток времени находились на чашке. Таким образом, средняя, за некоторый промежуток времени, больший, чем время прыжка шарика, сила будет равна суммарному весу всех шариков

$$F = Nmg.$$

---

162. Внутри сферы радиуса R со скоростью v движется частица массы m, упруго ударяясь о ее стенки. Скорость частицы образует угол ψ с радиусом, проведенным в точку удара. Какова по модулю средняя сила, действующая со стороны стенок сферы на частицу? Какое давление создаёт частица? Как изменится давление, если внутри сферы содержится N таких не взаимодействующих частиц?

Решение

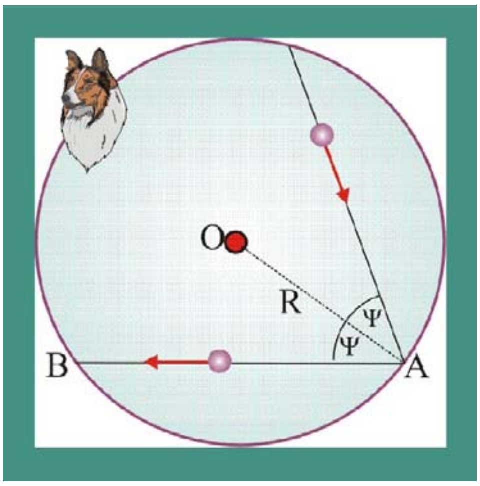


Рис. 162. Частица внутри сферы

1. Найдём перпендикулярную поверхности сферы составляющую импульса частицы

$$p_{\perp} = 2mv\cos\psi .$$

2. Путь AB, который способна проделать частица после первого удара о поверхность $AB = 2R\cos\psi$.

3. Число ударов частицы о стенку с единицу времени составит

$$\nu = \frac{v}{2R\cos\psi} .$$

4. Сумма всех импульсов одной частицы, сообщённых стенке за единицу времени, составит

$$\sum_{k=1}^{k=z} p_{\perp k} = 2mv\cos\psi \frac{v}{2R\cos\psi} = \frac{mv^2}{R} .$$

5. Импульс в единицу времени равен силе, действующей со стороны частицы на стенку, т.е.

$$F = \frac{mv^2}{R} .$$

6. Давление, оказываемое частицей на стенку, определим, поделив силу (4) на площадь сферы

$$P = \frac{F}{s} = \frac{1}{R}\frac{mv^2}{4\pi R^2} = \frac{mv^2}{4\pi R_3} = \frac{1}{3}\frac{mv^2}{V_{Сф}} .$$

7. Если внутри сферы с указанной скоростью будут летать N молекул, то, создаваемое ими давление определится как

$$P_N = \frac{1}{3}\frac{Nmv^2}{V_{Сф}} .$$

---

163. Ракета массы m зависла над поверхностью Земли. Сколько топлива в единицу времени она должна расходовать при этом, если скорость истечения газа u? Как изменится результат, если ракета поднимается с ускорением a?

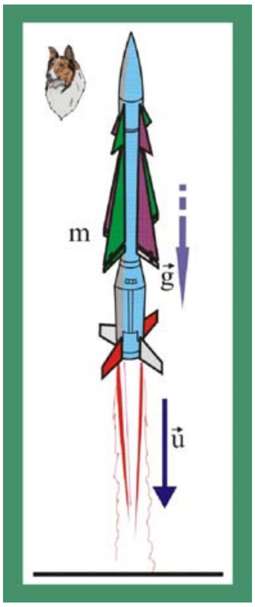


Рис. 163. Ракета

Решение

1. Зависание ракеты над Землёй означает, что сила тяжести компенсируется силой тяги двигателей. Так как ракетные двигатели имеют реактивный принцип движения, то теорема об изменении импульса будет иметь вид

$$mg\Delta t = \mu\Delta tu ,$$

где μ - секундный расход топлива, превращающегося в газы, истекающие со скоростью u. Сокращая на время, получим

$$\mu = mg/u .$$

2. При движении ракеты с ускорением a вверх, уравне-

ние для расхода топлива примет вид

$$\mu_a = \frac{m(g+a)}{u}.$$

164. Ракета сечения S, двигаясь в космическом пространстве со скоростью u, попадает в облако неподвижной пыли плотности ρ. Какую силу тяги должны развивать двигатели ракеты, чтобы та могла продолжать двигаться с той же постоянной скоростью? Удары пылинок о ракету считать абсолютно неупругими. Изменением массы ракеты пренебречь.

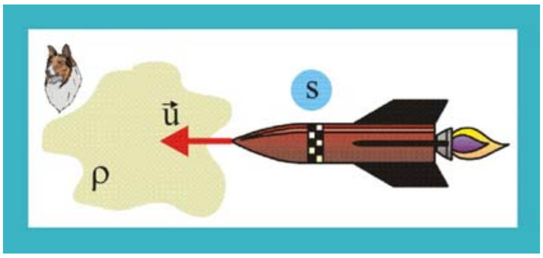


Рис. 164. Ракета в облаке космической пыли

Решение

1. Продвижение ракеты в пылевидном облаке будет сопровождаться её торможением, потому что ракета часть своего импульса будет отдавать при неупругом взаимодействии пылинкам. Чтобы определить количественно импульс надо найти массу взаимодействующих с корпусом ракеты пылинок.

2. Путь, проделанный ракетой в облаке за данный промежуток времени:

$$L = u\Delta t.$$

3. Объём, образованный следом ракеты при перемещении в пылевом облаке:

$$V = su\Delta t.$$

4. Масса пылинок заключённых в объёме V может быть определена через плотность пылевого облака

$$m = \rho V = \rho su\Delta t.$$

5. Изменение импульса ракеты при неупругом взаимодействии с пылинками запишется так

$$\Delta p = \rho su\Delta t \cdot u.$$

6. Для компенсации суммарного импульса пылинок необходимо обеспечить изменение импульса силы тяги на величину $\Delta F\Delta t$

$$F\Delta t = \rho su^2\Delta t, \quad \Rightarrow \quad \langle F \rangle = \rho su^2.$$

165. Определите силу тяги воздушно-реактивного двигателя самолета, летящего со скоростью v. Массовый расход топлива и поступающего в двигатель воздуха равен μ_1 и μ_2 соответственно. Скорость продуктов сгорания относительно самолета на выходе из двигателя u.

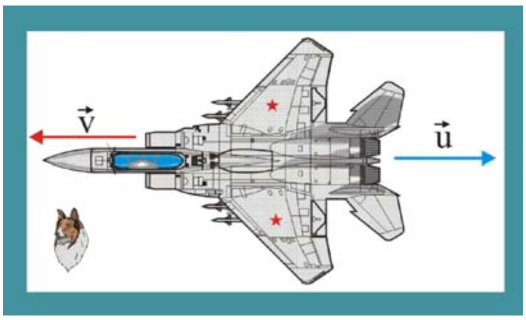


Рис. 165. Реактивная сила тяги

Решение

1. Определим относительную скорость поступающего в камеру сгорания воздуха

$$v_1 = u - v.$$

2. Самолёт описанного в условии типа имеет реактивный принцип движения, для него справедлива теорема об изменении импульса, т.к. систему

«окислитель – топливо - самолёт» можно считать замкнутой. Все внешние силы перпендикулярны направлению полёта, поэтому

$$F\Delta t = \mu_2 \Delta t(u - v) + \mu_1 \Delta t u,$$

откуда

$$F = \mu_2 (u - v) + \mu_1 u.$$

---

166. Водометный катер движется в спокойной воде. Сила сопротивления воды движению катера $F = kv^2$. Скорость выбрасываемой воды относительно катера u. Определите установившуюся скорость катера, если сечение потока захваченной двигателем воды S, плотность воды ρ.

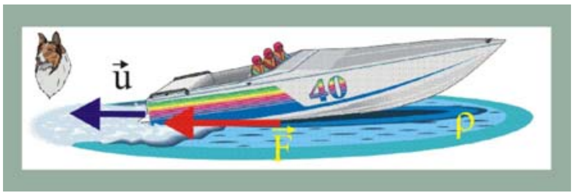


Рис. 166. Водомётный движитель

Решение

1. Чтобы катеру с водомётным движителем перемещаться с постоянной скоростью необходимо, чтобы импульс силы сопротивления был равен импульсу выбрасываемой жидкости

$$F\Delta t = m_f v,$$

где m_f – масса жидкости, перемещаемая водомётом за время Δt.

2. Определим эту массу:

$$m_f = \rho s(u - v)\Delta t.$$

3. Подставим значение массы и силы сопротивления

$$kv^2 = \rho s u v - \rho s v^2,$$

$$v = \frac{\rho s u}{\rho s + k}.$$

---

167. Труба радиуса r заполнена пористым веществом плотности ρ_0. Поршень, на который действует постоянная сила F, двигаясь в трубе, уплотняет вещество до плотности ρ. С какой скоростью движется поршень, если уплотнение вещества происходит скачком, т.е. в трубе перемещается с некоторой скоростью граница раздела, справа от которой плотность вещества ρ, а слева - ρ_0? В начальный момент эта граница совпадает с поверхностью поршня.

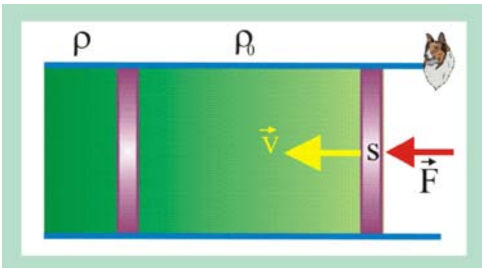


Рис. 167. Труба с пористым веществом

Решение

1. Определим изменение объёма вещества при перемещении поршня за время Δt

$$\Delta V = sv\Delta t = \pi r^2 v \Delta t.$$

2. Получим уравнение, описывающее процесс изменения плотности вещества, т.е. эквивалентную плотность из следующих соображений

$$V = \frac{m}{\rho}, \quad V_0 = \frac{m}{\rho_0}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta V}{m} = \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_э},$$

$$\rho_э = \frac{\rho_0 \rho}{\rho - \rho_0}.$$

3. Запишем далее теорему об изменении импульса

$$F\Delta t = mv = \rho_з \Delta V v\text{, или }\; F = \pi r^2 v^2 \frac{\rho\rho_0}{\rho - \rho_0}.$$

4. Выразим искомую скорость поршня

$$v = \sqrt{\frac{F(\rho - \rho_0)}{\pi r^2 \rho\rho_0}}.$$

---

168. Однородная цепочка одним концом подвешена на нити так, что другим она касается поверхности стола. Нить пережигают. Определите зависимость силы давления цепочки на стол от длины еще не упавшей ее части. Удар звеньев о стол неупругий, масса цепочки m*,* ее длинаL.

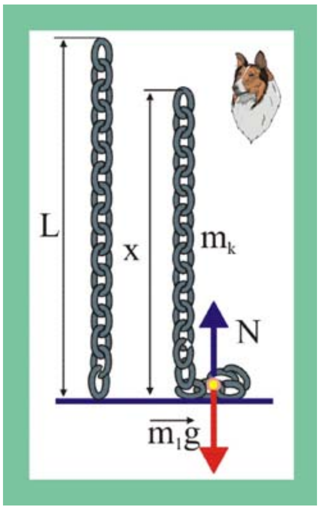


Рис. 168. Падение цепочки

Решение

1. Определим массу единицу длины цепи как

$$m_k = m/L.$$

2. С учётом (1) масса цепи, лежащей на полу в зависимости от x (длины не упавшей цепи) запишется следующим образом

$$m_1 = \frac{m}{L}(L - x) = m\left(1 - \frac{x}{L}\right).$$

3. Сила, с которой цепь действует на пол, будет иметь две составляющие: статическую, обусловленную веслом упавшей цепи и динамическую, вызванную передачей падающими звеньями импульса при неупругом взаимодействии с полом

$$N = m_1 g + F_D.$$

4. Динамическую составляющую можно определить по теореме об изменении импульса

$$\frac{1}{2}F_D \Delta t = m_1 v = m\left(1 - \frac{x}{L}\right) g \Delta t.$$

5. Величина динамической составляющей силы давления при падении цепи изменяется от нуля до некоторого значения F_D, в этой связи, средняя величина определится как $F_D/2$

$$F_D = 2mg\left(1 - \frac{x}{L}\right).$$

6. Подставим в исходное уравнение найденные значения

$$N = mg\left(1 - \frac{x}{L}\right) + 2mg\left(1 - \frac{x}{L}\right),$$

$$N = 3mg\left(1 - \frac{x}{L}\right).$$

---

169. С какой силой давит на землю змея, когда она, готовясь к прыжку, поднимается вертикально вверх с постоянной скоростью v? Масса змеи m, ее длина L.

Решение

1 Для подъёма своего тела кобра должна совершить работу чтобы изменить положение своего центра масс и сообщить ему скорость. Если предположить, что кобра становится на хвост, то центр тяжести приподнимется над поверхностью земли на расстояние L/2.

2 Энергетическое состояние кобры перед прыжком определится в виде суммы кинетической энергии, обусловленной движением вертикально вверх и потенциальной энергией конечного положения центра масс. Таким образом

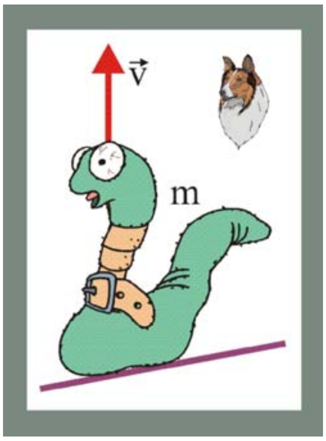


Рис. 169. Змея

$$A = \frac{mv^2}{2} + mg\frac{L}{2}, \quad F\frac{L}{2} = \frac{mv^2}{2} + mg\frac{L}{2},$$

$$F = \frac{m}{L}\left(v^2 + gL\right).$$

---

170. Цепь с неупругими звеньями перекинута через блок, причем часть ее лежит на столе, а часть – на полу. После того как цепь отпустили, она начала двигаться. Найдите скорость установившегося равномерного движения цепи. Высота стола h.

Решение

1 Движение цепи обусловлено изменением положения центра масс участка, соответствующего высоте стола h. Если за нулевой уровень потенциальной энергии принять пол, то центр масс этого участка цепи расположен на расстоянии h/2 от пола.

2 Таким образом, величина кинетической энергии цепи при её движении будет определяться потенциальной энергией центра масс участка цепи протяжённостью h

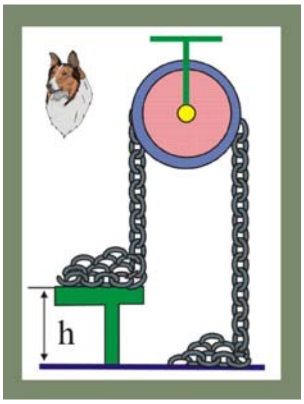


Рис. 170. Скорость цепи

$$\frac{mv^2}{2} = mg\frac{h}{2}, \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{gh}.$$

---

171. Из ракеты массой M выбрасываются продукты сгорания порциями со скоростью v относительно среза сопла и с массой m каждого выброса. Пренебрегая действием силы тяжести и сопротивлением среды, определить скорость ракеты u_n поле вылета n-й порции продуктов сгорания.

Решение

1. Запишем закон сохранения импульса для системы «ракета – k-я порция продуктов сгорания» в системе, движущейся после выброса (k – 1) порции

Рис. 171. Порционные выбросы

$$\left(M - km\right)\Delta u_k = m\left(v - \Delta u_k\right),$$

где Δu_k – скорость, которую приобретает ракета в ПСК, движущейся со скоростью, обеспеченной выбросом (k – 1) порцией вещества. Величина $(v - u_k)$ представляет собой скорость k-й порции в момент её разделения с ракетой.

2. Скорость самой ракеты относительно Земли будет равна сумме изменений её скорости при вылете всех n порций

$$u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \Delta u_k = v\left(\frac{m}{M} + \frac{m}{M-m} + \frac{m}{M-2m} + \cdots + \frac{m}{M-(n-1)m}\right);$$

$$u_n = v\sum_{k=1}^{k=n} \frac{m}{M-(k-1)m};$$

---

172. Ракету массой M запускают вертикально. Скорость истечения газов из сопла равна v. При каком расходе топлива μ сила тяги будет достаточна для зависания ракеты и сообщения ей ускорения a = 20 м/с^2?

Решение

1. При расходе топлива μ_1 ракете в единицу времени сообщается импульс

$$\Delta p_1 = \mu_1 v,$$

который согласно законам Ньютона должен быть равен реактивной силе, способной компенсировать силу тяжести

$$\mu_1 v = Mg; \quad \Rightarrow \quad \mu_1 = \frac{Mg}{v};$$

2. при движении ракеты вертикально вверх с ускорением а уравнение изменения импульса представится в следующем виде:

$$Ma = \mu_2 v - Mg; \quad \Rightarrow \quad \mu_2 = \frac{M(a+g)}{v};$$

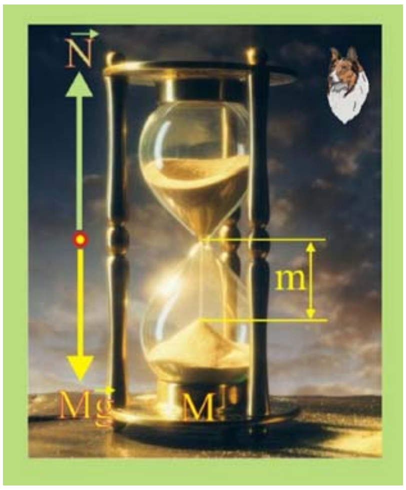


Рис. 3.96. Песочные часы

173. На горизонтальной поверхности стоят работающие песочные часы. Сила тяжести, действующая на часы равна $\vec{F}_G = M\vec{g}$. Сила тяжести, действующая на песчинки, находящиеся в воздухе равна $\vec{f}_G = m\vec{g}$. Какова сила давления часов на опорную поверхность?

Решение

1. Песочные часы представляют собой замкнутую механическую систему, импульс которой должен сохраняться, т.к. перемещение песчинок друг относительно друга в поле силы тяжести происходит под действием внутренних сил. Исключение составляет начальный и конечный момент истечения песка. Все действующие на часы силы уравновешены, т.е.

$$M\vec{g} + \vec{N} = 0; \quad N = Mg;$$

другими словами, количество песка, находящегося в воздухе не влияет на силу давления песочных часов, на опорную плоскость.

---

174. Космический аппарат, путешествующий в безбрежных просторах космического пространства при скорости v_0 = 10^4 м/с, попадает в неподвижное метеоритное облако. В V_0 = 1 $м^3$ облака присутствует n = 1 микрометеорит со средней массой $m_0 \approx 2\cdot10^{-5}$ кг. На сколько нужно увеличить силу тяги двигателя ракеты, чтобы скорость космического корабля при прохождении облака не изменилась? Лобовое сечение ракеты равно s = 49 $м^2$. Взаимодействие с метеоритами происходит по абсолютно неупругой схеме.

Решение

Рис. 174. Метеоритное облако

1. Перемещение космического аппарата в метеоритном облаке сопровождается приобретением микрометеоритами импульса от обшивки корабля. Скорость каждого микрометеорита изменяется, при этом, от нуля до скорости корабля v. Одновременно такой же импульс, но с обратным направлением получает и корабль, в результате чего его скорость должна уменьшаться. Прирост силы тяги двигателей должен быть тем большим, чем больше изменение импульса частиц в единицу времени.

2. Если за время Δt корабль пройдёт расстояние *l*, то импульс частиц, находящихся в объёме цилиндра с площадью основания s и высотой *l* возрастёт от нуля до величины $m\vec{v}$, и частицы будут двигаться вместе с кораблём. Изменение импульса микрометеоритов происходит за счёт изменения импульса силы тяги

$$F\Delta t = mv;$$

3. Определим массу частиц, увлекаемых кораблём за время Δt

$$m = \frac{nm_0}{V_0}s\ell;$$

4. При рассмотрении достаточно малых промежутков времени, движение на участке протяжённостью *l* можно считать равномерным, т.е.

$$\ell = v\Delta t;$$

5. Подставим найденные величины в уравнение изменения импульса

$$F\Delta t = \frac{nm_0 sv^2\Delta t}{V_0}; \quad \Rightarrow \quad F = \frac{nm_0 sv^2}{V_0} \cong 10^5\ H;$$

---

175. В сигнальной ракете массой M = 0,6 кг содержится m = 0,35 кг взрывчатого вещества. На какую высоту поднимется ракета, если топливо сгорит мгновенно и будет выброшено через сопло со скоростью v = 300 м/с? Известно, что сопротивление воздуха примерно в шесть раз уменьшает теоретическую высоту вертикального подъёма ракеты.

Решение

1. Систему «ракета – взрывчатое вещество» можно считать замкнутой, т.е. к ней возможно применить закон сохранения импульса

$$(M - m)u = mv; \quad u = \frac{mv}{M - m};$$

2. Используя далее кинематические уравнения равнозамедленного движения, получим теоретическую высоту подъема ракеты

$$h_1 = \frac{gt^2}{2}; \quad u = gt; \quad t = \frac{v}{g}; \quad h_1 = \frac{u^2}{2g} = \frac{(mv)^2}{2g(M-m)^2} /$$

3. Реальная высота подъёма

$$h = \frac{h_1}{6} = \frac{(mv)^2}{12g(M-m)^2} \cong 1470\,\text{м}.$$

---

176. Стартовая масса метеорологической ракеты составляет M = 120 кг. Расход топлива ракеты равен μ = 4 кг/с, скорость истечения продуктов сгорания u = 10^3 м/с. На какой высоте окажется ракета через t = 15 с после старта?

Решение

1. Запишем уравнение Ивана Всеволодовича Мещерского без учёта сил сопротивления со стороны среды, но с учётом действия силы тяжести

$$(M - \mu t)\frac{dv}{dt} = \mu u - (M - \mu t)g; \quad M - \mu t = M_t;$$

$$M_t \frac{dv}{dt} = \mu u - M_t g;$$

2. Разделим в полученном уравнении переменные v и t и проинтегрируем

$$dv = \left(\frac{\mu u}{M - \mu t} - g\right)dt;$$

$$\int_0^v dv = \int_o^t \left(\frac{\mu u}{M - \mu t}\right)dt - \int_0^t g dt;$$

$$v = u \ln\frac{M}{M - \mu t} - gt = 10^3 \ln\frac{120}{120 - 60} - 150 \cong 543\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

3. Для определения высоты ещё раз разделим переменные и повторно проинтегрируем

$$v = \frac{dy}{dt} = u \ln\frac{M}{M - \mu t} - gt;$$

$$dy = \left(u \ln\frac{M}{M - \mu t}\right)dt - gtdt; \quad \int_0^h dy = \int_0^t \left(u \ln\frac{M}{M - \mu t}\right)dt - \int_0^t gtdt;$$

$$h = ut - \frac{gt^2}{2} + \frac{uM}{\mu}\left(1 - \frac{\mu t}{M}\right) \cdot \ln\left(1 - \frac{\mu t}{M}\right) \approx 3500\,\text{м}.$$

---

177. Возможно ли для межзвёздных полётов использовать ракеты, использующие окисление водородного топлива? Теплотворная способность водорода примерно равна ζ = $1\cdot 10^8$ Дж/кг. Принять массу ракеты M = $2\cdot 10^4$ кг и скорость v = 0,01 c.

Решение

1. Закон сохранения импульса даёт $mu = Mv$, где m – масса сгоревшего топлива, u скорость газов. Скорость u можно оценить из уравнения реакции горения водорода $2H_2 + O_2 = 2H_2O$, которая определяет, что для окисления 4 кг водорода необходимо 32 кг кислорода. Предельная скорость истечения газов, при этом составит,

$$u_{max} = \sqrt{\frac{2}{9}\zeta} \cong 5 \cdot 10^3\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

2. Для оценки массы топлива воспользуемся формулой К.Э. Циолковского

$$\frac{M+m}{m} = \exp\left(\frac{v}{u}\right); \quad \Rightarrow \quad m = Me^{600} = 2\cdot 10^{264}\,\text{кг},$$

что существенно превосходит массу Солнца $M_C \approx 2\cdot 10^{27}$ кг. Самые современные технологии окисления химического топлива могут обеспечить $u \approx 10^4$ м/с, что для межзвёздных путешествий не приемлемо. Идеальный вариант $u = c = 3\cdot 10^8$ м/с, т.е. вариант фотонной ракеты.

---

178. Две лодки массами $M_1 = 500$ кг и $M_2 = 1000$ кг, в каждой из которых находится груз массой $m = 100$ кг следуют встречными параллельными курсами со скоростями $v_1 = 3$ м/с и $v_2 = 6$ м/с. Когда лодки находятся напротив друг друга, с каждой лодки во встречную перебрасывают груз m. Определите, с какой скоростью после этого станут двигаться лодки.

Решение

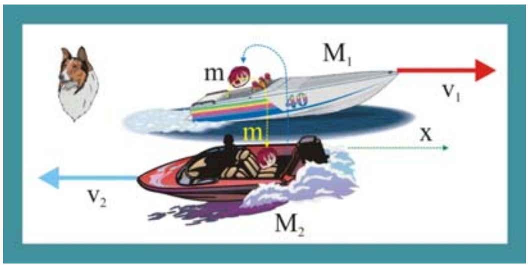


Рис. 178. Обмен грузами между лодками

1. В данном случае целесообразно выделить две замкнутые системы материальных точек: первая лодка массой M_1 и груз второй лодки m; вторая система – лодка M_2 и груз первой лодки m. Для этих систем закон сохранения импульса при перебрасывании груза в проекции на ось x запишется следующим образом

$$M_1 v_1 - m v_2 = (M_1 + m)u_1,$$

$$-M_2 v_2 + m v_1 = -(M_2 + m)u_2.$$

2. Разрешая полученную систему уравнений относительно скоростей лодок u_1 и u_2 после перебрасывания груза, получим

$$u_1 = \frac{M_1 v_1 - m v_2}{M_1 + m} = 1{,}5\,\frac{\text{м}}{\text{с}},$$

$$u_2 = \frac{M_2 v_2 - m v_1}{M_2 + m} = 5{,}2\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

---

179. Определите скорость ракеты в момент полного выгорания топлива, если начальная масса ракеты $m_0 = 100$ кг, масса заряда $m_з = 50$ кг, относительная скорость выхода продуктов сгорания $u = 800$ м/с. Сопротивление воздуха и ускорение силы тяжести не учитывать.

Решение

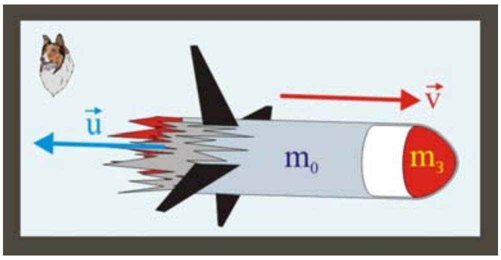


Рис. 179. Скорость ракеты

1. Запишем уравнение закона сохранения импульса для материальной точки переменной массы

$$mv = (m - dm)(v + dv) + dm(u + v),$$

где m – текущая масса ракеты, dm – изменение массы ракеты за бесконечно малое время dt, dv – изменение скорости ракеты за время dt, (u + v) – абсолютная скорость продуктов сгорания.

2. Преобразуем уравнение к виду, удобному к разделению переменных и последующему интегрированию

$$mv = mv - vdm - dmdv + mdv + dmu + dmv,$$

$$mdv + dmu - vdm = 0, \Rightarrow \frac{dv}{u - v} = \frac{dm}{m}.$$

3. Проинтегрируем последнее уравнение с учётом того, что скорость меняется от 0 до v, а масса от m_0 до m

$$\int_0^v \frac{dv}{u - v} = \int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m}, \Rightarrow v = u \ln \frac{m_0}{m} = u \ln \frac{m_0}{m_0 - m_з} \cong 555 \text{ м/с}.$$

---

180. Самоходная артиллерийская установка массы M начинает скользить по инерции вниз по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, пройдя расстояние L, она произвела горизонтальный выстрел, вследствие чего остановилась, импульс вылетевшего снаряда был равен $\vec{p}$. Пренебрегая массой снаряда по сравнению с установкой, определите время движения снаряда по каналу ствола.

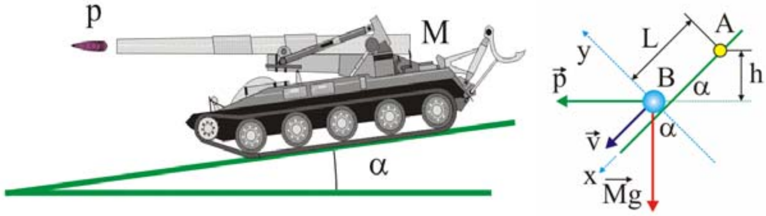


Рис. 180. Самоходная артиллерийская установка на склоне

Решение

1. Предположим, что самоходная артиллерийская установка начинает скользить по наклонной плоскости из точки A и пройдя расстояние L до точки B, опускается на высоту h, что позволяет определить скорость пушки v в момент выстрела

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gL\sin\alpha}.$$

2. Движение вниз по плоскости будет происходить исключительно под действием проекции силы тяжести на ось ox $(Mg)_x = Mg\sin\alpha$.

3. Импульс установки перед выстрелом определится, таким образом, как

$$p_1 = M\sqrt{2gL\sin\alpha}.$$

4. Запишем теорему об изменении импульса системы «снаряд – орудие» с учётом полной остановки пушки после выстрела

$$Mg\sin\alpha\Delta t = p\cos\alpha - M\sqrt{2gL\sin\alpha},$$

откуда и определим время выстрела

$$\Delta t = \frac{p\cos\alpha - M\sqrt{2gL\sin\alpha}}{Mg\sin\alpha}.$$

Кинетическая энергия. Работа. Потенциальная энергия

181. Пучок частиц различной массы, имеющих одну и ту же скорость v и одинаковый заряд q, направили по нормали к двум сеточным электродам, между которыми имеется разность потенциалов $\Delta\varphi$. При какой наименьшей массе частиц в пучке все они достигнут второй сетки, если ширина зазора между электродами равна d?

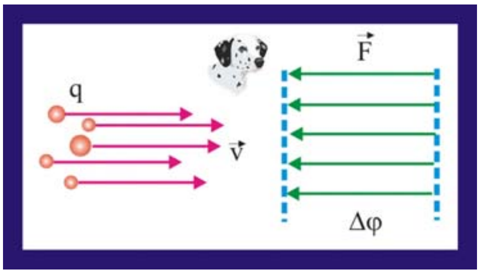


Рис. 181. Частицы в электрическом поле

Решение

1. Определим величину силы, действующей на частицу в зазоре между электродами и совершаемую ей работу по торможению частиц

$$F = qE = q\Delta\varphi/d, \quad \Rightarrow \quad A_{1,2} = Fd = q\Delta\varphi .$$

2. Запишем уравнение теоремы об изменении кинетической энергии частиц с минимальным значением массы

$$\frac{m_{min}v_2^2}{2} - \frac{m_{min}v_1^2}{2} = A_{1,2} .$$

3. По условию задачи конечная скорость частиц с m_{min}, при достижении второго электрода должна быть равной нулю, $v_2 = 0$, поэтому

$$\frac{m_{min}v_1^2}{2} = q\Delta\varphi \Rightarrow m_{min} = \frac{2q\Delta\varphi}{v^2} .$$

---

182. Определите силу, действующую на частицу массы m в зазоре ширины d между сеточными электродами, если скорость ее изменилась от значения v_1 у первого электрода, до значения v_2 у второго? Как по значениям скорости частицы узнать направление действующей на нее силы?

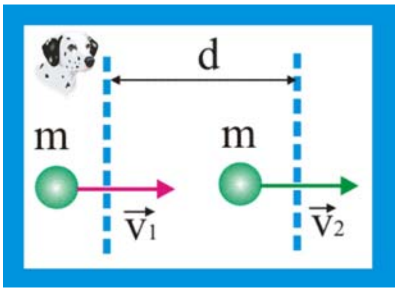


Рис. 182. Работа электрического поля

Решение

1. Теорема об изменении кинетической энергии для заданного случая движения частицы будет иметь вид:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_{1,2} = Fd,$$

откуда

$$F = \frac{m\left(v_2^2 - v_1^2\right)}{2d} .$$

2. Если $v_1 > v_2$, то частица тормозится и сила направлена в сторону, противоположную движению. Если же, обратно, $v_1 < v_2$, то частица разгоняется, а сила F по направлению совпадает с перемещением.

---

183. Для испытания оборудования в условиях перегрузок и невесомости контейнер с ним подбрасывается на высоту 125 м пневматическим поршневым устройством, находящимся на дне вакуумной шахты. С какой силой действует поршень, подбрасывая контейнер, если при этом он выдвигается на длину h = 1 м, а масса контейнера с оборудованием m = 2 т?

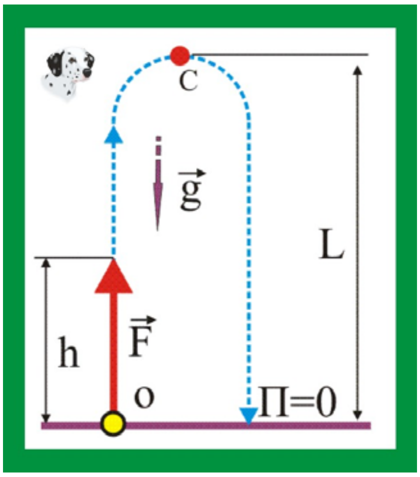


Рис. 183. Испытания контейнера

Решение

1. Сила, отправляющая контейнер в полёт, производит работу на перемещении h = 1м.

2. Контейнеру сообщается некая кинетическая энергия К, которая в верхней точке траектории С полностью преобразуется в потенциальную энергию П. Поскольку шахта, в которой происходит движение вакуумированная, то сопротивлением воздуха при движении можно поступиться. Закон сохранения энергии в этом случае будет иметь вид

$$Fh = \frac{mv^2}{2} = mgL, \Rightarrow F = \frac{mgL}{h} = 2{,}5\cdot 10^6\,H.$$

184. Некто, массой M = 70 кг наступает на грабли с массой черенка m = 1 кг и длиной L = 1,5 м. Оцените скорость конца черенка при подлёте к личности наступившего, если высота стержней равна r = 0,1м.

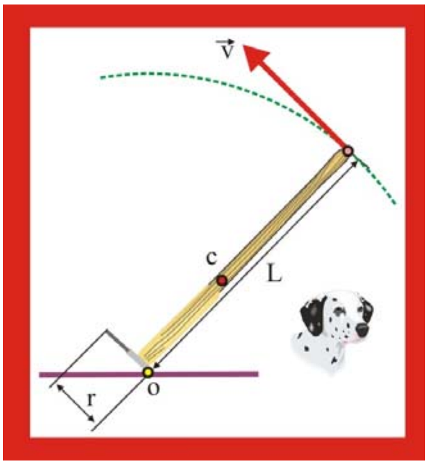


Рис. 184. Грабли

Решение

1. Предположим, что человек наступает на стержни одной ногой и они из вертикального положения переходят в горизонтальное, поворачиваясь на угол π/2. Концы стержней при этом переместятся по дуге окружности длиной s = πr/2.

2. Если человек наступил на грабли одной ногой, что наиболее вероятно по жизни, то работу произведённую силой, равной половине его веса можно представить так:

$$A \approx \frac{Mg}{2}\frac{\pi r}{2} = \frac{\pi Mgr}{4}.$$

3. Работа, определяемая уравнением, в соответствии с законом сохранения энергии должна быть равна сумме кинетической и потенциальной энергии центра масс граблей. Будем считать, условно, что центр масс располагается в точке С, лежащей на середине черенка, тогда

$$\frac{mv_C^2}{2} + \frac{mgL}{2} \approx \frac{\pi Mgr}{4},$$

где v_C – скорость центра масс, откуда

$$v_C \approx \sqrt{g\left(\frac{\pi Mr}{2m} - L\right)},$$

4. Искомая скорость v_x будет в два раза больше v_C, т.к. черенок вращается вокруг точки O

$$v_x \approx 2\sqrt{g\left(\frac{\pi Mr}{2m} - L\right)} \cong 19 \text{ м/с}.$$

---

185. Сила, действующая на снаряд массы m в стволе орудия, нарастает равномерно от нуля до F_0 на участке ствола длины l_1, не меняется на участке ствола длины l_2 и, наконец, равномерно уменьшается до нуля на участке ствола длины l_3. Какова скорость снаряда при вылете из ствола?

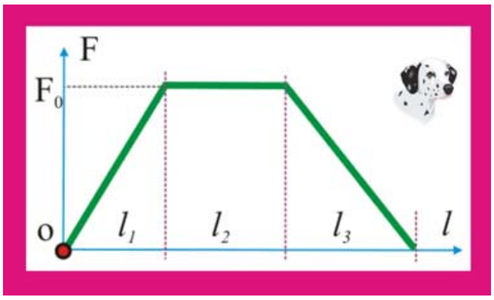


Рис. 185. Переменная сила и снаряд

Решение

1. Работа заданной силы на отдельных участках ствола определится как: на участке протяжённостью l_1

$$A_1 = \int_0^{l_1} F_0 dl = F_0 \frac{l_1}{2},$$

на участке l_2 сила постоянна, поэтому

$$A_2 = F_0 l_2,$$

на участке l_3

$$A_3 = \int_{l_3}^{0} F_0 dl = F_0 \frac{l_3}{2}.$$

2. Полная работа по разгону снаряда в канале ствола будет равна сумме работ на отдельных участках

$$A_\Sigma = A_1 + A_2 + A_3 = F_0\left(\frac{l_1}{2} + l_2 + \frac{l_3}{2}\right).$$

3. Скорость снаряда можно найти, используя теорему об изменении кинетической энергии, с учётом равенства нулю начальной скорости

$$\frac{mv^2}{2} = A_\Sigma, \Rightarrow v = \sqrt{\frac{F_0(l_1 + 2l_2 + l_3)}{m}}.$$

---

186. Однородный брусок, скользящий по гладкой горизонтальной поверхности, попадает на шероховатый участок этой поверхности ширины L. Коэффициент трения равен μ. При какой минимальной начальной скорости он преодолеет этот участок?

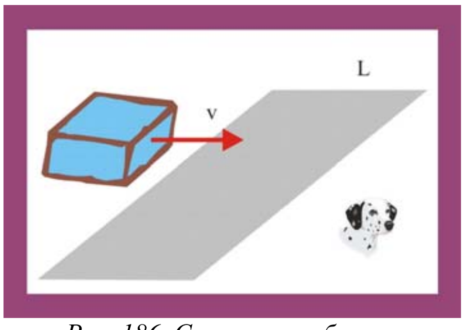


Рис. 186. Скольжение бруска

Решение

1. Кинетическая энергия бруска в начале шероховатого участка имеет максимальное значение, а по мере перемещения по шероховатой области за счёт работы против силы трения уменьшается, и на перемещении должна обратиться в ноль. Это буде соответствовать минимуму начальной скорости

$$\frac{mv_{min}^2}{2} = A(F_{Тр}), \quad \text{или} \quad \frac{mv_{min}^2}{2} = \mu mgL,$$

откуда

$$v_{min} = \sqrt{2mgL}\,.$$

---

187. Оконную штору массы m = 1 кг и длины L = 2 м свертывают в тонкий валик над окном. Какова наименьшая затрачиваемая при этом работа? Трением пренебречь.

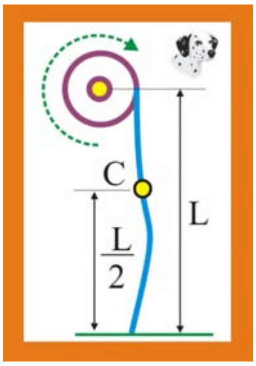


Рис. 187. Штора

Решение:

1. Предположим, что штора однородна по длине и её центр масс располагается на середине. Будем считать, что нулевой уровень потенциальной энергии центра масс соответствует его начальному положению. При сворачивании шторы центр переместится на L/2 вверх, минимальная работа, совершаемая против силы тяжести, определится как:

$$A = \frac{mgL}{2} \cong 10 Дж\,.$$

188. Пружина жесткости k прикреплена одним концом к неподвижной стенке. На другой её конец вдоль пружины с начальной скоростью v налетает шар массы m. Какова наибольшая деформация сжатия пружины? Ответьте на этот же вопрос для случая, когда пружина предварительно сжата и удерживается нерастяжимой нитью, связывающей ее концы (начальная деформация пружины равна x_0).

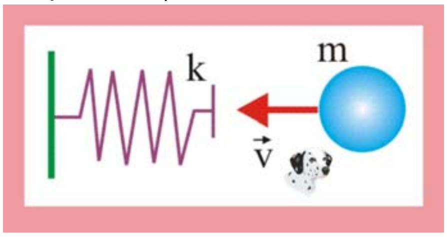


Рис. 188. Деформация пружины

Решение

1. В данном случае кинетическая энергия налетающего шара преобразуется в потенциальную энергию сжатой пружины, причём наибольшая деформация будет соответствовать нулю кинетической энергии, т.е.

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{kx_{max}^2}{2},\Rightarrow x_{max} = \sqrt{m/k}\,.$$

2. В случае предварительно деформированной пружины на величину x_0, уменьшение её длины определится из следующего уравнения закона сохранения

$$\frac{kx_{max}^2}{2} = \frac{kx_0^2}{2} + \frac{mv^2}{2},\Rightarrow x_{max} = \sqrt{x_0 + \frac{mv^2}{k}}\,.$$

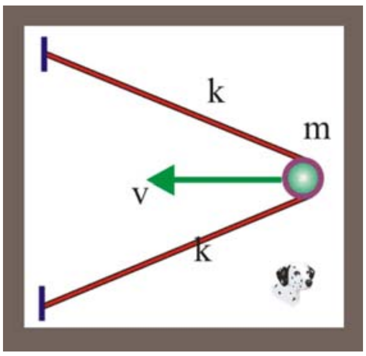


Рис. 189. Выстрел из рогатки

189. Из длинной полоски резины жесткости k сделали рогатку, найдите кинетическую энергию "снаряда", выпущенного из этой рогатки, если резину растянули с силой F и затем отпустили.

Решение

1. Определим эквивалентную жёсткость k_0 растянутых на величину x резинок. Исходя из того, что жёсткость каждой половины равна k. При симметричной деформации

$$x_1 = x_2 = x; \quad F = F_1 + F_2 = 2F = 2kx,$$
$$xk_o = 2kx, \Rightarrow k_0 = 2k.$$

2. Потенциальная энергия готовой к выстрелу рогатки численно равна работе, затраченной на преодоление силы упругости каждой полоски, т.е.

$$2kx = F/2, \Rightarrow x = F/4k, \Rightarrow \Pi = k_o x^2/2 = F^2/8k.$$

3. Потенциальная энергия при выстреле по мере уменьшения деформации преобразуется в кинетическую энергию «снаряда»

$$K = \Pi = F^2/8k.$$

---

190. Тело массой 0,1 кг брошено под углом $\alpha = 60^0$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 10$м/с. Определите минимальную кинетическую энергию тела и максимальную потенциальную энергию.

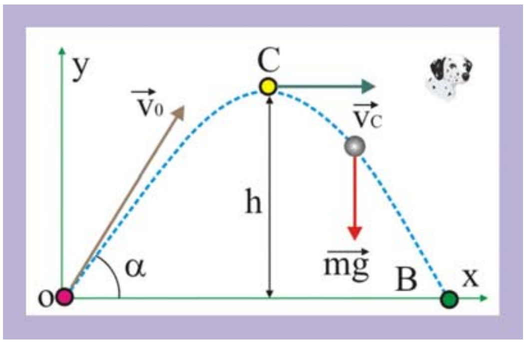


Рис. 190. Энергетика брошенного тела

Решение

1. Максимальное значение кинетической энергии тела при его броске под углом к горизонту без учёта сопротивления будет наблюдаться в стартовой точке O и конечной точке B. Скорость в произвольной точке траектории определяется из условия $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, поэтому минимальное значение скорости будет иметь место в точке C, т.к. $v_{Cy} = 0$, поэтому $v_C = v_0\cos\alpha$. Таким образом, минимальная кинетическая энергия за всё время полёта равна

$$K_{min} = \frac{mv_0^2\cos^2\alpha}{2} \cong 1{,}25\text{Дж}.$$

2. Если за нулевой уровень потенциальной энергии принять поверхность земли, то максимальная высота подъёма тела над горизонтом будет соответствовать максимальному значению потенциальной энергии тела, брошенного под углом горизонта

$$\Pi_{max} = mgh = mg\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{mv_0^2\sin^2\alpha}{2} \cong 3{,}75\text{Дж}.$$

---

191. С верхнего конца доски длины L, образующей угол α с горизонталью, начинает соскальзывать тело массы m. Какую кинетическую энергию оно приобретет, дойдя до нижнего конца доски, если коэффициент трения $\mu < \mathrm{tg}\alpha$? Определите коэффициент полезного действия наклонной плоскости.

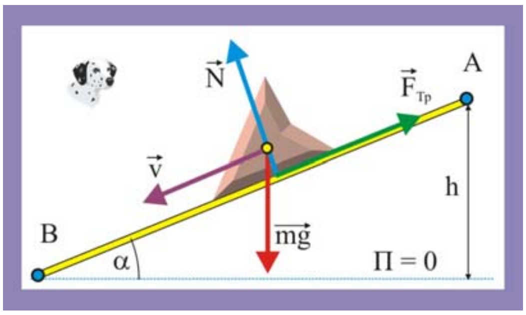


Рис. 191. Соскальзывание тела

Решение

1. Условие $\mu < \mathrm{tg}\alpha$ показывает, что коэффициент трения таков, что тело будет двигаться с некоторым ускорением. В точке A в самом начале спуска тело будет обладать только потенциальной энергией $\Pi = mgL\cos\alpha$.

2. Кинетическая энергия в данном случае будет определяться положительной работой силы тяжести $A(mg) = mg\sin\alpha L$ и отрицательной работой силы тяжести $A(F_{Тр}) = \mu mg\cos\alpha$

$$K_В = mgL(\sin\alpha - \mu\cos\alpha),$$

где $K_В$ – кинетическая энергия тела в точке В.

3. Коэффициент полезного действия наклонной плоскости, как впрочем и любого другого устройства, определяется в виде отношения полезной работы к затраченной

$$\eta = \frac{mdL\cos\alpha - \mu mgL\sin\alpha}{mgL\cos\alpha} = 1 - \mu tg\alpha.$$

Как видно, если бы диссипация энергии на трение отсутствовала, то КПД был бы равен единице.

---

192. Автомобиль с работающим двигателем въезжает на обледенелую гору, поверхность которой образует угол α с горизонтом. Какой высоты гору может преодолеть автомобиль, если его начальная скорость при въезде на нее равна v, а коэффициент трения колес о лед $\mu < tg\alpha$?

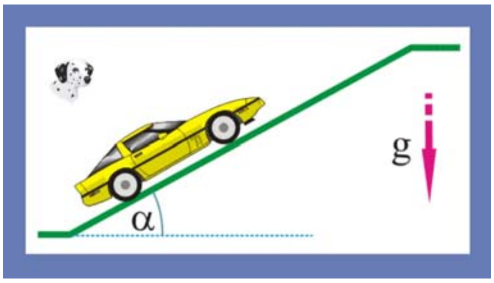


Рис. 192. Автомобиль на ледяном склоне

Решение

1. Примем, что в самом начале спуска потенциальная энергия автомобиля равна нулю, т.е. $E_A = mv^2/2$. В этом случае подъем автомобиля, с энергетических позиций, можно рассматривать как процесс преобразования его кинетической энергии в потенциальную энергию и работу против силы трения. Математически это представится следующим образом

$$\frac{mv^2}{2} = mgh + \mu mg\cos\alpha\frac{h}{\sin\alpha},$$

где h – высота подъёма, которая определится из (1) как

$$h = \frac{v^2}{2g(1 - \mu ctg\alpha)}.$$

---

193. Груз массы m медленно поднимают на высоту h по наклонной плоскости с помощью блока и троса. При этом совершается работа А. Затем трос отпускают, и груз скользит вниз. Какую скорость он наберет, опустившись до исходной точки?

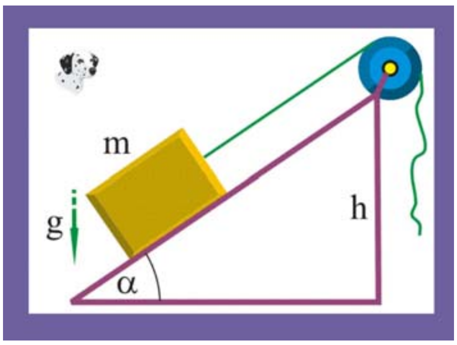


Рис. 193. Подъём груза по плоскости

Решение

1 Поскольку груз поднимают посредствам подвижного блока, то действующая сила равна половине нагрузки. Кроме того, во время спуска против неизвестных сил сопротивления будет затрачена работа А.

2 Если принять за нулевой уровень потенциальной энергии поверхность земли, то закон сохранения в данном случае мож-

но представить в виде

$$\frac{mv^2}{2} = 2mgh - A, \Rightarrow v = \sqrt{4gh - (2A/m)} .$$

---

194. Средневековый поворотный молот имеет тяжелый боек массы m_2 = 50кг на конце стержня длины L= 2м и массы m_1 = 20кг. Его приводят из горизонтального в почти вертикальное положение, поворачивая вокруг оси, проходящей через другой конец стержня. Какую наименьшую работу нужно совершить, чтобы поднять молот, если его размеры много меньше длины стержня? Трением в оси пренебречь.

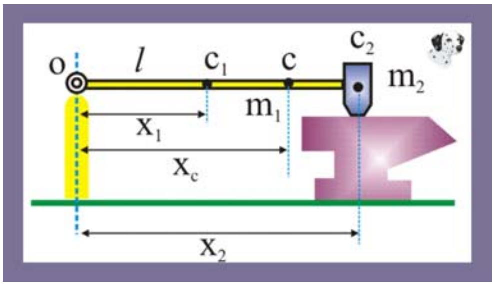


Рис. 194. Поворотный молот

Решение

1. Определим положение центра масс системы относительно оси вращения, проходящей через точку O

$$x_c = (m_1x_1 + m_2x_2)/(m_1 + m_2) \cong 1{,}71\text{м} ,$$

2. Поворот молота сопровождается подъемом центра тяжести на $h = x_c$, поэтому

$$A = (m_1 + m_2)gx_c \cong 1197\text{Дж} .$$

---

195. Шайба, скользившая по гладкой поверхности льда с постоянной скоростью, попадает на шероховатую поверхность, коэффициент трения которой меняется по линейному закону по координате x: $\mu = \alpha x$, где α - положительная постоянная величина. Определите тормозной путь шайбы.

Решение

1. Кинетическая энергия шайбы расходуется на совершение работы против силы трения. В данном случае целесообразно использовать теорему об изменении кинетической энергии

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_{1,2} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = F_{Тр}L ,$$

где L – путь, пройденный шайбой по шероховатой поверхности до остановки.

2. Элементарная работа силы трения определится следующим образом

$$\delta A = \mu mgdx = \alpha xmgdx .$$

3. Работа силы трения на перемещении L рана интегралу

$$A = \int_0^L \alpha xmgdx = \left.\frac{mg\alpha x^2}{2}\right|_0^L = \frac{\alpha mgL^2}{2} .$$

4. Совмещая уравнения, получим

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{\alpha mgL^2}{2}, \Rightarrow L = \frac{v_0}{\sqrt{\alpha g}} .$$

---

196. Грузик, подвешенный на нити длины L, отклонили на расстояние r от точки равновесия и отпустили. Какова его наибольшая скорость?

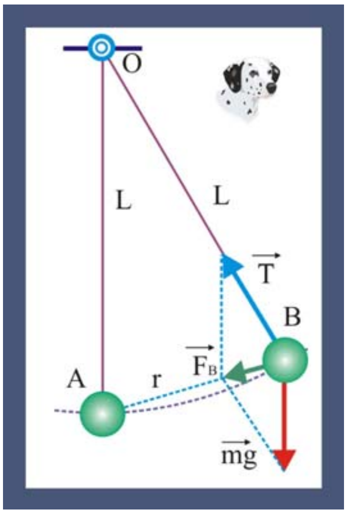


Рис. 196. Маятник

Решение

1. В данном случае рассматривается физическая модель в виде математического маятника, на грузик которого действует система двух сил: сила тяжести и реакция связи – натяжение нити. Геометрическая сумма этих сил, так называемая возвращающая сила, обеспечивает стремление грузика вернуться в положение статического равновесия.

2. Потенциальная энергия в точке А равна нулю, чтобы сообщить грузику маятника некоторую величину потенциальной энергии надо совершить работу против силы тяжести. При движении грузика из точки В в А потенциальная энергия преобразуется в кинетическую энергию, т.е.

$$\frac{mv_A^2}{2} = A(mg) = A(F_B) = F_B r\,.$$

3. Величину возвращающей силы можно найти из геометрических соображений, рассматривая подобные треугольники

$$\frac{mg}{F_B} = \frac{L}{r}, \Rightarrow F_B = \frac{mgr}{L}\,.$$

4. Подставляя значение F_B и решая полученное уравнение относительно максимальной скорости v_A, получим

$$v = r\sqrt{g/L}\,.$$

---

197. По горизонтальному круговому рельсовому пути радиуса R, катится со скоростью v вагонетка массы m. Рабочий бежит за ней и начинает останавливать ее, натягивая привязанный к вагонетке трос с силой F под углом α к направлению скорости вагонетки. Сколько оборотов по кругу совершит вагонетка до остановки?

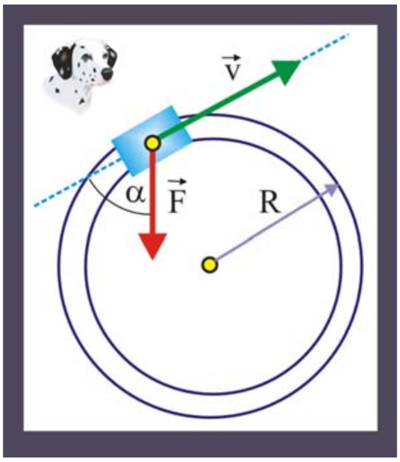


Рис. 197. Остановка вагонетки

Решение

1 Вагонетка остановится, когда вся кинетическая энергия будет израсходована на работу силы F, причём пройденный до остановки путь будет являться верхним пределом интеграла работы

$$\frac{mv^2}{2} = F\cos\alpha \int_0^{2\pi nR} dr\,, \Rightarrow \quad n = \frac{mv^2}{4\pi FR\cos\alpha}\,,$$

где n – полное число оборотов вагонетки до остановки.

---

198. Сначала тело поднимают из шахты, глубина которой равна половине радиуса Земли h_1 = 0,5R, а затем поднимают над поверхностью на высоту h_2 = h_1= 0,5R. Определите, в каком отношении будут находиться совершённые работы.

Решение

1. Определим силу тяготения, действующую на тело, находящееся на глубине R/2, где R – радиус Земли. Масса планеты, создающая гравитационную силу при подъёме тела с глубины h_1, при этом равна,

$$M_1 = \rho V_1 = \frac{3M}{4\pi R^3}\frac{4}{3}\pi x^3 = \frac{Mx^3}{R^3},$$

где x – текущая координата поднимаемого тела, M – масса Земли.

$$F_1 = G\frac{mM_1}{x^2} = \frac{GmM_1}{R^3}x.$$

2. Как видно из уравнения, сила тяготения линейно зависит от координаты, что позволяет интеграл работы записать следующим образом

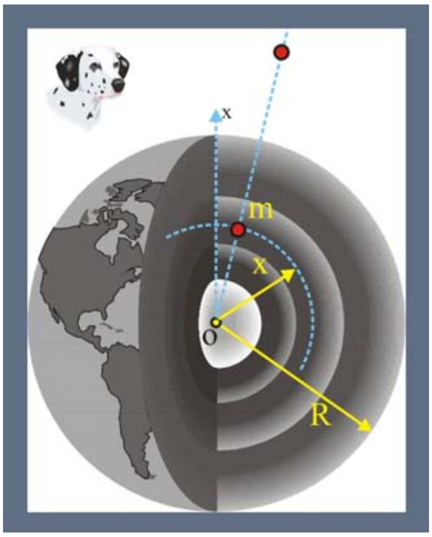


Рис. 198. Перемещение тела

$$A_1 = \int_{0,5R}^{R} F_1 dx = \int_{0,5R}^{R} \frac{GmM}{R^3}xdx = \frac{3GmM}{8R}.$$

3. Гравитационная сила и её работа на втором этапе подъёма на высоту h_2 тела будут равны

$$F_2 = G\frac{mM}{x^2}, \quad A_2 = \int_{R}^{1,5R} F_2 dx = \int_{R}^{1,5R} G\frac{mM}{x^2}dx = G\frac{mM}{3R}.$$

4. Определим отношение работ на первом и втором этапах подъёма: $A_1/A_2 = 9/8 = 1,125$.

---

199. На частицу массой m, движущуюся равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{v} = v_0\vec{i}$ начинает действовать сила сопротивления $\vec{F} = -\alpha v\vec{i}$, где α - положительная постоянная. Определите работу силы сопротивления в первую секунду её действия.

Решение

1. Как видно из условия, сила сопротивления является функцией скорости, поэтому необходимо установить зависимость скорости от времени, т.е. решить первую задачу динамики

$$m\frac{dv}{dt} = -\alpha v, \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{\alpha}{m}dt, \Rightarrow \int_{v_0}^{0}\frac{dv}{v} = -\frac{\alpha}{m}\int_0^t dt,$$

$$v = v_0 e^{-\frac{\alpha}{m}t}.$$

2. Определим элементарную работу силы сопротивления

$$\delta A = F(v)vdt = \alpha v_0^2 e^{-\frac{2\alpha t}{m}}dt,$$

таким образом, удалось получить уравнение элементарной работы как функцию одной переменной.

3. Проинтегрируем δA с целью получения полной работы силы сопротивления

$$A = \int_0^t \alpha v_0^2 e^{-\frac{2\alpha}{m}t}dt = \frac{mv_0^2}{2}\left(1 - e^{-\frac{2\alpha}{m}}\right).$$

---

200. Материальную точку массы m начинают поднимать с поверхности Земли, прикладывая к ней силу $\vec{F} = 2(ay^2 - 1)m\vec{g}$, где a – положительная постоянная, y – высота подъёма. Определите работу силы к моменту времени, когда она становится равной нулю.

Решение

1. Определим высоту, на которой сила обращается в ноль, т.е. установим пределы изменения вертикальной координаты

$$ay^2 - 1 = 0, \Rightarrow y_0 \equiv h = 1/\sqrt{a}\ .$$

2. Если ось Oy направить традиционно вверх, то уравнение силы в векторной форме можно записать так

$$\vec{F} = -2\left(ay^2 - 1\right)m g\vec{j}\ , \text{ или } \ \vec{F} = 2\left(1 - ay^2\right)m g\vec{j}\ .$$

3. Элементарная работа силы запишется следующим образом:

$$\delta A = F dy = 2(1 - ay^2)mgdy\ .$$

4. Полная работа силы F на перемещении от $y_1 = 0$ до $y_2 = h = 1/\sqrt{a}$ определится путём интегрирования уравнения (3)

$$A = \int\limits_0^{1/\sqrt{a}} 2(1 - ay^2)mgdy = \left(2mgy - \frac{2mgay^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} = \frac{4mg}{3\sqrt{a}}\ .$$

---

201. Горизонтальные поверхности, отстоящие друг от друга по высоте на h, плавно соединяются. По верхней поверхности движется тело со скоростью v, составляющей угол α с нормалью к линии сопряжения. Найдите угол между скоростью тела на нижней поверхности плоскости и нормалью к линии сопряжения. Трением пренебречь.

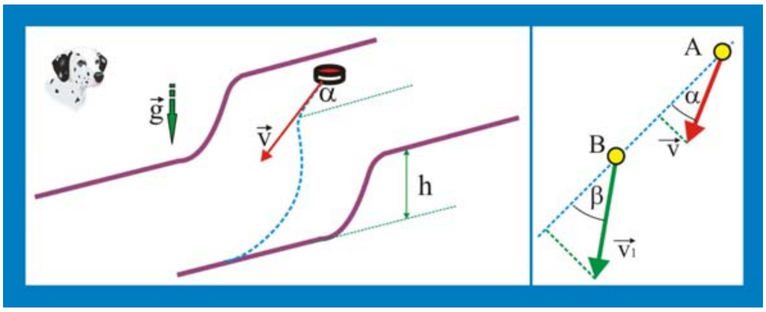


Рис. 201. Скольжение по сопряжённым поверхностям

Решение

1. Используя закон сохранения энергии определим скорость тела после спуска

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgh\ , \quad v_1 = \sqrt{v^2 + 2gh}\ .$$

2. Выберем ось, совпадающую с направлением движения тела, в соответствии с теоремой о проекциях скоростей

$$v_1 \sin\beta = v\sin\alpha\ ,$$

или,

$$\beta = \arcsin\left(\frac{v\sin\alpha}{\sqrt{v^2 + 2gh}}\right).$$

---

202. Частица массы m со скоростью u влетает в область действия тормозящей силы F под углом α к направлению этой силы. Под каким углом β к направлению силы F она вылетит из этой области? Ширина области действия силы L. При каком условии частица не сможет пересечь эту область?

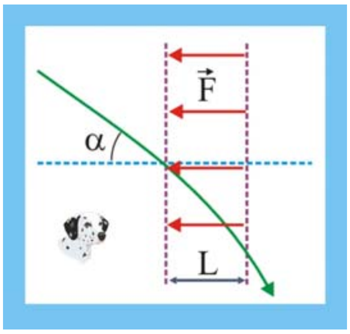


Рис. 202. Сила торможения

Решение

1. Закон сохранения энергии для частицы, прошедшей тормозное поле шириной L даёт возможность определить скорость частицы на выходе

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + FL, \quad v_1 = \sqrt{\frac{mv^2}{2} - FL}.$$

2. Направление скорости v_1 определим, используя теорему о проекциях скоростей, т.е.

$$v\sin\alpha = v_1 \sin\beta,$$

откуда:

$$\beta = \arcsin\frac{v\sin\alpha}{\sqrt{\frac{mv^2}{2} - FL}} = \arcsin\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \frac{2FL}{mv^2}}}.$$

3. Условие не проникания частицы через тормозное поле должно учитывать взаимное направление скорости и силы

$$FL \ge \frac{m(v\cos\alpha)^2}{2}.$$

---

203. Нить длины L с привязанным к ней шариком массы m отклонили на 90° от вертикали и отпустили. На каком наименьшем расстоянии под точкой подвеса нужно поставить гвоздь, чтобы нить, налетев на него, порвалась? Нить выдерживает силу натяжения T.

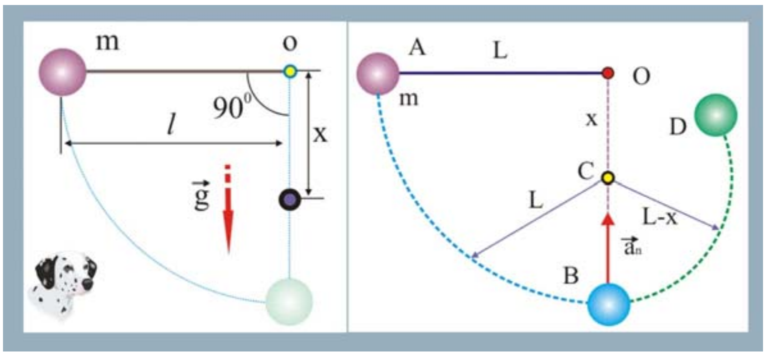


Рис. 203. Разрыв нити при налёте нити на вбитый гвоздь

Решение

1. Шарик маятника первоначально движется по окружности радиуса L, а после касания нити подвеса гвоздя по окружности радиуса L-x. Нормальное ускорение $a_n = v^2/L$ будет максимальным в точке B, когда вся потенциальная энергия преобразуется в кинетическую. Натяжение нити запишется в виде

$$T = m\left(g + \frac{v^2}{L - x}\right).$$

2. Скорость шарика в точке B определим, используя закон сохранения энергии

$$mgL = mv^2/2, \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gL.$$

3. Подставим v в уравнение для T и разрешим полученное уравнение относительно искомого расстояния x

$$T \le mg + \frac{2mgL}{L - x}, \quad TL - Tx \le mgL - mgx + 2mgL,$$

$$x = L\frac{T - 3mg}{T - mg}.$$

---

204. Шарику маятника массы m сообщили минимальную скорость, при которой он еще может описывать окружность в вертикальной плоскости. Какая сила действует на ось при прохождении маятником положения равновесия? Рассмотрите случаи подвеса шарика на легком стержне и на нити.

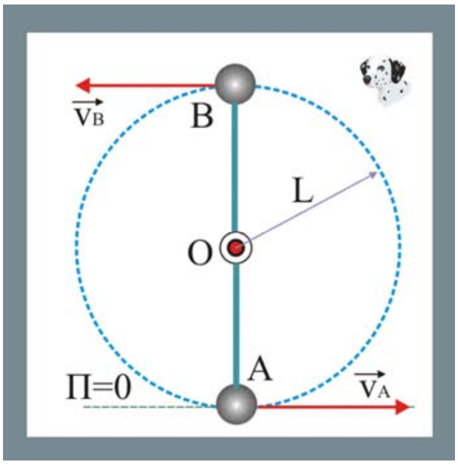


Рис. 204. Круговой маятник

Решение

1. Рассмотрим вначале шарик, вращающийся на стержне. Условие прохождения шариком верхней точки круговой траектории B определяется условием равенства нулю его скорости, т.е. $v_B = 0$. Энергия шарика в точке B чисто потенциальная $E_B = П = 2mgL$.

2. Чтобы стержень занял верхнее вертикальное положение нужно шарику сообщить в точке A кинетическую энергию, достаточная скорость, при этом, определится законом сохранения энергии

$$2mgL = mv_A^2/2, \quad \Rightarrow \quad v_A^2 = 4mgL.$$

3. В соответствии с принципами освобождаемости от связей и Даламбера стержень можно заменить силой растяжения F, добавить силу инерции и рассматривать шарик в точке A свободным и неподвижным

$$F = mg + mv_A^2/2 = 5mg.$$

4. При замене стержня нитью условие прохождения шариком точки B изменится, шарик для обеспечения компенсации силы тяжести должен иметь некоторую скорость

$$mg = mv_B^2/L, \quad \Rightarrow \quad v_B^2 = gL.$$

5. Энергия шарика в точке B будет равна, таким образом, сумме кинетической и потенциальной энергии

$$E_B = 2mgL + mgL/2.$$

6. Минимальное значение скорости в точке A, которая обеспечивает величину E_B определится законом сохранения энергии

$$v_A^2 = 5gL.$$

7. Натяжение нити в точке A определится по аналогии со стержнем, в виде суммы

$$T = mg + mv_A^2/L = 6mg.$$

---

205. На каком минимальном расстоянии от места закругления склона должна располагаться стартовая площадка лыжников, чтобы они, достигнув закругления, начали свободный полет? Угол склона α, радиус его закругления R, коэффициент трения между лыжами и снегом $\mu < \mathrm{tg}\alpha$. Стартовой скоростью лыжников пренебречь.

Решение

1. Условие отрыва лыжника в точке B от поверхности склона можно представить в виде равенства проекции силы тяжести на направление нормального ускорения силе инерции

$$\frac{mv_B^2}{R} = mg\cos\alpha, \quad \Rightarrow \quad v_B^2 = Rg\cos\alpha .$$

2. Минимальное расстояние, необходимое в данном случае для приобретения скорости v_B определим из теоремы об изменении кинетической энергии. Т.к. лыжники стартуют без начальной скорости, то алгебраическая сумма работ силы тяжести и силы трения должна быть равна кинетической энергии лыжника

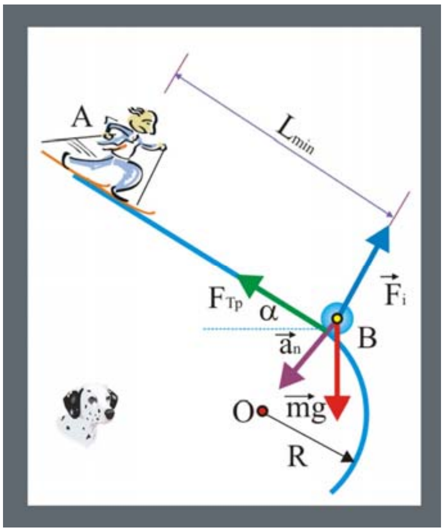


Рис. 205. Полёт лыжников

$$mgL\sin\alpha - \mu mgL\cos\alpha = \frac{mv^2}{2},$$

или, с учётом закона сохранения

$$L_{min}\sin\alpha - \mu L\cos\alpha = \frac{R\cos\alpha}{2}, \quad \Rightarrow \quad 2L_{min}(\mathrm{tg}\alpha - \mu) = R,$$

$$L_{min} = \frac{R}{2(\mathrm{tg}\alpha - \mu)}.$$

---

206. Определите силу, действующую на вертикальную стенку со стороны падающей гантели, когда ось гантели составляет угол *a* с горизонтом. Гантель начинает движение из вертикального положения без начальной скорости. Масса каждого шарика гантели m.

Решение

1. Искомая сила представляет собой реакцию связи гантели и вертикальной стены, поэтому, используя принцип освобождаемости связь можно заменить её реакцией N

$$N = T\cos\alpha,$$

где T – усилие в соединительном стержне, обусловленное силой тяжести и спецификой кругового движения верхней массы гантели.

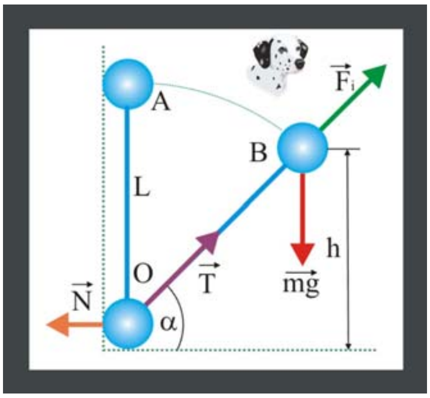


Рис. 206. Падающая гантель

2. Определим скорость верхней массы в заданной точке B

$$mgL = \frac{mv_A^2}{2} + mgL\sin\alpha, \quad v_A^2 = 2gL(1 - \sin\alpha),$$

3. Усилие в стержне проще всего определить, прибавив к действующим силам силу инерции F_i, в этом случае гантель можно рассматривать как непод-

вижную и величину T представить следующим образом

$$T = 2mg\sin\alpha - mg(1-\sin\alpha) = mg(3\sin\alpha - 2).$$

4. Подставив значение T из (3), получим величину силы давления гантели на вертикальную стенку

$$N = mg\cos\alpha(3\sin\alpha - 2).$$

---

207. Двум одинаковым телам сообщают равные скорости, направленные под углом α к горизонту. Одно тело после броска находится в свободном движении, а другое движется без трения в прямолинейной трубе. Какое тело поднимется на большую высоту?

Решение

1. Будем считать, что $\vec{v}_{01} \equiv \vec{v}_{02};\ \alpha_1 = \alpha_2;\ m_1 = m_2$. Для случая свободного движения можно записать следующие кинематические соотношения

$$v_{1y} = v_0\sin\alpha - gt, \Rightarrow t = \frac{v_0\sin\alpha}{g}, \Rightarrow y = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2},$$

$$y_{max} \equiv h_1 = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

2. Для тела движущегося по трубе целесообразно применить закон сохранения энергии, т.к. направление скорости по отношению к внешним силам остаётся неизменным

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh_2, \quad \Rightarrow \quad h_2 = \frac{v_0^2}{2g}.$$

3. Естественно предположить, что тело, движущееся по трубе, поднимется на большую высоту, потому что

$$\sin^2\alpha < 1.$$

---

208. На нити подвешен шарик. Нить переводят в горизонтальное состояние и отпускают без начальной скорости. Определите, в какой точке траектории ускорение шарика будет направлено вертикально вниз? Вертикально вверх? Горизонтально?

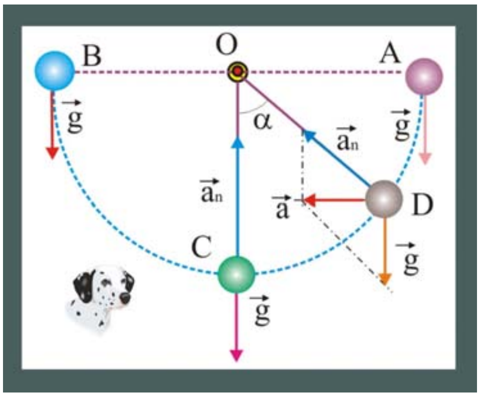


Рис. 208. Направление ускорения

Решение

1. В точках траектории A и B энергия шарика будет чисто потенциальной, скорость его равна нулю, следовательно и нормальное ускорение тоже равно нулю, поэтому ускорение шарика будет равно ускорению свободного падения и направлено, как и положено вниз: $\vec{a}_B = \vec{a}_A = \vec{g}$.

2. В точке C вся потенциальная энергия шарика преобразуется в кинетическую энергию, нормальное ускорение примет максимальное значение, полное ускорение шарика будет направлено вертикально вверх: $\vec{a}_C = \vec{a}_n - \vec{g}$.

3. Полное ускорение шарика будет иметь горизонтальное направление когда $|\vec{a}| = |\vec{g}|$, в этом случае угол α определится как:

$$a_n = g\sqrt{2}, \quad \Rightarrow \quad \alpha = \mathrm{arctg}\sqrt{2} = 54{,}7^\circ$$

---

209. Частица массы m влетает в область пространства, где на неё действует сила, являющаяся только функцией расстояния, пройденного в этой области. Найдите эту зависимость, если глубина проникновения частицы в область торможения пропорциональна её первоначальному импульсу: $L = \alpha p$.

Решение

1. Выразим скорость частицы через её массу пройденное расстояние L

$$\alpha p = \alpha m v, \quad \Rightarrow \quad v = L/\alpha m .$$

2. Зависимость тормозящей силы можно определить, используя теорему об изменении кинетической энергии

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{0,1}(F),$$

полагая, что, пройдя расстояние L, частица остановится, т.е. её конечная скорость v_1 станет равной нулю:

$$\frac{mv^2}{2} = FL, \quad \frac{mL^2}{2m^2\alpha^2} = FL, \quad \Rightarrow \quad F = \frac{L}{2m\alpha^2}.$$

---

210. Определите работу, совершенную в своё время при строительстве знаменитой пирамиды Хеопса, имеющей основание 232,4 × 232,4 м и высоту 146,7 м. Считать, что внутренность пирамиды на 87,6% заполнена камнем с плотностью $\rho \cong 2,8\cdot 10^3$ кг/м^3.

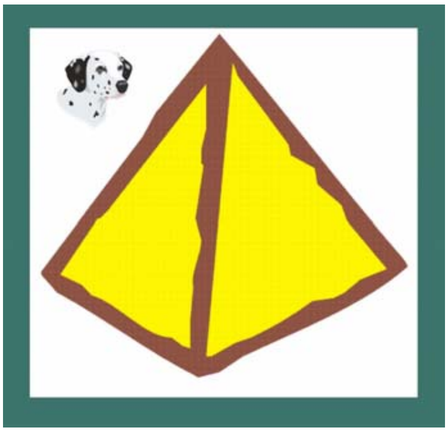


Рис. 210. Пирамида Хеопса

Решение

1. Если поверхность земли принять за нулевой уровень потенциальной энергии, где первоначально находились каменные глыбы, то строительство пирамиды можно рассматривать как изменение потенциальной энергии центра масс этого грандиозного сооружения.

2. Определим объём правильной пирамиды

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} h \cong 2,64\cdot 10^6 м^3 .$$

3. Найдём далее массу пирамиды: $m = 0,876\rho V \cong 6,5\cdot 10^9$ кг .

4. Центр масс правильной пирамиды располагается в точке O, которая удалена от основания на расстояние y = h/4, поэтому изменение потенциальной энергии центра масс при строительстве определится как

$$\Delta U = A = mgy = \frac{1}{4} mgh \cong 2,4\cdot 10^{12} Дж .$$

Полученная фантастическая величина произведенной древними египтянами работы, мягко говоря, завораживает своими поистине космическими масштабами.

---

211. Определите работу, совершённую древними ацтеками при строительстве правильной усечённой пирамиды Луны на равнине Теотиукана, если высота пирамиды $h \cong 114$ м, а нижнее и верхнее основания являются квадратами

со сторонами a = 225,4 м, b = 114,4 м. Плотность используемого при строительстве кирпича и каменных глыб принять равной $\rho \cong 1,8{,}10^3$ кг/м^3.

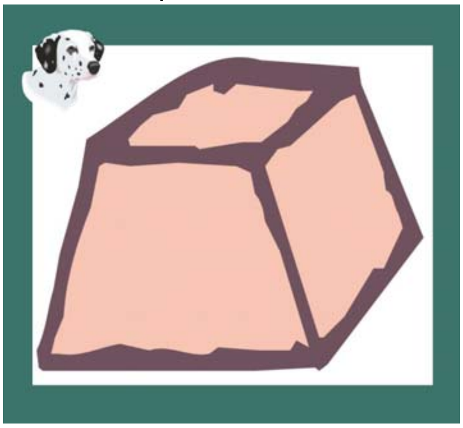


Рис. 211. Пирамида Ацтеков

Решение

1. Определим объём правильной усечённой пирамиды

$$V = \frac{h}{3}\left(s_1 + \sqrt{s_1 s_2} + s_2\right),$$

С учётом того, что $s_1 = b^2$, а $s_2 = a^2$, уравнение можно переписать следующим образом

$$V = \frac{h}{3}\left(a^2 + ab + b^2\right).$$

2. Масса пирамиды Луны равна

$$m = \frac{\rho h}{3}\left(a^2 + ab + b^2\right).$$

3. Центр масс сплошной правильной усечённой пирамиды отстоит от большего основания на расстоянии

$$y_c = \frac{h}{4}\frac{s_1 + 2\sqrt{s_1 s_2} + 3s_2}{s_1 + \sqrt{s_1 s_2} + s_2} = \frac{h\left(a^2 + 2ab + 3b^2\right)}{a^2 + ab + b^2}.$$

4. Определим изменение потенциальной энергии центра масс при строительстве пирамиды, которое равно совершаемой при этом работе

$$\Delta U = A = mdy_c = \frac{\rho g h^2}{12}\left[(a+b)^2 + 2b^2\right] \cong 2{,}76 \cdot 10^{12}\,\text{Дж} .$$

---

212. Частица массы 4 кг движется в двумерном потенциальном поле, причём её потенциальная энергия определяется как: $U = \alpha xy$, где $\alpha = 1{,}9 \cdot 10^{-4}$ Дж/м^3. В точке M_1 (3,4) м, частица имела скорость v_1 = 3 м/с, а в точке M_2 = (5,-6) м, скорость v_2 = 4 м/с. Определите работу внешних сил на перемещении между точками плоскости M_1 и M_2.

Решение

1. Внешние (сторонние) силы совершают работу, обеспечивая изменение кинетической и потенциальной энергии исследуемой точки, работа в этой связи определится в виде следующей суммы:

$$A_{1,2} = \Delta K + \Delta U = \frac{m}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) + \left(U_2 - U_1\right),$$

$$A_{1,2} = \frac{m}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) + \alpha\left(x_2 y_2 - x_1 y_1\right) \cong 6 \cdot 10^{-3}\,\text{Дж} .$$

---

213. На частицу массой m = 100 г действует сила

$$\vec{F} = \frac{\alpha}{x^2}\vec{i} + \frac{\alpha}{y^2}\vec{j} + \frac{\alpha}{z^2}\vec{k},$$

где, α = 5 Н/м^2. Определите работу этой силы при перемещении частицы из точки M_1(1,2,3) м, в точку M_2(3,2,1).

Решение

1. По условию задачи заданы проекции силы

$$F_x = \frac{\alpha}{x^2}, \quad F_y = \frac{\alpha}{y^2}; \quad F_z = \frac{\beta}{z^2},$$

поэтому искомую работу целесообразно определить, используя уравнение

$$A_{1,2} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz = \alpha\left(\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x^2} + \int_{y_1}^{y_2}\frac{dy}{y^2} + \int_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{z^2}\right),$$

2. Подставим далее пределы интегрирования, заданные в виде координат начальной и конечной точек перемещения

$$A_{1,2} = \alpha\left(-\frac{x^3}{3}\bigg|_1^3 - \frac{y^3}{3}\bigg|_2^2 - \frac{z^3}{3}\bigg|_3^1\right) = \alpha\left(\frac{x^3}{3}\bigg|_3^1 + 0 - \frac{z^3}{3}\bigg|_3^1\right) = 0.$$

---

214. Частица массой m движущаяся равномерно и прямолинейно со скоростью v_0, влетает в силовое поле, где на неё начинает действовать сила сопротивления $F= - \alpha v$, направленная противоположно вектору скорости. Определите работу этой силы за первую секунду её действия.

Решение

1. На основании основного уравнения динамики точки (второй закон Ньютона) найдём зависимость скорости от времени

$$m\frac{dv}{dt} = F = -\alpha v, \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{\alpha}{m}dt, \quad \Rightarrow \quad \int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = -\frac{\alpha}{m}\int_0^{t_1}dt,$$

$$\ln\frac{v}{v_0} = e^{-\frac{\alpha}{m}t}, \quad \Rightarrow \quad v = v_0 e^{-\frac{\alpha}{m}t}.$$

2. Работу силы сопротивления за указанный промежуток времени определим, используя теорему об изменении кинетической энергии

$$A_{0,1} = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}\left(1 - e^{-\frac{2\alpha}{m}}\right).$$

---

215. Материальная точка массой 1кг движется равномерно и прямолинейно со скоростью v_0 = 1м/с. В некоторый момент времени на точку начинает действовать сила сопротивления $F = - \alpha t^2$, направленная в сторону, противоположную скорости, α = 1Н/с^2. Определите работу этой силы за первую секунду её действия.

Решение

1. Используя уравнение второго закона Ньютона, определим зависимость скорости от времени

$$m\frac{dv}{dt} = -\alpha t^2, \Rightarrow dv = -\frac{\alpha}{m}t^2 dt, \int_{v_0}^{v} dv = -\frac{\alpha}{m}\int_0^{t_1} t^2 dt,$$

$$v = v_0 - \frac{\alpha t^3}{3}.$$

2. Нас интересует работа, произведенная силой сопротивления при изменении скорости точки с v_0 до v, поэтому уместно применить теорему об изменении кинетической энергии

$$A_{0,1} = \frac{m}{2}\left(v^2 - v_0^2\right) = \frac{m}{2}\left(v_0^2 - \frac{2v_0\alpha}{3m} + \frac{\alpha^2 t^6}{9m^2} - v_0^2\right),$$

$$A_{0,1} = \frac{\alpha}{3}\left(\frac{\alpha}{6m} - v_0\right) \cong -0{,}28\text{Дж}.$$

216. От груза, висящего на пружине жесткости k, отрывается часть массы m. На какую высоту поднимется после этого оставшаяся часть груза?

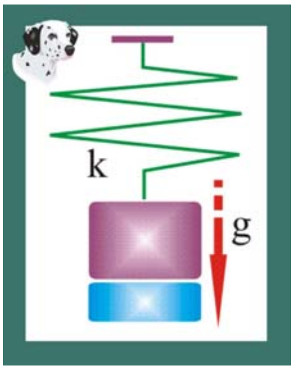


Рис. 216. Отрыв груза

Решение

1. Неподвижный груз на вертикальной пружине свидетельствует о равенстве нулю, приложенных к нему сил. Сила упругости пружины по модулю равна силе тяжести. Изменение длины пружины связано с изменением веса груза и будет сопровождаться уменьшением запасённой пружиной потенциальной энергии. Другими словами, работа силы тяжести должна быть равна изменению потенциальной энергии, т.е.

$$\frac{k\Delta y^2}{2} = mg\Delta y, \quad \Rightarrow \quad \Delta y = \frac{2mg}{k}.$$

217. Груз массы m, подвешенный на пружине жесткости k, находится на подставке. Пружина при этом не деформирована. Подставку быстро убирают. Определите максимальное удлинение пружины и максимальную скорость груза после удаления подставки.

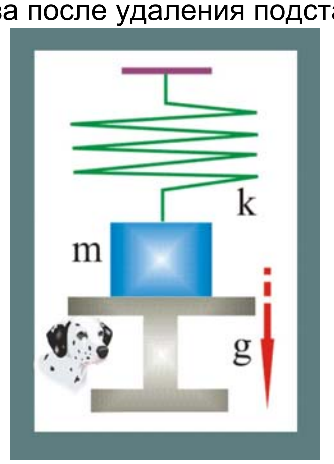


Рис. 217. Удаление подставки

Решение

1. Максимальное удлинение пружины Δy можно определить, приравняв её потенциальную энергию к изменению потенциальной энергии опустившегося груза

$$\frac{k\Delta y^2}{2} = mg\Delta y, \quad \Rightarrow \quad \Delta y = \frac{2mg}{k}.$$

2. Изменение потенциальной энергии груза, в свою очередь, приведёт возникновению движения груза со скоростью, определяемой законом сохранения энергии, причём груз станет совершать гармонические колебания около положения равновесия, в нижней точке кинетическая энергия равна нулю, а потенциальная энергия максимальна. Кинетическая энергия груза будет максимальной при опускании груза на $h = \Delta y/2$

$$\frac{mv_m^2}{2} = \frac{mg\Delta y}{2}, \quad \Rightarrow \quad v_m = g\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

218. К потолку привязан резиновый шнур, свободный конец которого находится на высоте h над полом. Если подвесить к нему небольшой тяжелый груз, который затем плавно опустить, то конец шнура с грузом опустится на расстояние h/3. На какую наименьшую высоту над полом надо затем поднять груз, чтобы после того, как его отпустят, он ударился о пол?

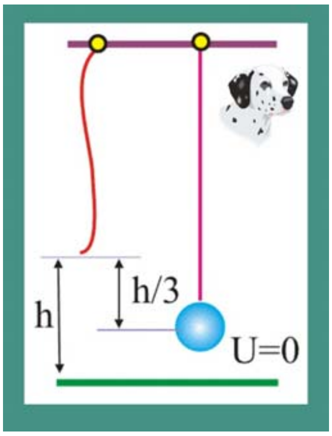


Рис. 218. Резиновый шнур

Решение

1. Для случая растянутого резинового шнура можно определить его коэффициент упругости

$$\frac{kh}{3} = mg, \quad \Rightarrow \quad k = \frac{3mg}{h}.$$

2. Работа по растяжению шнура на искомую величину Δy, равна изменению потенциальной энергии груза, т.е.

$$mg\Delta y = \frac{kh^2}{2}, \quad mg\Delta y = \frac{3mgh^2}{2h}, \quad \Rightarrow \Delta y = \frac{3}{2}h.$$

---

219. Нерастянутый резиновый шнур длины $2L_0$ своими концами прикреплен к стенкам. К середине шнура прицепили груз массы m, который затем без толчка отпустили. При возникших колебаниях наибольшее расстояние, на которое опускается груз, равно x_0. Какова жесткость этого шнура?

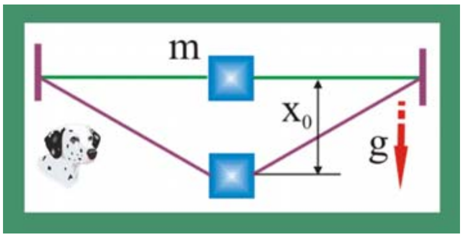


Рис. 219. Жёсткость шнура

Решение

1. Определим удлинение половины шнура под действием веса опустившегося груза

$$\Delta L = \sqrt{L_0^2 + x_0^2} - L_0.$$

2. При опускании груза на величину x_0 в шнуре будет запасаться потенциальная энергия

$$U = k(2\Delta L)^2/2,$$

которая равна работе силы тяжести

$$\frac{k(2\Delta L)^2}{2} = mgx_0, \Rightarrow k = \frac{mgx_0}{2\Delta L^2} = \frac{mgx_0}{2(\sqrt{L_0^2 + x_0^2} - L_0)^2}.$$

---

220. Тело массы m падает с высоты h на стоящую вертикально, на полу пружину жесткости k и длины L. Определите максимальную силу давления на пол. Объясните, почему при увеличении жесткости пружины эта сила возрастает.

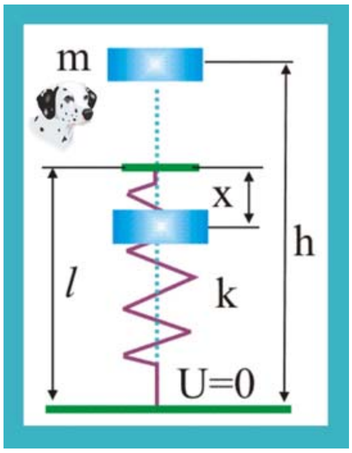


Рис. 220. Падение на пружину

Решение

1. Примем поверхность пола за нулевой уровень потенциальной энергии. В этом случае потенциальная энергия тела в самой верхней точке будет равна $U_1 = mgh$.

2. При падении массы на пружину U_1 будет рас-

ходоваться на её сжатие, энергия пружины увеличится на $\Pi = kx^2/2$.

3. В низшей точке движения, т.е. при максимально сжатой пружине на величину x, масса будет покоиться и обладать потенциальной энергией $\Pi_2 = mg(l - x)$.

4. Закон сохранения энергии, таким образом, запишется следующим образом

$$mgh = \frac{kx^2}{2} + mg(l - x).$$

5. Преобразуем уравнение к квадратному уравнению относительно x

$$x^2 - \frac{2mg}{k}x - \frac{2mg}{k}(l - h) = 0,$$

решение которого даёт

$$x = \frac{mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mg}{k}(l - h)}.$$

6. Нормальная реакция стола будет по модулю равна силе упругости максимально сжатой пружины $|\vec{N}| = |\vec{F}| = kx$, или

$$|\vec{N}| = k\left\{\frac{mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mg(l - h)}{k}}\right\} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2k(l - h)}{mg}}.$$

---

221. С какой силой нужно надавить на верхний груз массы m_1, чтобы нижний груз массы m_2, соединенный с верхним грузом пружиной, оторвался от пола после прекращения действия этой силы?

Решение

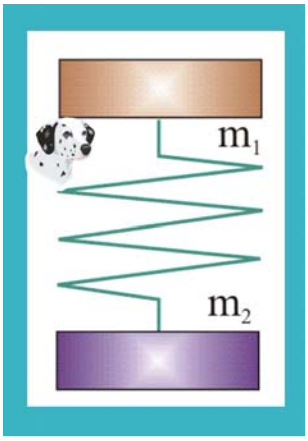


Рис. 221. Отрыв груза

1. Наличие пола делает систему двух масс и пружины незамкнутой в вертикальном направлении. Система после прекращения действия силы приобретает вертикальный импульс. Центр масс системы тоже перемещается по вертикальной оси.

2. В первый момент времени движется только верхняя масса m_1, потенциальная энергия системы равная $kx^2/2$, перейдёт в кинетическую энергию верхнего тела $mv_1^2/2$, когда пружина полностью распрямится. Скорость этого тела станет равной

$$v_1 = \sqrt{k/m_1} \cdot x,$$

при этом система приобретёт импульс

$$m_1 v_1 = \sqrt{km_1} \cdot x.$$

3. Импульс будет распределяться между двумя телами, т.е.

$$v_c(m_1 + m_2) = m_1 v_1.$$

4. Таким образом оба тела будут совершать колебания около центра масс, чтобы нижняя масса m_2 оторвалась от пола, величина силы упругости, численно равная сжимающей пружину силе, должна превышать суммарный вес тел, т.е.

$$F \geq g(m_1 + m_2).$$

---

222. Посередине спицы массы m_1 и длины 2L находится шайба массы m_2. Спице ударом сообщают продольную скорость v, при этом шайба со спицы соскальзывает. Какова после этого суммарная кинетическая энергия шайбы и спицы. Если сила трения равна F?

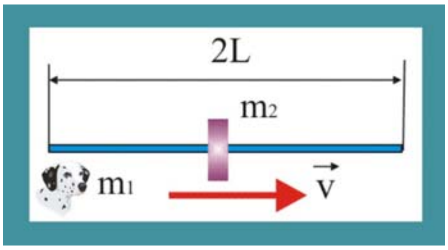


Рис. 222. Шайба на спице

Решение

1. Если предположить, что шайба соскользнув со спицы, не будет иметь скорости, то её кинетическая энергия равна работе силы трения, т.е.

$$K_2 = A(F_{Тр}) = FL .$$

2. Кинетическая энергия спицы определится традиционно

$$K_1 = \frac{m_1 v^2}{2} .$$

3. Суммарная кинетическая энергия анализируемой системы, с учётом того, что работа силы трения всегда отрицательна, будет равна

$$K_\Sigma = K_1 - K_2 = \frac{m_1 v^2}{2} - FL .$$

---

223. Лента транспортёра движется с постоянной скоростью u. На поверхность ленты перпендикулярно направлению её движения влетает со скоростью v тело и, пройдя некоторое расстояние по ленте, останавливается. Найдите работу силы трения, приложенной к телу со стороны ленты и к ленте со стороны тела. Почему работа в этих случаях не одинакова?

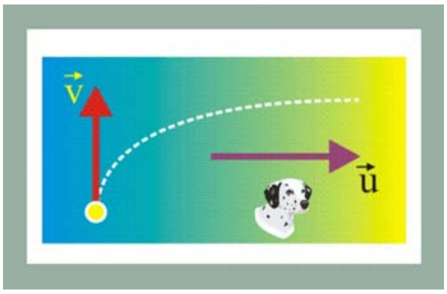


Рис. 223. Лента транспортёра

Решение

1. Работу силы трения, приложенную к движущемуся телу уместно определить, используя теорему об изменении кинетической энергии. Разность кинетических энергий в конечной и начальной точках движения тела должна быть равна работе силы трения

$$\frac{mu^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = A(F_1).$$

2. Работа силы трения, приложенной к ленте, определится аналогичным образом, но с учётом равенства нулю конечной скорости тела относительно ленты

$$0 - \frac{mu^2}{2} = A(F_2).$$

---

224. Частицы, между которыми действует постоянная сила притяжения F, удерживают на расстоянии 2r друг от друга. Затем их начинают медленно перемещать в противоположных направлениях под углом α к линии первоначально соединяющей частицы. Какую работу надо совершить, чтобы переместить частицы на расстояние r? При каком значении угла α работа будет равна нулю?

Решение

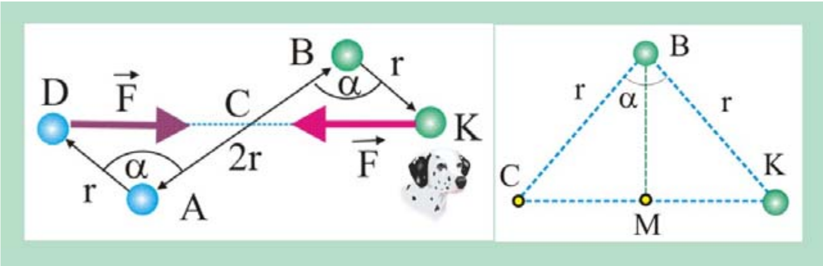


Рис. 224. Работа при перемещении частицы

1. Работа по перемещению частиц в силовом поле равна изменению их потенциальной энергии, взятой с обратным знаком. Чтобы разнести частицы на расстояние 2r необходимо произвести против сил поля работу:

$$A_{A,B} = -2Fr\,.$$

2. Для удаления частиц на расстояние DK требуется работа

$$A_{D,K} = -F \cdot DK\,.$$

Определим расстояние между новыми положениями частиц DK, для чего сначала найдём величину CK которая будет равна половине искомого расстояния. Из равнобедренного треугольника CBK следует:

$$CM = r\cos(90-\alpha) = r\sin(\alpha/2)\,,$$

$$CK = 2r\sin(\alpha/2)\,,$$

$$DK = 4r\sin(\alpha/2)\,.$$

3. Работу по перемещению частиц на расстояние r под углом α к первоначальному перемещению определим в виде очевидной разности

$$A = -4Fr\sin\frac{\alpha}{2} - (-2Fr) = 2Fr\left(1 - 2\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

4. Элементарный анализ уравнения показывает, что если перемещать частицы из первоначального положения под углом $\alpha = 60^0$, то работа будет нулевой, т.к. $\sin 30^0 = 0{,}5$.

---

225. Три шарика массы m каждый соединены друг с другом одинаковыми пружинами жёсткости k. Одновременно всем шарикам сообщается скорость v, направленная от центра масс C системы. На какое наибольшее расстояние сместятся шарики в этом направлении?

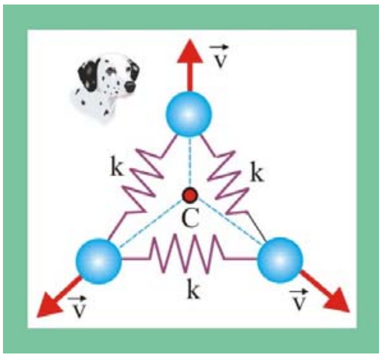


Рис. 225. Три шарика

Решение:

1. Каждый шарик, перемещаясь в направлении вектора скорости находится под действием всех трёх пружин, потому что движение шариков сопровождается удлинением пружин, т.е. увеличением их потенциальной энергии, другими словами:

$$\frac{mv^2}{2} = 3\frac{kx^2}{2}, \quad \Rightarrow \quad x = v\sqrt{\frac{m}{3k}}\,.$$

---

226. Два одинаковых заряда, удерживаемых на расстоянии L друг от друга, после того как их отпустили, разлетаются с равными скоростями, стремящимися при бесконечном удалении зарядов друг к предельному значению v. Какой

станет предельная скорость, если первоначально удерживали три таких же заряда в вершинах равностороннего треугольника со сторонами длины L?

Решение

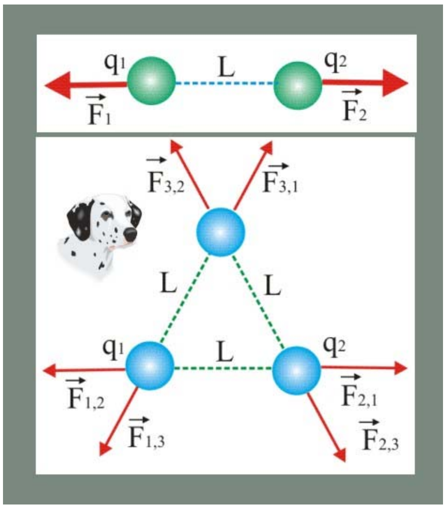


Рис. 226. Взаимодействие зарядов

1. Взаимодействие в вакууме двух точечных заряженных частиц, расположенных на расстоянии L, характеризуется потенциальной энергией

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1||q_2|}{L}.$$

2. Когда заряды удалятся на достаточно большое расстояние, их потенциальная энергия устремится к нулевому значению, а кинетическая энергия – к максимальному значению, закон сохранения энергии, при этом, примет вид

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1||q_2|}{L} = \frac{mv^2}{2}, \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2q^2}{4\pi mL\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{2kq^2}{mL}}.$$

3. При взаимодействии трёх зарядов, расположенных в вершинах правильного треугольника, ситуация поменяется. Каждый заряд станет взаимодействовать с двумя остальными. Результирующая сила, действующая на каждый заряд, определится в виде суммы

$$F_\Sigma = \sqrt{F_{1,2}^2 + F_{1,3}^2 + 2F_{1,3}F_{1,2}\cos 60^0},$$

или, с учётом равенства сил по модулю

$$F_\Sigma = \sqrt{F^2 + F^2 + 2F^2 \cdot 0{,}5} = F\sqrt{3}.$$

Потенциальная энергия, в отличие от сил, является величиной скалярной и складывается не геометрически, а алгебраически. Другими словами потенциальная энергия, характеризующая такое взаимодействие, по сравнению с предыдущим случаем удвоится, т.е.

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q^2}{L} = \frac{2kq^2}{L},$$

или

$$v_1 = \sqrt{\frac{4kq^2}{mL}},$$

окончательно получим

$$v_1 = v\sqrt{2}.$$

---

227. Обруч, раскрученный в вертикальной плоскости и поставленный гимнасткой на пол, проходит по горизонтальной поверхности расстояние L, а затем возвращается в исходную точку. Объясните это явление и определите коэффициент трения обруча о пол, если начальная скорость его центра масс была равна v.

Решение

1. Плоское движение обруча можно представить как состоящее из двух более простых: поступательного движения центра масс обруча и вращения вокруг мгновенной оси, проходящей через общую точку обруча и пола. Таким обра-

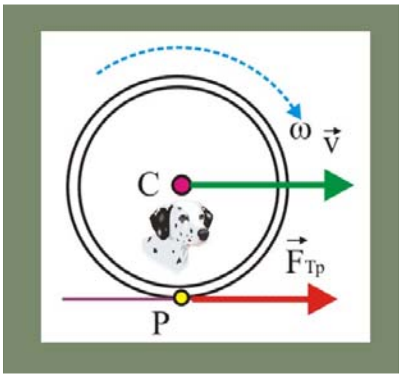


Рис. 227. Раскрученный обруч

зом, кинетическая энергия обруча будет иметь две составляющие, поступательную и вращательную

$$K = K_{Вр} + K_{Пос} = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2}\omega^2 J_C,$$

где $J_C = mR^2/2$ – момент инерции обруча относительно центра его масс.

2. Поступательное движение обруча обусловлено наличием силы трения $F_{Тр} = \mu mg$, т.е. движение будет равнозамедленным, скорость центра масс обруча будет уменьшаться со временем и в конце концов станет равной нулю. Если к этому времени вращение обруча будет продолжаться, то сила трения поменяет направление на обратное. Обруч станет перемещаться в противоположную сторону.

3. Запишем теорему об изменении кинетической энергии применительно к центру масс обруча

$$\frac{mv_C^2}{2} = A(F_{Тр}) = \mu mgL,$$

откуда

$$\mu = \frac{v_C^2}{2gL}.$$

---

228. Две бусинки массы m каждая, связанные друг с другом пружиной жёсткости k, удерживают на гладких, жёстко закреплённых в стене, стержнях. Пружина в начальном состоянии растянута, её длина равна L. Расстояние между свободными концами стержней равно длине недеформированной пружины L_0. В некоторый момент времени бусинки отпускают и система приходит в движение. С какой скоростью будет двигаться пружина в направлении x когда бусинки покинут стержни.

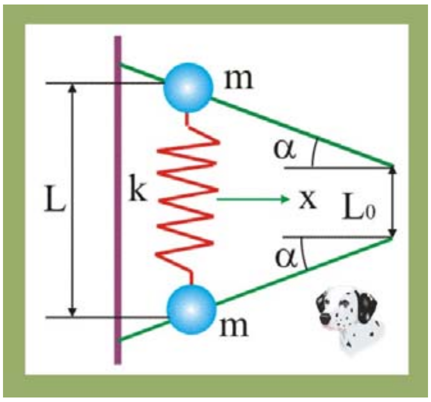


Рис. 228. Бусинки и пружина

Решение

1. Запишем уравнение для потенциальной энергии растянутой первоначально пружины

$$U = \frac{k(L - L_0)^2}{2},$$

которая по мере продвижения бусинок по стержням будет преобразовываться в кинетическую энергию.

2. Закон сохранения энергии с учётом отсутствия трения запишется в данном случае следующим образом

$$\frac{k(L - L_0)^2}{2} = \frac{2mv^2}{2}, \Rightarrow \quad v = (L - L_0)\sqrt{\frac{k}{2m}}.$$

3. Закон сохранения энергии записан для абсолютной скорости пружины, проекция же скорости пружины на горизонтальную ось определится в виде

$$v_x = (L - L_0)\sqrt{\frac{k}{2m}}\cos\alpha.$$

---

229. Свободный конец нити, намотанный на катушку массы m, закрепляют, а катушку предоставляют самой себе, вращаясь катушка вертикально опускается. Какую скорость приобретает ось катушки, опустившись на высоту h, если сила натяжения вертикального участка нити равна T< mg? Чему равна полная кинетическая энергия катушки?

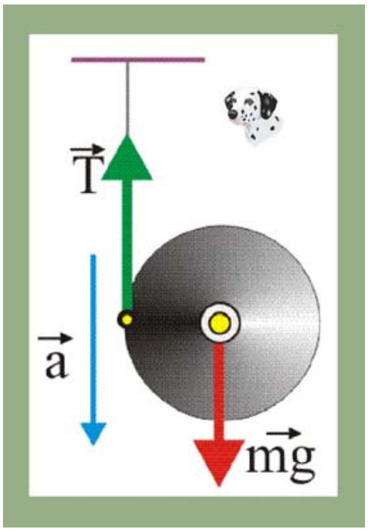


Рис. 229. Катушка на нити

Решение

1. По условию задачи $T < mg$, что свидетельствует об ускоренном движении центра масс катушки. Определим ускорение центра масс, воспользовавшись уравнением второго закона Ньютона в проекции на вертикальную ось

$$mg - T = ma, \quad \Rightarrow \quad a = g - (T/m).$$

2. При опускании центра масс катушки на высоту h изменение потенциальной энергии будет равно изменению кинетической энергии, т.е.

$$\frac{mv^2}{2} = mah = m\left(g - \frac{T}{m}\right)h, \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2h\left(g - \frac{T}{m}\right)}.$$

3. Полная кинетическая энергия катушки численно равна изменению её потенциальной энергии

$$K_\Sigma = mgh.$$

---

230. Собака массы m привязана поводком длины L к саням с другой собакой с общей массой M > m. В начальный момент времени собака находится рядом с санями. На какое наибольшее расстояние собака может переместить сани за один рывок, если коэффициент трения полозьев и лап собаки о горизонтальную поверхность одинаковы?

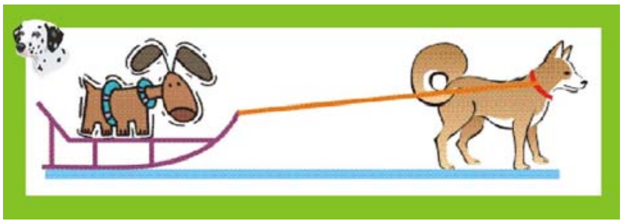


Рис. 230. Рывок ездовой собаки

Решение

1. Определим скорость собаки при пробеге ею расстояния L, т.е. в момент времени, когда поводок начинает натягиваться. Работа силы трения, которая в данном случае является движущей силой, равна изменению кинетической энергии собачки

$$\frac{mv^2}{2} = \mu mgL, \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2\mu gL.$$

2. На основании закона сохранения энергии, в данном случае – кинетической, возможно найти скорость собаки u в момент времени, когда она начинает тянуть сани. Её усилия, по сути, распределяются на две массы, её собственную и массу саней

$$mv^2 = (m + M)u^2, \quad \Rightarrow \quad u^2 = \frac{mv^2}{(M + m)}.$$

3 Сила трения полозьев о снег и сила трения собачьих лап будут иметь противоположное направление. Сила трения лап собаки «создаёт движение», а сила трения саней – наоборот, препятствует движению. В этой связи теорема об

изменении кинетической энергии собаки при её совместном движении с санями представится следующим образом

$$\frac{mu^2}{2} = (M - m)\mu gx, \quad \Rightarrow \quad x = \frac{m^2 L}{M^2 - m^2}.$$

---

231. Два одинаковых шара соединены нитью длины 2L, за середину, которой стали тянуть с постоянной силой F. Определите изменение внутренней энергии системы тел к моменту первого удара.

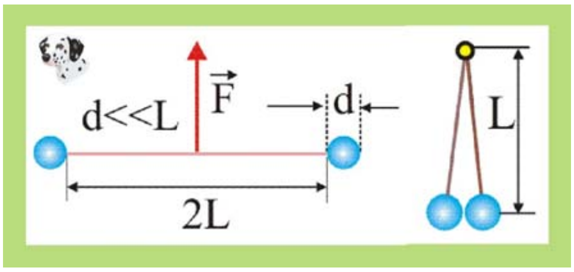


Рис.231. Изменение внутренней энергии

Решение

1. Внутренней энергией системы называется сумма потенциальной энергии взаимодействия отдельных её частей между собой и кинетической энергии этих частей при их движении относительно центра масс.

2. В данном случае гравитационным взаимодействием шаров можно пренебречь в виду малости их масс по сравнению с массой Земли, а учитывать при анализе изменения внутренней энергии системы только перемещение шаров относительно центра масс, который расположен в средней точке нити, на расстоянии L от каждого шара.

3. Изменение внутренней энергии, таким образом, будет численно равно работе приложенной силы на вертикальном перемещении L

$$\Delta U = A(F) = FL.$$

---

232. Под действием постоянной силы F вагонетка прошла расстояние s = 5 м и приобрела скорость v = 5 м/с. Определите работу силы, если масса вагонетки равна 400 кг, а коэффициент трения μ = 0,01.

Решение

1. Действие силы в данном случае сопровождается изменением кинетической энергии тела и совершении работы против силы трения, поэтому

$$A(F) = \frac{mv^2}{2} + \mu mgs \cong 10^3 \text{Дж}.$$

---

233. Вычислите работу, совершаемую постоянной силой при равноускоренном подъёме груза массой m = 100 кг на высоту h = 4м за время t = 2с, если движение начинается из состояния покоя.

Решение

1. Работу внешней силы можно представить в виде двух составляющих: работы по перемещению груза в поле силы тяжести и работы, обеспечивающей ускорение. В этой связи вполне уместно сначала, воспользовавшись кинематическими соотношениями, определить ускорение

$$h = \frac{at^2}{2}, \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2h}{t^2} = 1\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

2. Определим далее суммарную работу, производимую постоянной силой F на перемещении h

$$A(F) = mgh + mah = mh(g + a) = 4{,}7 \cdot 10^3\,Дж.$$

234.Тело массой m = 100 кг с ускорением a = 1 м/с поднимают по наклонной плоскости длиной L = 2 м, с углом наклона α = 30^0 к горизонту. Коэффициент трения между телом и плоскостью равен μ = 0,1. Определите работу, совершаемую при заданном перемещении тела.

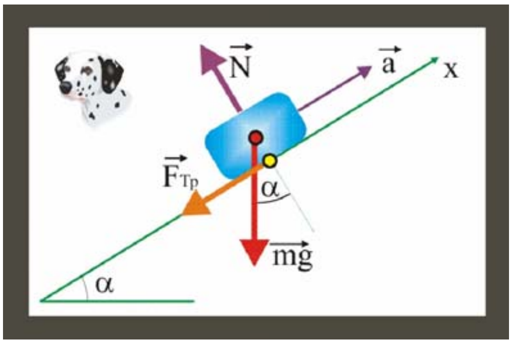


Рис. 234. Тело на наклонной плоскости

Решение

1. Так же как и в предыдущей задаче, работа внешней силы будет сообщать телу ускорение и увеличивать его потенциальную энергию, преодолевая, при этом, силу трения.

2. Работа, затрачиваемая на изменение потенциальной энергии тела

$$A_1 = mgh = mg\sin\alpha.$$

3.. Работа преодоления силы трения

$$A_2 = \mu mg\cos\alpha L.$$

4 Работа, необходимая для обеспечения ускоренного движения $A_3 = maL$.

5. Полная работа внешней силы определится в виде суммы

$$A_\Sigma = A_1 + A_2 + A_3 = mL(g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha + a) \cong 1{,}37 \cdot 10^3\,Дж.$$

235. Вычислить работу A, совершаемую на пути s=12 м равномерно возрастающей силой, если в начале пути сила F_1= 10 Н, в конце пути F_2 = 46 Н.

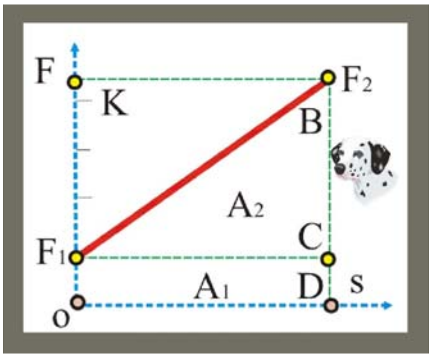


Рис. 235. Линейная сила

Решение

1 Графическую зависимость действующей силы от пройденного расстояния можно изобразить посредствам трапеции, а работу интерпретировать в виде суммы площадей геометрических фигур: прямоугольника OF_1CD и треугольника F_1F_2C

$$A_\Sigma = A_1 + A_2 = F_1 s + \frac{F_2 s}{2} = 336\,Дж.$$

236. Тело массой m= 1 кг, брошенное с вышки в горизонтальном направлении со скоростью v_0 =20 м/с, через t =3 с упало на землю. Определить кинетическую энергию K, которую имело тело в момент удара о землю. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение

1 Квадрат абсолютной скорости тела при горизонтальном броске можно определить посредствам кинематических соотношений

$$v_x = v_0, \quad v_y = gt, \quad \Rightarrow \quad v^2 = v_0^2 + g^2t^2.$$

2 Кинетическая энергия в момент касания телом земли

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(v_0^2 + g^2t^2\right) \cong 650 \text{Дж}.$$

---

237. Камень брошен вверх под углом α = 60° к плоскости горизонта. Кинетическая энергия K_0 камня в начальный момент времени равна 20 Дж. Определить кинетическую K и потенциальную U энергии камня в высшей точке его траектории. Сопротивлением воздуха пренебречь.

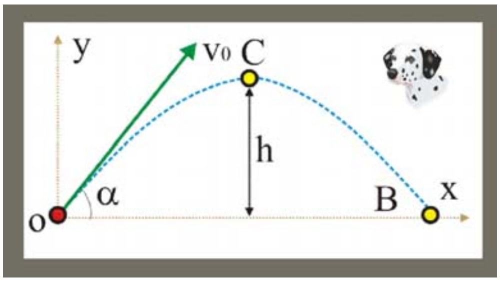


Рис. 237. Полёт камня

Решение

1. Для вычисления потенциальной энергии тела в точке С воспользуемся кинематическими уравнениями для тела, брошенного под углом к горизонту

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g},$$

с другой стороны, с позиций закона сохранения энергии можно найти начальную скорость тела v_0

$$K_0 = \frac{mv_0^2}{2}, \quad \Rightarrow \quad v_0^2 = \frac{2K_0}{m}.$$

Совместим далее уравнения и запишем выражение для потенциальной энергии

$$U_C = mgh = \frac{2K_0}{m}\frac{mg\sin^2\alpha}{2g} = K_0\sin^2\alpha \cong 15 \text{Дж}.$$

2. Кинетическая энергия в верхней точке траектории определится из следующих соображений

$$v_C = v_0\cos\alpha, \quad K_C = \frac{mv_0^2\cos^2\alpha}{2} = K_0\cos^2\alpha = 5 \text{Дж}.$$

---

238. Насос выбрасывает струю воды диаметром d = 2 см со скоростью v =20 м/с. Найдите мощность N, необходимую для выбрасывания воды.

Решение

1. Определим площадь поперечного сечения струи

$$s = \pi d^2/4.$$

2. Найдём далее секундный расход воды, т.е. массу воды, пересекающую сечение за 1 секунду

$$Q = sv.$$

3. Динамическое давление, создаваемое в струе воды

$$p = \rho v^2/2,$$

где $\rho = 1\cdot10^3$ кг/м^3 - плотность воды.

4. Мощность, необходимая для создания такого давления

$$N = Qp = \frac{\pi\rho d^2 v^3}{8} \cong 1526 \text{ Вт}.$$

---

239. Какова мощность N воздушного потока сечением S= =0,55 м^2 при скорости воздуха v = 20 м/с и нормальных условиях?

Решение

1. Нормальные условия предполагают, что температура и внешнее давление и объём одного моля газа составляют: T_0 = 273 К; $p_0 = 1\cdot10^5$ Па, V_0 = 22,4 м^3/моль, что позволяет определить посредствам уравнения Клапейрона – Менделеева плотность воздуха

$$p_0V_0 = \frac{m}{\mu}RT_0, \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{p_0\mu}{RT_0} = \frac{10^5\cdot 30\cdot 10^{-3}}{8{,}3\cdot 273} \cong 1{,}3\frac{кг}{м^3}.$$

2. Далее определим мощность потока

$$N = \frac{\rho s v^3}{2} \cong 2860 \text{ Вт}.$$

---

240. Вертолет массой m = 3т висит в воздухе. Определить мощность N, развиваемую двигателем вертолета в этом положении, при двух значениях диаметра d ротора: 1) 18 м; 2) 8 м. При расчете принять, что ротор отбрасывает вниз цилиндрическую струю воздуха диаметром, равным диаметру ротора.

Решение

1. Подъёмная сила вертолётного винта в режиме зависания должна быть равна весу геликоптера. Это обстоятельство, применительно к воздушной среде, целесообразно выразить не через сосредоточенные силы, а через соответствующие давления, т.е. распределённые силы. Динамическое давление, создаваемое винтом вертолёта в режиме зависания должно быть равно эквивалентному статическому давлению, обусловленному весом аппарата

$$p_s = \frac{4mg}{\pi d^2}, \quad p_d = \rho v^2, \quad \frac{4mg}{\pi d^2} = \rho v^2.$$

Из уравнения несложно определить величину скорости потока воздуха v, удовлетворяющую обсуждаемому условию

$$v = \sqrt{\frac{4mg}{\pi d^2\rho}} = \frac{1}{d}\sqrt{\frac{4mg}{\pi\rho}} \cong 9{,}5 \text{ м/с}.$$

2. Определим далее мощность, развиваемую двигателем вертолёта

$$N = \frac{\rho s v^3}{2} = \frac{1}{d}\sqrt{\frac{m^3g^3}{\pi\rho}}.$$

Для винта диаметром d_1 = 18 м для зависания вертолета потребуется мощность N_1 = 140 кВт, для винта с d_2 = 8 м, N_2 = 313 кВт.

---

241. С какой наименьшей высоты h должен начать скатываться акробат на велосипеде (не работая ногами), чтобы проехать по траектории, имеющей форму «мертвой петли» радиусом R = 4 м, и не оторваться от дорожки в верхней точке петли? Трением пренебречь.

Решение

1. Скорость акробата в верхней точке петли C должна быть таковой, чтобы нормальное ускорение было равно или превосходило ускорение свободного

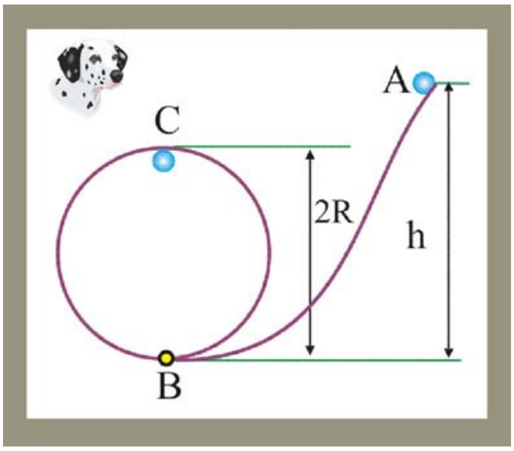


Рис. 241. «Мёртвая петля»

падения. Велосипедиста можно в этой точке представить неподвижным, если к действующим силам добавить силу инерции, центробежную силу. Уравнение второго закона Ньютона представится в виде

$$N + mg = mv_C^2/R\,,\quad mv_C^2/R - mg = N\,,$$

где N – реакция связи петли, v_C – скорость акробата в точке C.

2. Запишем далее закон сохранения энергии применительно к точкам A и C траектории

$$mgh = \frac{mv_C^2}{2} + mg2R\,.$$

3. Выразим из величину v_C и подставим в исходное уравнение

$$v_C^2 = 2gh - 4Rg, \quad \Rightarrow \quad N = mg\left(\frac{2h}{R} - 5\right).$$

4. Условие прохождения верхней точки петли запишется как:

$$N \ge 0, \quad \Rightarrow \quad [(2h/R) - 5] \ge 0, \quad \Rightarrow \quad h \ge 2{,}5R = 10\text{м}\,.$$

---

242. Небольшая упругая частица скользит с наивысшей точки купола, имеющего форму полусферы радиуса R и упруго отразившись от горизонтальной поверхности, снова подскакивает вверх. Определите высоту точки отрыва частицы от купола и высоту её подъёма после отскока. Трением пренебречь.

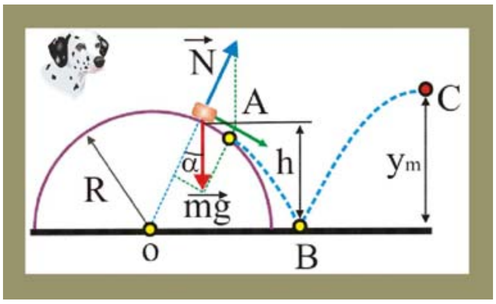


Рис. 242. Точка отрыва

Решение

1.Уравнение второго закона Ньютона в проекции на направление нормальной реакции связи N будет выглядеть в данном случае следующим образом

$$\frac{mv^2}{R} = mg\cos\alpha - N\,.$$

2. В момент отрыва частицы от поверхности полусферы (точка A) проекция силы тяжести на выбранное выше направление по модулю должна быть равна силе инерции, т.е. N = 0, поэтому уравнение закона Ньютона примет вид:

$$mg\cos\alpha = mv^2/R\,.$$

3. В соответствии с законом сохранения энергии в точке A сумма кинетической и потенциальной энергии частицы должна быть равна её потенциальной энергии в верхней точке полусферы

$$mgR = mgR\cos\alpha + mv^2/2\,.$$

4. Совместное решение уравнений позволяет получить следующие соотношения

$$\cos\alpha = \frac{2}{3}, \quad v^2 = \frac{2}{3}Rg, \quad h = R\cos\alpha = \frac{2}{3}R\,.$$

5. После упругого соударения с горизонтальной поверхностью частица по параболической траектории полетит как тело, брошенное под углом α к горизонту, причём на высоте h её скорость будет равна скорости в точке отрыва

$$|v| = \sqrt{\frac{2Rg}{3}}.$$

6. Максимальная высота подъема частицы над горизонтом y_m определится как сумма $y_m = h + \Delta y$, т.е.

$$y_m = h + \frac{v^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{23}{27}R.$$

---

243. Мотоциклист едет по горизонтальной дороге. Какую наименьшую скорость v он должен развить, чтобы, выключив мотор, проехать по треку, имеющему форму «мертвой петли» радиусом R = 4 м? Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

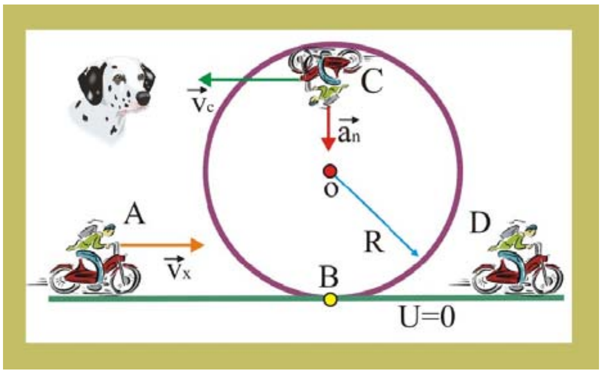


Рис. 243. Мотоциклетные забавы

Решение

1. Условие прохождения мотоциклистом критической точки C можно записать так:

$$a_n = \frac{v_c^2}{R} \ge g,$$

откуда несложно определить минимальное значение скорости в точке C: $v_c^2 = Rg$.

2. Принимая поверхность земли за нулевой уровень потенциальной энергии, закон сохранения энергии для точек A и C можно представить следующим уравнением

$$\frac{mv_x^2}{2} = 2mgR + \frac{mv_c^2}{2}.$$

3. Подставим далее в уравнение (2) значение скорости v_c

$$v_x^2 = 4gR + gR, \quad \Rightarrow \quad v_x = \sqrt{5gR} = 14\text{м}.$$

---

244. Ядро некоторого атома распадается на два осколка массами $m_1 = 1{,}6\cdot 10^{-25}$ кг и $m_2 = 2{,}4\cdot 10^{-25}$ кг. Определить кинетическую энергию K_2 второго осколка, если энергия K_1 первого осколка равна 18 нДж.

Решение

1. Распад ядра происходит под действием внутренних сил, поэтому справедлив законы сохранения импульса и энергии. Полагая в начальный момент времени материнское ядро неподвижным, можно записать этот закон так:

$$m_1 v_1 = m_2 v_2. \Rightarrow \quad v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2}.$$

2. Скорость первого осколка целесообразно выразить через заданное по условию значение кинетической энергии

$$K_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}, \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{2K_1}{m_1}}.$$

3. Кинетическая энергия второго осколка будет равна:

$$K_2 = \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_2}{2}\frac{m_1^2 v_1^2}{m_2^2} = \frac{m_1}{m_2}K_1 = 1{,}2\cdot 10^{-8}\,Дж.$$

---

245. Определите кинетическую энергию тела массой 1 кг, брошенного горизонтально со скоростью 20 м/с, в конце четвёртой секунды его движения.

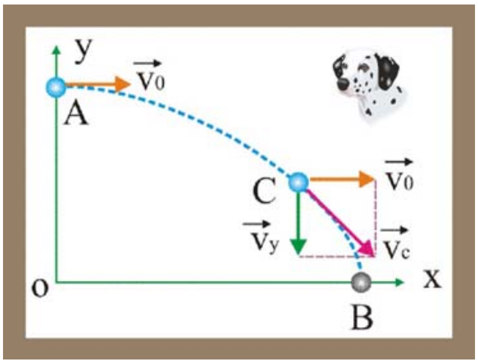


Рис.245. Горизонтальный бросок

Решение

1. Тело, брошенное горизонтально с некоторой высоты перемещается по параболической траектории, причём горизонтальная составляющая скорости остаётся постоянной и равной начальной скорости броска, вертикальная же составляющая изменяется пропорционально времени

$$v_y = gt.$$

2. Квадрат скорости тела в заданное время t определится уравнением

$$v_C^2 = v_0^2 + (gt)^2.$$

3. Кинетическая энергия будет, при этом, составлять

$$K = \frac{mv_C^2}{2} = \frac{m}{2}\left[v_0^2 + (gt)^2\right] \cong 1\cdot 10^3\,Дж.$$

---

246. Неподвижный маятник в виде прямого тонкого невесомого стержня длины L = 1 м и различных шаров массой M = 1 кг обстреливают пулями массой m = 10 г, летящими горизонтально со скоростью v = 50 м/с. Зарегистрированы три случая: 1) пуля застряла в шаре; 2) пуля пробила шар и вылетела из него со скоростью v_1 = v/5; пуля отскочила от шара со скоростью v_2 = v/2.Определите углы отклонения стержня от положения равновесия.

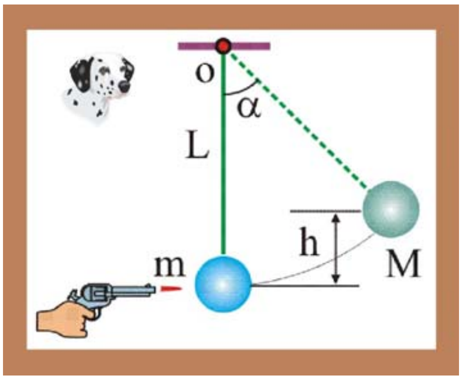


Рис. 246. Обстрел маятника

Решение

1. Рассмотрим случай когда пуля остаётся в шаре. Закон сохранения импульса в этом случае будет иметь вид

$$mv = (M+m)u_1, \Rightarrow u_1 = \frac{mv}{M+m} \cong 0{,}5\,м/с,$$

где u – скорость шара с застрявшей пулей.

Закон сохранения энергии представится в следующем виде

$$(m+M)gL(1-\cos\alpha) = \frac{(m+M)u_1^2}{2},$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{u_1^2}{2Lg}, \quad \alpha = \arccos\left(1 - \frac{u_1^2}{2Lg}\right) \cong 9^0.$$

2. Когда на пути пули располагают шар, который она пробивает насквозь, закон сохранения импульса записывается следующим образом

$$mv = Mu_2 + mv_1, \quad \Rightarrow \quad u_2 = \frac{m(v - v_1)}{M} \cong 0{,}4\frac{м}{c},$$

где $v_1 = v/5$ – скорость пули после пролёта шара. Подстановка значения скорости шара даёт $\alpha = 7{,}2^0$.

3. Абсолютно упругое взаимодействие пули с шаром характеризуется следующим уравнением закона сохранения импульса

$$mv = Mu_3 + mv_2, \quad \Rightarrow \quad u_3 = \frac{m(v - 0{,}5v)}{M} \cong 0{,}25\frac{м}{c},$$

что соответствует углу отклонения $\alpha \cong 4{,}5^0$.

---

247. Два груза массами m_1 =10 кг и m_2 =15 кг подвешены на нитях длиной L = 2 м так, что грузы соприкасаются между собой. Меньший груз был отклонен на угол α = 60° и отпущен без начальной скорости. Определить высоту h, на которую поднимутся оба груза после удара. Удар грузов считать неупругим.

Решение

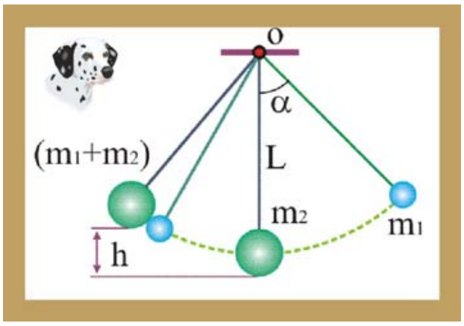


Рис. 247. Ударное взаимодействие

1. Используя закон сохранения энергии, определим скорость шара массой m_1 в момент его соприкосновения с более массивным шаром массой m_2

$$m_1 gL(1 - \cos\alpha) = \frac{mv_1^2}{2},$$

$$v_1 = \sqrt{Lg} \cong 4{,}5 м/с.$$

2. Запишем далее закон сохранения импульса и определим скорость шаров u при их совместном движении

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u, \quad \Rightarrow \quad u = \frac{m_1 v_1}{(m_1 + m_2)}.$$

3. Применим второй раз закон сохранения энергии, теперь уже к двум движущимся совместно шарам и определим высоту их подъёма h

$$(m_1 + m_2)gh = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}, \Rightarrow h = \frac{m_1^2 v_1^2}{2g(m_1 + m_2)^2} \cong 0{,}162 м.$$

Динамика твёрдого тела

248. Как изменится осевой момент инерции некоторой системы материальных точек с уменьшением всех линейных размеров в два раза при одновременном увеличении массы в три раза?

Решение

1. Положение цента масс системы, состоящей из n материальных частиц, в общем случае определяется вектором

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_1^n m_k \vec{r}_k}{\sum_1^1 m_k},$$

где $m_k, \vec{r}_k$ - масса и радиус-вектор k-той частицы, входящей в состав системы.

2. Момент инерции системы материальных точек относительно оси, проходящей через центр масс равен

$$J_C = \sum_1^n m_k r_C^2 .$$

3. По условию задачи масса системы увеличивается в три раза, т.е.

$$M_1 = \sum_1^n m_k, \quad M_2 = 3\sum_1^n m_k = 3M_1, \qquad (3)$$

а все геометрические размеры уменьшаются в два раза

$$|\vec{r}_{C2}| = |r_{C1}|/2, \quad \Rightarrow (r_{C2})^2 = r_{C2}^2/4 .$$

4. Подставляя найденные величины в уравнение момента инерции, получим

$$J_{C2} = 0{,}75 J_{C1},$$

другими словами, момент инерции системы уменьшится на 25%.

---

249. Два маленьких шарика массой m_1 = 10 г и m_2 = 20 г скреплены тонким невесомым стержнем длиной L = 20 см. Определить момент инерции J системы относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через центр масс.

Решение

1. Определим положение центра масс системы шаров, воспользовавшись уравнением (1) предыдущей задачи в проекции на ось Ox

$$x_C = x_1 = \frac{m \cdot 0 + 2m \cdot L}{m + 2m} = \frac{2}{3} L .$$

2. Определим моменты инерции шаров относительно оси, проходящей через центр масс системы перпендикулярно плоскости чертежа

$$J_1 = m x_1^2 = m \frac{4}{9} L^2, \quad J_2 = 2m x_2^2 = \frac{2}{9} L^2 .$$

3. Момент инерции системы шаров определится в виде суммы

$$J_C = J_1 + J_2 = \frac{2mL^2}{3} \cong 2{,}7 \cdot 10^{-4} \text{ кг·м}^2.$$

---

250. Три маленьких шарика массой m=10 г каждый расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной a=20 см и скреплены между собой. Определите момент инерции J системы относительно оси, перпендикулярной плоскости треугольника и проходящей через центр описанной окружности. Массой стержней, соединяющих шары, пренебречь.

Решение

1. Поскольку треугольник, образованный невесомыми стержнями равносторонний, а высоты совпадают с медианами, то

$$h = a\cos 30^0 = a/2,$$

где h – высота равностороннего треугольника.

2. Центр масс данной материальной системы C совпадает с центром описанной окружности радиуса R

$$R = \frac{2}{3}h = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

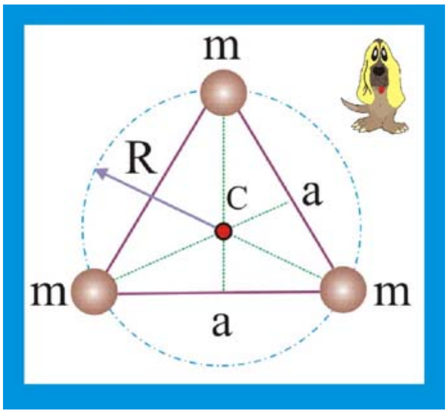


Рис. 250. Три шарика и стержни

3. Момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, определится традиционно

$$J_C = 3mR^2 = \frac{3ma^2}{3} = ma^2 \cong 4\cdot 10^{-4}\,кг\cdot м^2.$$

---

251. Определите момент инерции молекулы воды H_2O относительно оси Oz проходящей через центр инерции молекулы C (ось z перпендикулярна плоскости чертежа). Расстояние между атомами водорода и кислорода принять равным $d \cong 10^{-10}$ м, валентный угол $\alpha \cong 104^0 30'$. Атомную массу водорода считать равной A(H) = 1, кислорода – A(O) = 16.

Решение

1. Как известно 1 атомная единица массы соответствует, примерно $1{,}7\cdot 10^{-27}$ кг. Определим, исходя из этого массы атомов водорода и кислорода

$$m_H \cong 1{,}7\cdot 10^{-27}\,кг,\quad m_O \cong 2{,}7\cdot 10^{-26}\,кг.$$

2. Так как атомы молекулы воды расположены в одной плоскости, то для определения положения центра масс удобно воспользоваться дополнительной системой координат $\{o^*, x^*, y^*\}$, совместив её начало с атомом кислорода. В этом случае $x_H = d\cos(\alpha/2)$, $x_O = 0$, поэтому

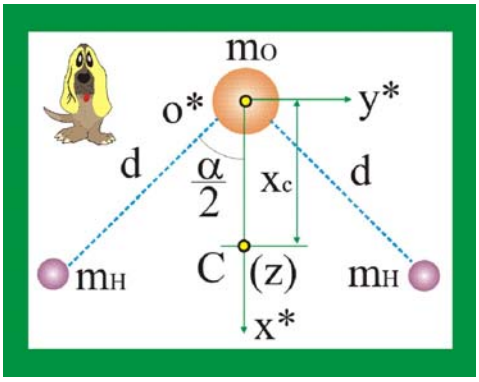


Рис. 251. Молекула воды H_2O

$$x_c = \frac{2m_H}{2m_H + m_O} d\cos\frac{\alpha}{2}.$$

3. Момент инерции молекулы относительно оси z* определится как

$$J_{z^*} = 2m_H d^2.$$

4. Искомый момент инерции J_z выразим с помощью теоремы Гюйгенса – Штейнера

$$J_z = J_{z^*} - (2m_H + m_O)x_C^2,$$

где $x_c = a$ – расстояние между параллельными осями z и z^*

5. Подставим далее значение x_C

$$J_z = 2m_H d - (2m_H + m_O)\left(\frac{2m_H}{2m_H + m_O}\right)^2 d^2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$J_z = 2m_H d^2\left(1 - \frac{2m_H}{2m_H + m_O}\cos^2\frac{\alpha}{2}\right) \cong 3{,}2\cdot 10^{-47}\ \text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

---

252. Определите отношение скорости центра масс цилиндра, скатывающегося без проскальзывания, в нижней точке наклонной плоскости к его скорости в этой же точке в случае «чистого» скольжения. Движение в обоих случаях начинается без начальной скорости с одинаковой высоты h.

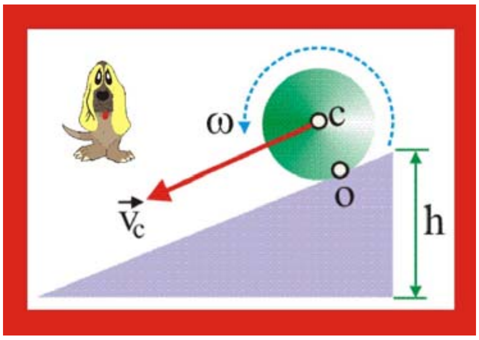


Рис. 252. Два типа движения

Решение

1. В случае «чистого» скольжения движение цилиндра можно считать поступательным, поэтому его кинетическая энергия на основании закона сохранения энергии представится следующим образом:

$$K_1 = \frac{Mv_C^2}{2} = Mgh, \quad v_{C1} = \sqrt{2gh},$$

v_C – скорость центра масс цилиндра, которая при поступательном движении совпадает со скоростями всех прочих точек цилиндра.

2. При скатывании цилиндра его движение можно рассматривать как плоское, которое разлагается на поступательное движение центра масс и вращение прочих точек цилиндра вокруг центра масс. Кинетическая энергия, таким образом, будет представляться в виде суммы поступательной и вращательной составляющих. Вращательная составляющая кинетической энергии определится из следующих соображений:

$$K_\omega = \frac{J_o\omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}(J_C) = \frac{1}{2}\omega^2\left(\frac{MR^2}{2}\right) = \frac{1}{4}Mv_C^2,$$

Закон сохранения энергии для плоского движения цилиндра примет вид

$$K_2 = \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{1}{4}Mv_C^2 = Mgh, \quad v_{C2} = \sqrt{\frac{4gh}{3}}.$$

3. Сравнение уравнений позволяет получить соотношение между скоростями центра масс v_{C2} и v_{C2}

$$v_{C2}/v_{C1} = \sqrt{2/3}.$$

---

253. К маховику с моментом инерции J, вращающемуся с угловой скоростью ω_1 приложили тормозную колодку, спустя некоторое время угловая скорость маховика уменьшилась до величины ω_2. Определите, какая энергия выделилась, при этом, в виде тепла.

Решение

1. Определим величины кинетической энергии маховика при двух заданных значениях угловой скорости

$$K_1 = \frac{1}{2}\omega_1^2 J_z, \quad K_2 = \frac{1}{2}\omega_2^2 J_z.$$

2. Поскольку уменьшение кинетической энергии маховика обусловлено возникновением сил трения, то выделившееся тепло будет, в первом приближении, равно разности энергий, т.е.

$$\Delta Q = \Delta K = K_1 - K_2 = J_z\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)/2.$$

---

254. Оцените время, за которое двойная спираль молекулы ДНК может раскрутиться на две отдельные спирали, если её число витков $N = 1{,}2\cdot 10^4$, а кинетическая энергия вращения молекулы $K \cong 2\cdot 10^{-21}$ Дж, момент инерции относительно оси вращения равен $J_z \cong 9\cdot 10^{-38}$ Дж.

Решение

Рис. 254. Спираль ДНК

1. Кинетическая энергия вращения вокруг неподвижной оси определяется как

$$K = \frac{1}{2}J_z\omega^2, \text{ или } 2K = J_z\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2,$$

где φ – угловая координата, J_z – момент инерции молекулы ДНК, которая представляется в виде «плотно упакованной» спирали.

2. Уравнение кинетической энергии можно преобразовать к следующему интегральному соотношению

$$dt = d\varphi\sqrt{\frac{J_z}{2K}}, \quad \Rightarrow \quad \int_0^\tau dt = \sqrt{\frac{J_z}{2K}}\int_0^\theta d\varphi,$$

$$\tau = 2\pi N\sqrt{\frac{J_z}{2K}} \cong 3{,}6\cdot 10^{-4} \text{ с}.$$

---

255. На диск массы M = 20 г и радиуса R = 5 см, укреплённый на горизонтальной оси, посадили жука массой Δm = 2г. Определите скорость и ускорение членистоногого в нижней точке траектории, если трение в оси отсутствует.

Решение

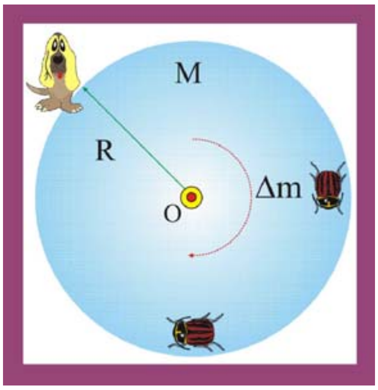


Рис. 255. Жук на диске

1. Определим момент инерции диска с сидящим на его ободе пауком, принимая последнего за материальную точку

$$J_O = J_{O1} + J_{O2} = \frac{MR^2}{2} + \Delta m R^2,$$

$$J_O = R_2\left(M/2 + \Delta m\right).$$

2. Определим далее момент силы относительно оси вращения O, возникающий при действии

на систему «диск – жук» силы веса жука

$$M_O(\Delta m\vec{g}) = \Delta mgR\,.$$

3. Запишем основной закон динамики вращающейся системы тел из которого определим угловое ускорение системы ε

$$J_0\varepsilon = M_O(\Delta m\vec{g}), \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{M_O(\Delta m\vec{g})}{J_O} = \frac{\Delta mg}{R(M/2 + \Delta m)},$$

но, как известно, $\varepsilon = a_n/R$, поэтому для нормального ускорения жука можно записать уравнение

$$a_n = \varepsilon R = \frac{g}{(M/2\Delta m) + 1} \cong 1{,}7\text{м/с}^2.$$

4. Определим линейную скорость жука в нижней точке траектории

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{a_n R} \cong 0{,}29\text{м/с}.$$

---

256. Два подобных маховика изготовлены из одинакового материала, причём линейные размеры первого в два раза больше, чем второго. Определите отношение их кинетических энергий для случая вращения вокруг неподвижной оси с одинаковой угловой скоростью.

Решение

1. Примем следующие соотношения между параметрами маховиков, считая их однородными дисками

$$R_1 = 2R\,, \quad R_2 = R, \quad h_2 = 2h_1, \quad \rho_2 = \rho_1, \quad \omega_2 = \omega_1\,.$$

2. Выразим массы маховиков

$$M_1 = \rho V_1 = 8\pi\rho R^2 h; \quad M_2 = \pi\rho R^2 h\,.$$

3. Запишем уравнения моментов инерции

$$J_{z1} = \frac{M_1 R^2}{2} = \frac{32\pi\rho R^4 h}{2}; \quad J_{z2} = \frac{\pi\rho R^4 h}{2}\,.$$

4. Так как кинетическая энергия вращающегося твёрдого тела равна

$$K = \frac{1}{2}J_z\omega^2\,,\text{то} \quad K_1 = \frac{32\pi\rho R^4 h}{4}\omega^2, \quad K_2 = \frac{\pi\rho R^4 h}{4}\omega^2,$$

откуда следует, что $K_1/K_2 = 32$.

---

257. Тонкий обруч радиуса R раскрутили вокруг его оси с угловой скоростью ω и положили плашмя на горизонтальный пол. Через какое время обруч остановится, если коэффициент трения между обручем и полом равен μ? Сколько оборотов сделает маховик до остановки?

Решение

1. Запишем уравнение момента силы трения относительно оси вращения обруча

$$M_z(\vec{F}_{\text{Тр}}) = \mu mgR\,.$$

2. Определим среднюю величину углового ускорения ε

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}, \quad <\varepsilon> = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\tau} = \frac{\omega}{\tau}, \text{ так как } \omega_2 = 0, \quad \omega_1 = \omega.$$

3. Подставим величины момента сил трения и угловое ускорение в основной закон динамики твёрдого тела

$$J_z\varepsilon = M_z(\vec{F}), \quad MR^2 \cdot \frac{\omega}{\tau} = \mu MgR, \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{\omega R}{\mu g}.$$

4. Определим число полных оборотов обруча до полной остановки, считая, что движение равнозамедленное. Уравнение угловой координаты имеет вид

$$\varphi = 2\pi N = \frac{\varepsilon\tau^2}{2}, \text{ откуда: } \quad N = \frac{\omega^2 R}{4\pi\mu g}.$$

---

258. Маховик в виде кольца массы M и радиуса R с невесомыми спицами раскрутили до угловой скорости ω. Вследствие действия трения маховик остановился. Определите момент сил трения, если: 1) движение продолжалось некоторое время τ; 2) до остановки маховик сделал N полных оборотов.

Решение

1. Запишем основной закон динамики вращательного движения твёрдого тела

$$J_z\varepsilon = M_z(F_{Tp}).$$

2. Подставим значение момента инерции кольца, углового ускорения ε и момента сил трения относительно оси вращения

$$MR^2(\omega/\tau) = M_z(\vec{F}_{Tp}),$$

3. В случае, когда задано число полных оборотов маховика N до остановки необходимо выразить время следующим образом

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \frac{2\pi N}{\tau}, \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{4\pi N}{\omega} \quad .$$

4. При подстановке τ получаем для момента сил трения уравнение

$$M_z(\vec{F}_{Tp}) = \frac{MR^2\omega^2}{4\pi N}.$$

---

259. Катушку с нитками, расположенную на горизонтальной поверхности пытаются привести в движение, последовательно прикладывая к нити силы разного направления F_1, F_2 и F_3. Модули сил одинаковы. Объясните, как станет двигаться катушка в каждом эксперименте.

Решение

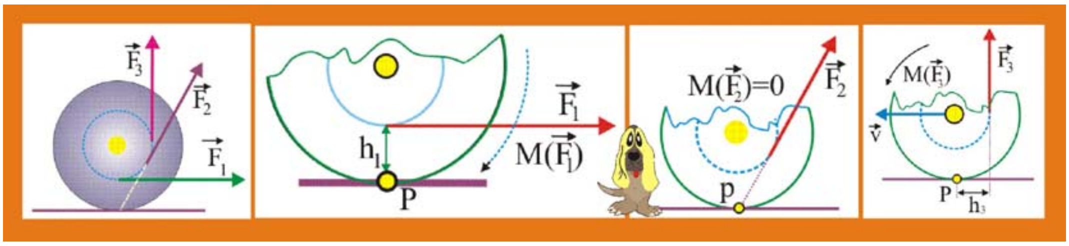


Рис. 259. Движение катушки по горизонтальной плоскости

1. Катушка, расположенная на плоскости ввиду наложенных на неё связей может совершать либо плоское движение, либо вращательное. Если прикладывать к нитке силу в направлении F_1, то относительно оси, перпендикулярной плоскости чертежа и проходящей через точку P, возникнет отрицательный момент силы $M_p(\vec{F}_1) = F_1 \cdot h$, направленный по часовой стрелке. Через точку P проходит мгновенная ось вращения т.к. эта точка, будучи общей между катушкой и плоскостью в настоящее мгновение неподвижна. Таким образом под действием силы F_1 центр масс катушки будет перемещаться вправо, а катушка будет катится, вращаясь по часовой стрелке.

2. Линия действия силы F_2 пересекает ось вращения, момент этой силы равен нулю, другими словами, катушка будет вращаться вокруг центра масс, оставаясь на месте.

3. При действии силы F_3 относительно оси, проходящей через точку P возникнет положительный момент $M(\vec{F}_3) = F_3 \cdot h_3$ под действием которого катушка будет совершать плоское движение, т.е. покатится таким образом, что центр масс будет перемещаться влево. Мгновенная ось вращения, при этом, тоже станет перемещаться параллельно перемещению центра масс.

---

260. По кольцу растекается капля жидкости. Покажите, как при этом изменяется момент инерции жидкости относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр.

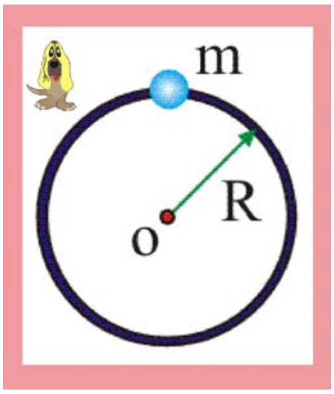


Рис. 260. Капля на кольце

Решение

1. В случае, когда жидкость присутствует на кольце в виде капли, диаметром много меньшим радиуса кольца, момент инерции этой точечной массы равен

$$J_{O1} = mR^2.$$

2. Когда жидкость растекается, то она принимает форму кольца, момент инерции которого, как известно, определяется как $J_{O2} = mR^2$. Таким образом, преобразование формы жидкости из капли в кольцо никак не изменяет момент инерции относительно заданной оси.

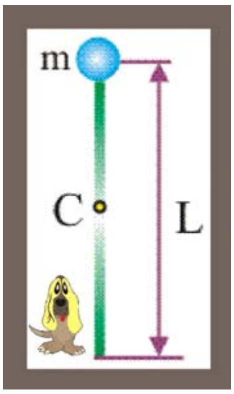


Рис. 261. Капля на стержне

261. Капля жидкости массой m первоначально находилась на одном из концов тонкого стержня длины L, а затем растеклась равномерно по всему стержню. Как изменился момент инерции жидкости относительно оси, проходящей перпендикулярно стержню через его середину C?

Решение

1. Момент инерции капли можно вычислить, полагая её материальной точкой, расположенной на расстоянии L/2 от заданной оси

$$J_{C1} = mL^2/4.$$

2. При растекании капли по стержню её момент инерции меняется, становясь равным

$$J_{C2} = \frac{mL^2}{12}.$$

3. Совместное рассмотрение (1) и (2) показывает, что момент жидкости уменьшается в три раза

$$\chi = J_{C1}/J_{C2} = 12/4 = 3.$$

---

262. Свинцовый цилиндр сплющили таким образом, что его высота уменьшилась в двадцать пять раз. Каким образом при этом изменяется момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс.

Решение

1. Сплющивание цилиндра не сопровождается изменением его массы и объёма, что является основанием для определения соотношения радиусов

$$V_1 = \pi R_1^2 h, \quad V_2 = \pi R_2^2 \frac{h}{25}, \quad \Rightarrow \quad R_2 = 5R_1.$$

2. Определим изменение момента инерции относительно заданной оси

$$J_{C1} = \frac{mR^2}{2}, \quad J_{C2} = \frac{25mR^2}{2}, \quad \Rightarrow \quad \frac{J_{C2}}{J_{C1}} = 25,$$

при сплющивании цилиндра его момент инерции увеличивается пропорционально изменению его высоты.

---

263. Из сплошного однородного цилиндра сделали полый, удалив половину массы. Определите, как изменится момент инерции цилиндра относительно его оси?

Решение

1. Определим внутренний радиус полого цилиндра с учётом уменьшения вдвое его массы, т.е.

$$\rho\pi h R_1^2 = 2\rho\pi h\left(R_1^2 - R_2^2\right), \quad R_1^2 = 2R_1^2 - 2R_2^2,$$

$$R_2 = 0{,}71R_1.$$

2. Моменты инерции сплошного и полого цилиндров относительно их оси симметрии определится как

$$J_{C1} = \frac{MR_1^2}{2}, \quad J_{C2} = \frac{M}{4}\left(R_1^2 + R_2^2\right) = \frac{1{,}5MR_1^2}{4},$$

3. Отношение моментов инерции

$$J_{C1}/J_{C2} = 0{,}5/0{,}375 \cong 1{,}33.$$

---

264. Колесо массой m = 5 кг и радиусом R = 0,8 м стоит вертикально на полу перед ступенькой, высотой h =0,1м таким образом, что касается её. Какую минимальную горизонтальную силу нужно приложить к оси колеса, чтобы вкатить его на ступеньку?

Решение

.

1. Всякое тело, способное вращаться, может это делать в случае действия на него соответствующего момента относительно предполагаемой оси вращения. Момент силы отличен от нуля, если линия действия силы не пересекается с осью вращения.

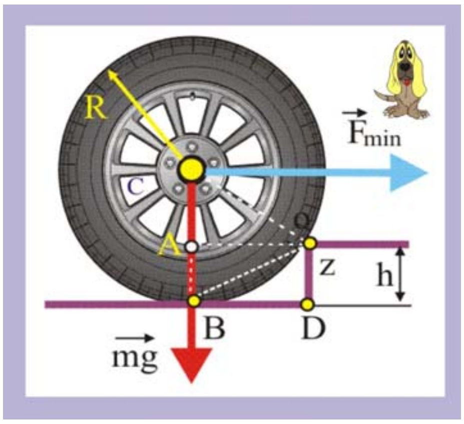


Рис. 264. Колесо на ступеньке

2. Чтобы вкатить колесо на ступеньку, необходимо поднять его центр масс на высоту h. Сила тяжести относительно оси вращения, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости чертежа, создаёт момент $M_z(m\vec{g})$.

3. Определим плечо силы тяжести BD = ℓ из следующих геометрических соображений

$$OC^2 = \sqrt{AC^2 + BD^2},$$

или

$$R^2 = \sqrt{(R-h)^2 + \ell^2},$$

$$\ell = \sqrt{h(2R-h)}.$$

Таким образом, момент силы тяжести относительно оси z определится как

$$M_z(m\vec{g}) = mg\sqrt{h(2R-h)}.$$

4. Вращение колеса вокруг оси z, под действием горизонтальной силы станет возможным, если момент этой силы будет равен или превзойдёт момент силы тяжести относительно этой же оси. Математически это условие можно оформить следующим образом

$$F_{min} \cdot (R-h) \ge mg\sqrt{h(2R-h)},$$

Величина минимальной силы будет равна:

$$F_{min} \ge \frac{mg\sqrt{h(2R-h)}}{R-h} \cong 27{,}7 \text{ Н}.$$

---

265. На автомобильную шину с горизонтальной осью массой m = 4 кг и радиусом R = 0,5 м намотана невесомая нить, за которую тянут вниз с силой, изменяющейся по закону $F(t) = 3t - 0{,}2t^2$, Н. На шину действует постоянная сила трения с моментом $M(F_s)$ = 4,9 Н·м. Определите, какую линейную скорость будут иметь точки обода колеса через τ = 10 с после начала движения. Шину считать однородным цилиндром.

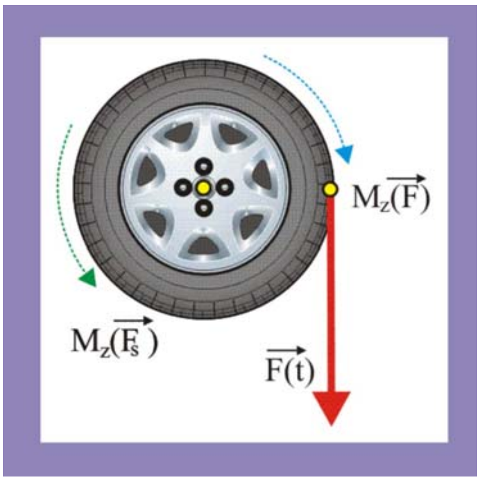


Рис. 265. Раскручивание шины

Решение

1. Считая колесо цилиндром определим момент его инерции относительно оси вращения z

$$J_z = \frac{mR^2}{2} \cong 0{,}5 \text{кг} \cdot \text{м}^2.$$

2. Найдём значение силы, приложенной к нити в заданный момент времени

$$F = 3 \cdot 10 - 0{,}2 \cdot 100 \cong 10 \text{Н}.$$

3. Запишем далее основное динамическое уравнение для вращательного движения твёрдого тела и определим из него угловое ускорение маховика ε

$$J_z\varepsilon = M_z(\vec{F}) - M_z(\vec{F}_s), \quad \varepsilon = \frac{M_z(\vec{F}) - M_z(\vec{F}_s)}{J_z} \cong 0{,}2 \text{ рад/с}^2.$$

4. Определим угловую скорость маховика и скорость точек на его ободе, используя кинематические соотношения для вращательного движения, начинающегося из состояния покоя

$$\omega = \varepsilon\tau \cong 2\,\text{рад/с}, \qquad v = \omega R \cong 1\,\text{м/с}.$$

---

266. Однородный диск массой M = 2 кг и радиусом R = 0,2 м может свободно вращаться вокруг оси O, проходящей через центр диска перпендикулярно его плоскости. В диск попадает горизонтально летящая со скоростью v = 100 м/с пуля массой m = 10 г. Определите угловую скорость вращения диска вместе с застрявшей в нём пулей.

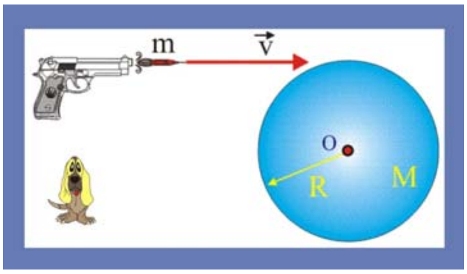


Рис. 266. Вращение диска с пулей

Решение

1. Запишем закон сохранения момента импульса для системы «пуля – диск», откуда и выразим искомую угловую скорость ω

$$L_{оп} = J_{оп}\cdot\omega + J_{од}\omega,$$

$$\omega = \frac{mvR}{mR^2 + \frac{MR^2}{2}} = \frac{2mv}{R(M+2m)} \cong 50\,\text{рад/с},$$

где $L_{оп}$ – момент импульса пули относительно оси вращения, $J_{оп}$ – момент инерции пули, $J_{од}$ – момент инерции диска.

---

267. Космическая станция в виде цилиндра радиусом R = 200 м и массой 5000 т вращается вокруг оси, проходящей через её центр масс перпендикулярно основаниям с угловой скоростью ω_1 = 0,5 рад/с. В станцию попадает метеорит массой m = 100 кг, летящий по касательной к образующей цилиндрической поверхности со скоростью 20 км/с. Определите изменение угловой скорости станции $\Delta\omega$ после столкновения с метеоритом.

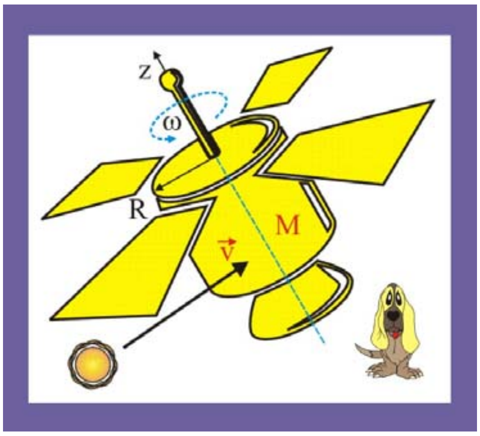


Рис. 267. Метеорит и станция

Решение

1. В данной ситуации справедлив закон сохранения момента импульса, т.е. момент импульса системы «метеорит – станция» до столкновения должен быть равен моменту импульса системы после попадания в станцию метеорита. Определим, исходя из этого, новую угловую скорость станции

$$mvR + J_{z1}\omega_1 = (J_{z1} + J_{z2})\omega_2,$$

$$mvR + \frac{MR^2}{2}\omega_1 = \left(mR^2 + \frac{MR^2}{2}\right)\omega_2,$$

$$\omega_2 = \frac{2mvR + MR^2\omega_1}{2mR^2 + MR^2} = \frac{2mv + MR\omega_1}{R(2m+M)}.$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{2mv + MR\omega_1}{R(2m+M)} \cong 0{,}54 - 0{,}5 = 0{,}04\,\text{рад/с}.$$

---

268. Вычислите момент импульса нашей планеты Земля в её суточном и годовом циклах движения, полагая радиус Земли $R_1 \cong 6400$ км, массу планеты $M \cong 6\cdot10^{24}$ кг, среднее расстояние от Земли до Солнца $R_2 \cong 1{,}5\cdot10^{11}$ м.

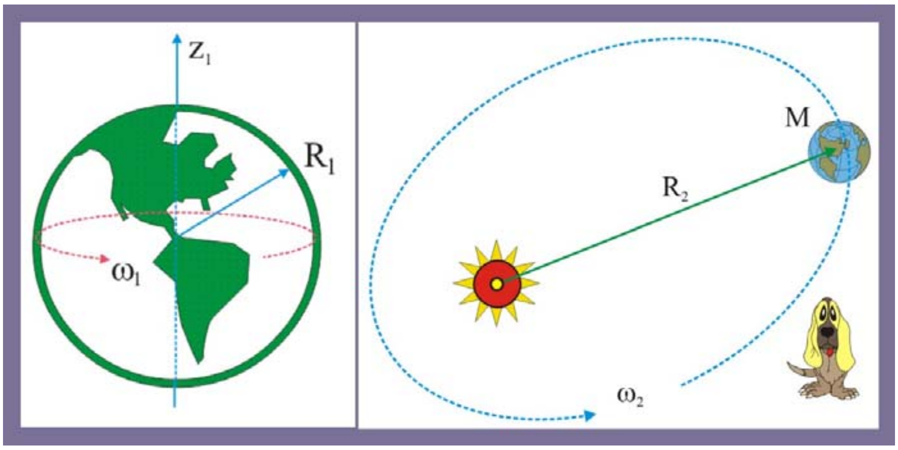


Рис. 268.Суточное и годовое движение Земли

Решение

1. Период обращения Земли вокруг собственной оси равен T_1 = 24 час, что соответствует T_1 = 86400 с, что позволяет определить угловую скорость вращения

$$\omega_1 = 2\pi/T \cong 7{,}27\cdot10^{-5}\ \text{рад/с}.$$

2. Момент инерции Земли относительно оси вращения можно определить, в первом приближении, как для однородного шара

$$J_{z1} = \frac{2MR_1^2}{5} \cong 9{,}7\cdot10^{37}\ \text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

3. Момент количества движения в суточном вращении нашей планеты

$$L_{z1} = J_{z1}\cdot\omega_1 \cong 7{,}1\cdot10^{33}\ \text{кгм}^2/\text{с}.$$

4. При рассмотрении вращения Земли вокруг Солнца её вполне можно считать материальной точкой, ($R_2 >> R_1$) которая с периодом T_2 = 365 суток ≅ $3{,}16\cdot10^7$с движется по круговой траектории. Угловая скорость и момент инерции Земли относительно оси, проходящей через Солнце

$$\omega_2 = 2\pi/T_2 \cong 2\cdot10^{-7}\ \text{с},\ \ J_{z2} = MR_2^2 \cong 1{,}3\cdot10^{47}\text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

5. Орбитальный момент количества движения Земли, таким образом, будет равен

$$L_{z2} = J_{z2}\cdot\omega_2 \cong 2{,}6\cdot10^{40}\ \text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}.$$

---

269. Если представить себе, что все живущие на Земле люди соберутся в области экватора и выстоятся в форме кольца, то на сколько такая миграция населения изменит продолжительность суток?

Решение

1. Примем, что нашу планету населяет $N = 6\cdot10^9$ человек, средняя масса каждого пусть составляет <m> ≅ 50 кг. Таким образом, масса «живого» кольца равна $M \cong 3\cdot10^{11}$ кг, а его радиус совпадает с радиусом Земли, т.е. $R \cong 6{,}4\cdot10^6$ м. Масса Земли равна $M_0 \cong 6\cdot10^{24}$ кг.

2. В результате перемещения людей масса планеты не изменяется и новые внешние силы не возникают, поэтому справедлив закон сохранения момента импульса

$$J_{z1}\omega_1 = (J_{z1} + J_{z2})\omega_2\,,$$

$$\frac{2M_0R^2}{5}\omega_1 = \left[\frac{2(M_0 - M)R^2}{5} + MR^2\right]\omega_2\,,$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{M_0}{M_0 - 1{,}5M} \cong 1{,}00000000000051,$$

Как видно, из полученных результатов, этот способ изменения продолжительности суток нашей планеты не состоятелен, ничтожны люди в сравнении с планетой, по крайней мере по массе.

---

270. Платформа в виде однородного горизонтального диска вращается с угловой скоростью ω = 0,314 рад/с вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. Два человека одинаковой массы m = 70 кг начинают в момент времени t = 0 двигаться от центра платформы по одному из её диаметров в противоположные стороны друг от друга с постоянной скоростью v = 1 м/с относительно платформы. Найдите зависимость мощности приводного двигателя от времени, исходя из условия обеспечения постоянства угловой скорости платформы.

Решение

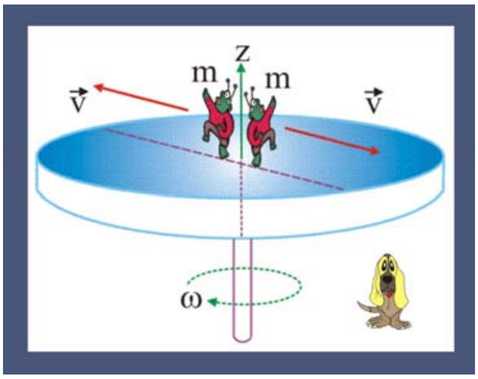


Рис. 270. Перемещение по платформе

1. В данном случае момент инерции перемещающихся по поверхности платформы людей относительно оси вращения J_{z2} будет являться функцией времени, потому что меняется расстояние до оси

$$J_{z2} = mx^2 = m(vt)^2 = mv^2t^2.$$

2. Момент инерции платформы с людьми J_{z1} так же будет изменяться во времени

$$J_{z1} = \left(\frac{MR^2}{2} + mv^2t^2\right).$$

3. Определим далее кинетическую энергию системы «платформа – люди»

$$K = \left(\frac{VR^2}{2} + mv^2t^2\right)\frac{\omega^2}{2}.$$

4. Мощность, как известно, можно представить как первую производную по времени кинетической энергии

$$N = \frac{dK}{dt} = 2mv^2\omega^2t \cong 13{,}8t,\ \text{Вт},$$

Мощность приводного электродвигателя, таким образом, во всё время движения по платформе людей должна увеличиваться за каждую секунду на 13,8 Вт.

---

271. Какой момент силы надо приложить к рулю неподвижного велосипеда, чтобы переднее колесо получило угловое ускорение ε = 10рад/с^2. Масса колеса M = 1кг, а его радиус R = 0,5м.

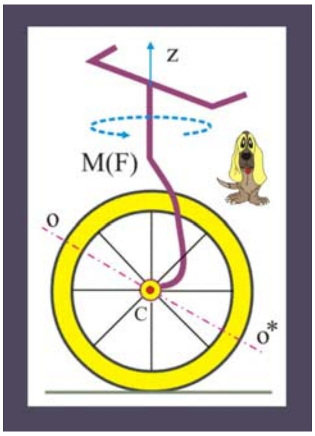


Рис. 271. Поворот колеса

Решение

1. Поскольку по условию задачи не говорится о силах сопротивления, то можно считать, что для колеса справедлив закон сохранения момента импульса в следующей форме

$$J_z\varepsilon = M_z(\vec{F}),$$

где J_z – момент инерции колеса относительно оси z, не совпадающей, кстати, с осью симметрии OO*

$$\frac{MR^2}{2}\varepsilon = M_z(\vec{F}) \cong 1{,}25H.$$

---

272. Диск радиусом R =1м и массой m = 10кг насажен на неподвижную горизонтальную ось. К диску на расстояниях r_1 = 0,6R, r_2 = 0,8R и r_3 = R прикладывают последовательно горизонтальную силу F =10 Н. Определите, в каком отношении будут находиться величины касательных (тангенциальных) ускорений точек диска, расположенных на ободе.

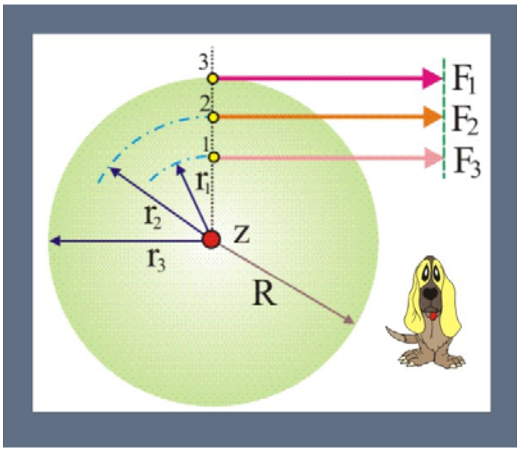


Рис. 272. Ускорение обода колеса

Решение

1. Отметим сразу, что угловая скорость диска при приложении сил на разном расстоянии от оси вращения z, будет не одинаковой, потому что моменты силы будут разными

$$M_{z3}(\vec{F}) = |\vec{F}|\cdot R, \quad M_{z2}(\vec{F}) = |\vec{F}|\cdot 0{,}8R,$$

$$M_{z1}(\vec{F}) = |\vec{F}|\cdot 0{,}6R.$$

2. Определим угловые ускорения диска с учётом силы трения для моментов сил:

$$J_z\varepsilon = M_z(\vec{F}), \quad \varepsilon = \frac{M_z(F)}{J_z} = \frac{2M_z(F)}{mR^2}.$$

$$\varepsilon_3 = \frac{2F}{mR} = 1\text{рад/с}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1{,}6F}{mR} = 0{,}8\text{ рад/с}, \quad \varepsilon_1 = \frac{1{,}2F}{mR} = 0{,}6\text{ рад/с}.$$

3. Как известно, $|\bar{a}_\tau| = \varepsilon R$, поэтому: $\varepsilon_3 : \varepsilon_2 : \varepsilon_1 = 1 : 0{,}8 : 0{,}6$.

---

273. Диск массой m = 10кг и радиусом R = 1м насажен на горизонтальную неподвижную ось. К одной и той же точке диска A, расположенной на расстоянии r = 0,5R прикладывают последовательно три силы $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\}$, причём $|\vec{F}_1|$ =10 Н. Диск начинает раскручиваться без сопротивления из состояния покоя. Определите величину линейной скорости точки A через τ = 10с действия каждой силы.

Решение

1.Момент силы относительно оси равен, как известно, скалярному произведению модуля силы на плечо. Плечом является кратчайшее расстояние между осью, в данном случае – z, и линией действия силы. Каждую силу можно разложить на две составляющие, вертикальную и горизонтальную, причём, у всех трёх сил горизонтальные проекции будут одинаковыми. Вертикальные проекции относительно оси вращения момента создавать не будут, плечи равны нулю, поэтому все три силы создают относительно оси вращения одинаковые моменты:

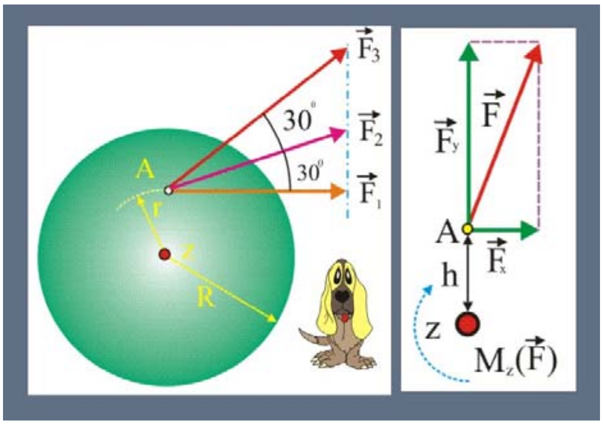


Рис 273. Линейная скорость точки диска

$$M_{z1}\left(\vec{F}_1\right) = M_{z2}\left(\vec{F}_2\right) = M_{z3}\left(\vec{F}_3\right) = \left|\vec{F}_1\right| \cdot 0{,}5R \cong 5\text{Н·м}.$$

2. Определим величину углового ускорения и угловой скорости диска

$$J_z\varepsilon = M_z\left(\vec{F}\right), \quad \varepsilon = \frac{0{,}5F_1}{mR}, \quad \omega = \varepsilon\tau = \frac{0{,}5F_1\tau}{mR}.$$

3. Линейная скорость заданной точки A

$$v_A = \omega \cdot r_A = \frac{0{,}25F_1\tau}{m} \cong 25\text{ м/с}.$$

---

274. Специально обученная собака массой m_1 = 10 кг вспрыгнула на лежащий горизонтально тонкий полый цилиндр массы m_2 = 5 кг, радиуса R = 0,3 м и ширины b = 0,2 м. Далее «артистка» стала перебирать лапами, так что всё время оставалась в верхней точке цилиндра A, сообщая ей постоянную линейную скорость v = 0,2 м/с. Определите кинетическую энергию системы «собака – цилиндр».

Решение

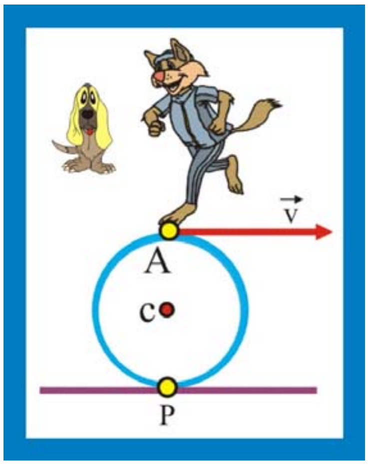


Рис. 274. Собака на цилиндре

1. Цилиндр катится по горизонтальной поверхности, т.е. совершает плоское движение, которое можно разложить на поступательное движение центра масс *C* и вращательное вокруг мгновенной оси, проходящей в данный момент времени через точку *p* перпендикулярно плоскости чертежа. Собака перемещается вместе с центром масс цилиндра, т.е. поступательно.

2. Чтобы найти кинетическую энергию цилиндра необходимо вычислить момент его инерции относительно центра масс C

$$J_C = \frac{m_2R^2}{2} + \frac{m_2b^2}{12}.$$

3. Вычислим далее кинетическую энергию цилиндра, с учётом того, что линейная скорость центра масс равна $v_C = v/2$, а угловая скорость – $\omega = v/2R$

$$K_2 = \frac{m_2v_C^2}{2} + J_C\frac{\omega^2}{2} = m_2\left\{\frac{v^2}{8} + \left(\frac{R^2}{2} + \frac{b^2}{12}\right)\cdot\frac{v^2}{8R^2}\right\} \cong 0{,}16\text{ Дж}.$$

4. Кинетическая энергия собачки в её поступательном движении

$$K_1 = m_1v_C^2/2 = m_1v^2/8 \cong 0{,}05\text{ Дж}.$$

5. Суммарная кинетическая энергия системы «собака – цилиндр»

$$K_\Sigma = K_1 + K_2 \cong 0{,}3 Дж .$$

275. К однородному стержню массы m =10 кг и длиной L = 1м приложены две перпендикулярные друг другу силы: F_1 = 40 Н и F_2 = 30 Н. Первоначально обе силы приложены в центре масс. Во втором варианте меньшую силу параллельно самой себе перенесли в один из концов стержня в точку А. Опишите движение стержня и определите вектор ускорение центра масс стержня С в указанных вариантах приложения сил.

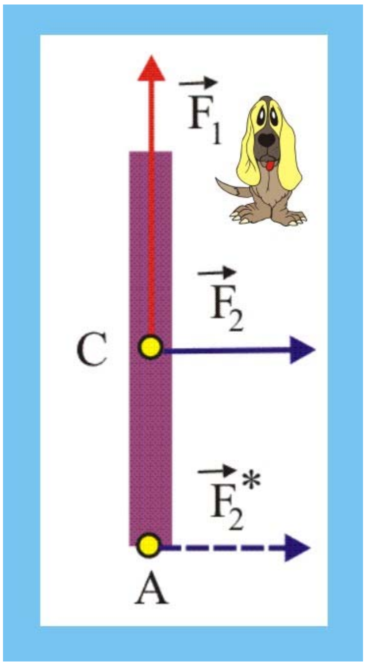


Рис. 275. Ускорение стержня

Решение

1. В первом варианте приложения сил линии их действия пересекаются в точке *C*, поэтому моменты сил относительно оси, проходящей через центр масс стержня будут равны нулю. Стало быть вращение стержня происходить не будет, стержень станет перемещаться поступательно в соответствии с теоремой о движении центра масс, т.е. в соответствии со вторым законом ньютона

$$\sum_{i=1}^{i=2} \vec{F}_i = m\vec{a}, \quad |\vec{a}| = \frac{1}{m}\sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 5\frac{м}{c^2},$$

$$(\vec{a};\vec{i}) = \arcsin\left(\frac{|\vec{F}_1|}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2}}\right) \cong 53^0 .$$

2. Во втором варианте, у силы F_2 относительно оси z, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости чертежа, появится момент

$$M_z(\vec{F}_2) = |\vec{F}_2^*| \cdot L/2 ,$$

и движение стержня приобретёт вращательную компоненту с угловым ускорением, определяемым из условия

$$J_z\varepsilon = M_z(\vec{F}_2^*), \quad \varepsilon = \frac{12F_2L}{2mL^2} = \frac{6F_2}{mL} \cong 18\frac{рад}{c^2}.$$

Линейное ускорение центра масс стержня останется прежним, т.к. силы являются векторами скользящими.

276. По шару массы m = 1 кг и радиуса R = 0,1м, лежащему на гладкой горизонтальной поверхности, в течение Δt = 100 мс прикладывают горизонтальную силу F = 50 Н. Точка приложения силы расположена на расстоянии L = R/2 выше центра масс. Определите: а) скорость центра масс шара после прекращения действия силы; б) угловую скорость вращения шара.

Решение

1. Используя теорему об изменении импульса, определим импульс, сообщаемый силой F за время Δt

$$mv - mv_0 = F \cdot \Delta t , \quad p = mv = F\Delta t .$$

2. Линейная скорость центра масс шара, при

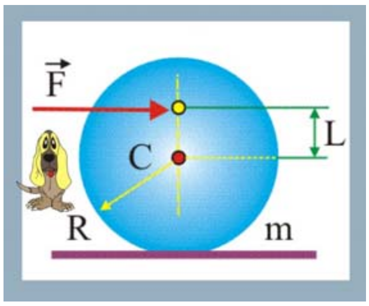


Рис. 276. Скорость шара

этом, определится очевидной зависимостью

$$v = \frac{p}{m} = \frac{F\Delta t}{m} \cong 5 \text{ м/с}.$$

3. Найдём величину момента импульса относительно z оси, проходящей через центр масс перпендикулярно линии действия силы

$$L_z = F\Delta t \cdot R/2.$$

4. Величину угловой скорости движения шара определим из уравнения, связывающего момент импульса и момент инерции

$$J_z\omega = L_z, \quad \omega = \frac{L_z}{J_z} = \frac{5F\Delta tR}{2\cdot 2mR^2} = \frac{5F\Delta t}{4mR} \cong 62{,}5 \text{ рад/с}.$$

---

277. Два диска одинаковой высоты $h_1 = h_2$ и с равными массами $m_1 = m_2$ вращаются относительно своих осей симметрии с одинаковыми угловыми ускорениями $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Один из дисков изготовлен из стали, имеющей плотность $\rho_1 = 7{,}8\cdot 10^3$ кг/м^3, а другой – из газонаполненного алюминия с $\rho_2 = 1{,}95\cdot 10^3$ кг/м^3. Сравните моменты сил, обеспечивающих такое движение тел.

Решение

1. Из условия равенства масс определим соотношение между диаметрами дисков

$$\pi\rho_1 hR_1^2 = 4\pi\rho_2 hR_2^2, \quad \Rightarrow \quad R_2 = R_1\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} = 2R_1$$

2. Соотношение вращающих моментов можно найти из уравнений движения дисков относительно оси вращения z

$$J_{z1}\varepsilon = M_{z1}\left(\vec{F}\right); \quad J_{z2}\varepsilon = M_{z2}\left(\vec{F}\right),$$

$$\frac{1}{2}\rho_1 hR_1^2\cdot R_1^2\varepsilon = M_{z1}\left(\vec{F}\right); \quad \frac{1}{2}\rho_2 hR_2^2\cdot R_2^2 = M_{z2}\left(\vec{F}\right),$$

$$\frac{M_{z2}\left(\vec{F}\right)}{M_{z1}(F)} = \frac{16\rho_2 R_1^4}{\rho_1 R_1^4} = 4.$$

---

278. Два диска одинаковой высоты $h_1 = h_2$ и равной массы $m_1 = m_2$, металлический с плотностью материала $\rho_1 = 8000$ кг/м^3 и деревянный $\rho_2 = 500$ кг/м^3 вращаются вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс дисков. Движение происходит под действием одинаковых по модулю сил $F_1 = F_2$, касательных к ободкам дисков. Определите, в каком соотношении находятся угловые ускорения дисков.

Решение

1. По аналогии с предыдущей задачей определим соотношение радиусов дисков, используя условие равенства их масс

$$\pi\rho_1 hR_1^2 = 4\pi\rho_2 hR_2^2 \quad \Rightarrow \quad R_2 = R_1\sqrt{\rho_1/\rho_2} \cong 4R_1.$$

2 С учётом моментов действующих сил ($M_{z1} = F\cdot R_1$; $M_{z2} = F\cdot 4R_1$) из уравнения движения (см. задачу 2.4.71)можно получить

$$\frac{1}{2}\rho_1 hR_1^4\varepsilon_1 = FR_1, \quad \frac{1}{2}\rho_2 h64R_1^4\varepsilon_2 = F4R_1, \quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{16\rho_2}{\rho_1} \cong 256.$$

---

3. Статика

279. Для приведённых конструкций, удерживающих груз массой m = 10 кг, определить натяжения тросов и силу приложенную к стержню.

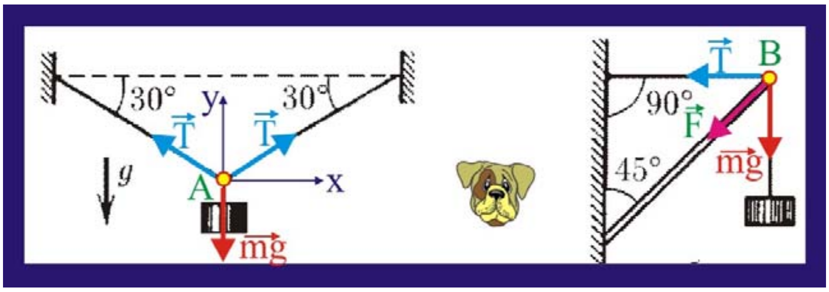


Рис. 279. Равновесие грузов

Решение

1. Условие статического равновесия:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\vec{F}_i = 0; \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{i=n} F_x = 0;\\ \sum_{i=1}^{i=n} F_y = 0;\end{aligned}\right\}$$

2. Для тела, висящего на тросах (левый фрагмент) условие равновесия можно записать следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{i=3} F_y = 0; \quad T\cos 60^0 + T\cos 60^0 - mg = 0; \quad \Rightarrow \quad T = \frac{mg}{2\cos 60^0} = mg \approx 100\ \text{Н};$$

3. Для стержневой системы (правый фрагмент) при невесомом и нерастяжимом тросе $|\vec{mg}| = |\vec{T}|$, поэтому:

$$F = 2mg\cos 45^0 \approx 141\ \text{Н}.$$

---

280. Стержень массой m = 0,01 кг стоит вертикально на пружине в закрытом пенале. Когда пенал перевернули, стержень стал давить на крышку в 1,2 раза сильнее. С какой силой стержень давил на крышку пенала первоначально?

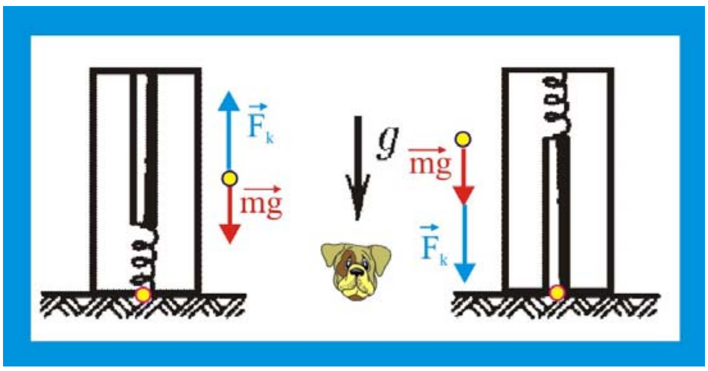


Рис. 280. Стержень в пенале

Решение

1. В данном случае проявляется действие двух сил, силы тяжести и силы упругости пружины, в первом случае силы вычитаются, а во втором складываются, причём:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{F_k - mg}{F_k + mg} = 1{,}2; \quad \Rightarrow \quad 0{,}2F_k = 2{,}2mg; \quad F_k = 1{,}078\ \text{Н};$$

2. Сила давления в первом случае определится как:

$$F_1 = F_k - mg = 0{,}98\ \text{Н};$$

---

281. Определите наибольшую высоту стены, которую можно построить из кирпича, если предел его прочности на сжатие $\sigma \approx 10^7$ Па, а плотность кирпича $\rho \approx 1{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение

1. Предел прочности в данном случае можно рассматривать как силу отнесённую к единице площади кирпича, т.е.

$$\sigma s = m_{cr}g = \rho gV = \rho gsh_{cr}; \quad \Rightarrow \quad h_{cr} = \frac{\sigma}{\rho g} \approx 667\text{м};$$

---

282. Справедливо ли утверждение великого баснописца о неподвижности воза, подвергающегося одновременному воздействию со стороны лебедя, рака и щуки?

Решение

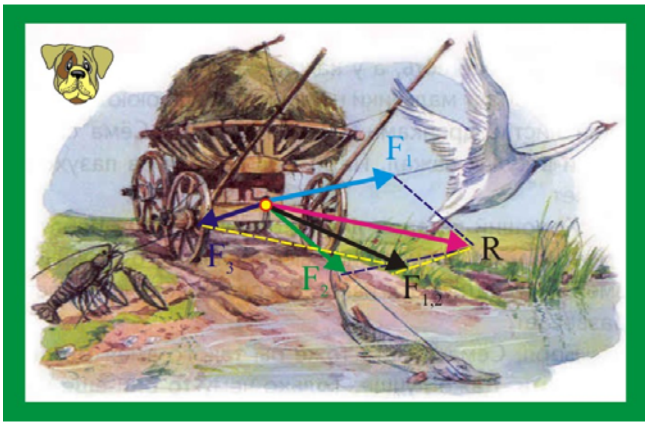


Рис. 282. Лебедь, рак и щука

1. Сообразно весовой категории будем считать, что лебедь и щука развивают в своих устремлениях одинаковые усилия $F_1 \approx F_2$, а рак, будучи менее всех по размерам, действует с силой F_3.

2. Если по правилу параллелограмма сложить силы F_1 и F_2, то получим их равнодействующую $F_{1,2}$, а сумма этой промежуточной равнодействующей с силой рака F_3 даст окончательную равнодействующую R, не равенство нулю которой говорит о теоретической возможности перемещения воза.

---

283. Через три отверстия в крышке стола пропущены нити, связанные с одного конца общим узлом. К другому концу каждой нити прикреплены одинаковые грузы. Найти, пренебрегая трением, углы между нитями.

Решение

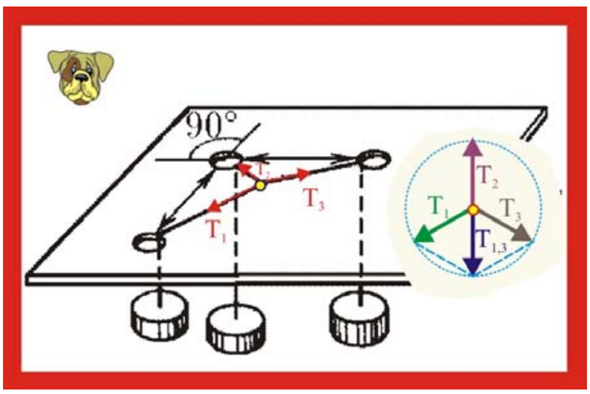


Рис. 283. Натяжение нитей

1. Поскольку к нитям подвешены одинаковые по массе грузы, то натяжение нитей по модулю будут одинаковыми

$$|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = |\vec{T}_3|;$$

2. Узел нитей находится в состоянии статического равновесия, это означает, что геометрическая

сумма трёх сходящихся сил равна нулю, это возможно только в том случае, если угол между соседними линиями действия сил равен 120^0

$$\left|\vec{T}_{1,3}\right| = \sqrt{T^2 + T^2 + 2T^2\cos 120^0} = T;$$

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_3 = \vec{T}_{1,3}; \quad \vec{T}_{1,3} + \vec{T}_2 = 0;$$

---

284. Два груза небольшого размера соединены нитью длины ℓ и лежат на цилиндрической гладкой поверхности радиуса R. При равновесии грузов угол между вертикалью и радиусом, проведенным к грузу массы m_1, равен α. Определить массу второго груза m_2.

Решение

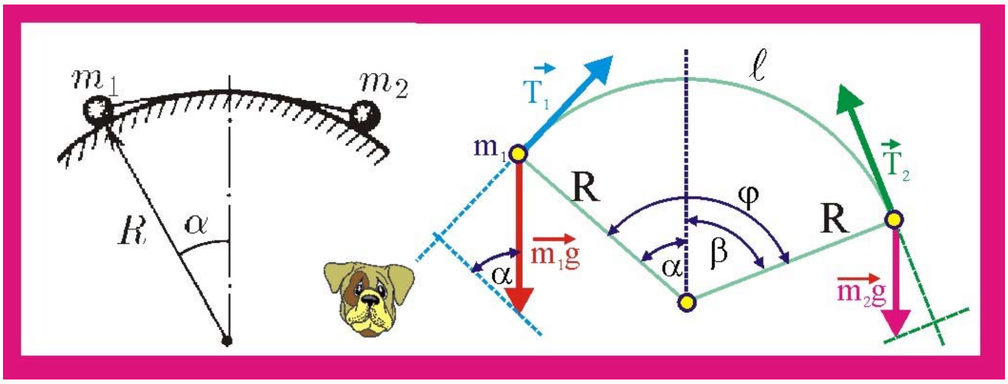


Рис. 284. Равновесие грузов на цилиндре

1. Так как грузы находятся в состоянии равновесия, а соединяющая их нить нерастяжима и невесома, то модули сил натяжения должны быть одинаковыми

$$\left|\vec{T}_1\right| = \left|\vec{T}_2\right|; \quad T_1 = m_1 g\sin\alpha; \quad T_2 = m_2 g\sin\beta;$$

2. Определим угол φ, стягивающий дугу ℓ и угол β между вертикалью и радиусом, проведенным к массе m_2

$$\varphi = \frac{\ell}{R}; \quad \beta = \varphi - \alpha = \frac{\ell}{R} - \alpha;$$

3. Значение искомой массы m_2

$$m_1 g\sin\alpha = m_2 g\sin\left(\frac{\ell}{R} - \alpha\right); \quad \Rightarrow \quad m_2 = \frac{m_1\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{m_1\sin\alpha}{\sin(\varphi - \alpha)};$$

---

285. Из проволоки изготовлена рама в форме прямоугольного треугольника, которая размещена в вертикальной плоскости. По проволоке могут свободно скользить без трения связанные нитью грузы массы m_1 = 0,1 кг и m_2 = 0,5 кг. Определить силу натяжения нити.

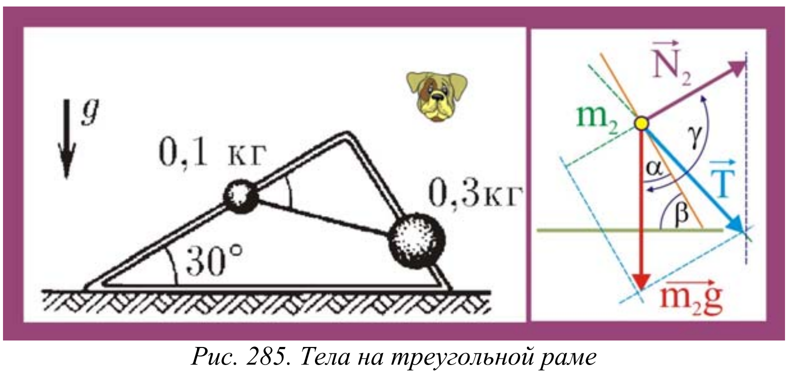


Рис. 285. Тела на треугольной раме

Решение

1. Натяжение нити можно найти, рассматривая условия равновесия тел. Так для тела массой m_2 справедливы следующие соотношения:

$$T=\sqrt{(m_2g)^2+N_2^2+2mgN_2\cos\gamma}\ ;$$

$$\alpha=30^0;\quad \beta=60^0;\quad \gamma=180^0-60^0=120^0\ ;$$

$$N_2=m_2g\cos 60^0=1{,}5H;$$

$$T=\sqrt{9+2{,}25+2\cdot 3\cdot 1{,}5\cdot(-0{,}5)}\approx 2{,}6H;$$

---

286. Если к нижнему концу вертикально висящей пружины прикрепить груз, то её длина станет равной ℓ_1. Если этот же груз прикрепить к середине пружины, то её длина станет равной ℓ_2. Определить длину недеформированной пружины.

Решение

1. Уравнения равновесия груза на полной и укороченной вдвое пружине представятся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} mg&=k(\ell_1-\ell_0);\\ mg&=2k(\ell_2-\ell_0);\end{aligned}\right\}\ \Rightarrow\ \ell_1-\ell_0=2\ell_2-2\ell_0;\quad \ell_0=2\ell_2-\ell_1;$$

---

287. Цепочка массы M подвешена так, что вблизи точек подвеса образует с горизонталью угол α. Определить силу натяжения цепочки в нижней её точке и точках подвеса.

Решение

1. Запишем уравнения равновесия цепочки в проекциях на оси координат

$$\left.\begin{aligned} \sum F_x&=-T_1+T_2\cos\alpha=0;\\ \sum F_y&=T_2\sin\alpha-\frac{M}{2}g=0;\end{aligned}\right\}$$

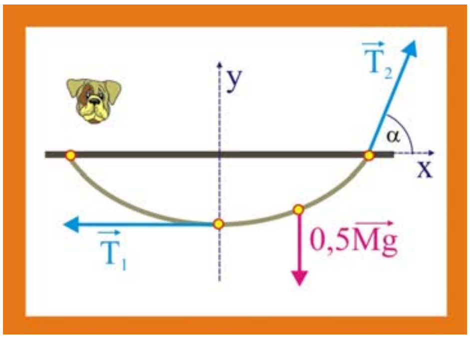


Рис. 287. Подвес цепочки

2. Решая совместно уравнения определим искомые величины

$$T_2=\frac{T_1}{\cos\alpha};$$

$$\frac{T_1\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{Mg}{2}=0;\quad T_1=\frac{M}{2}g\,ctg\alpha;\quad\Rightarrow\quad T_1=\frac{Mg}{2\sin\alpha};$$

---

288. Между одинаковыми брусками квадратного сечения, лежащими на горизонтальной плоскости, вставлен гладкий клин такой же массы и сечением в виде равностороннего треугольника. При каком коэффициенте трения брусков о поверхность они начнут разъезжаться?

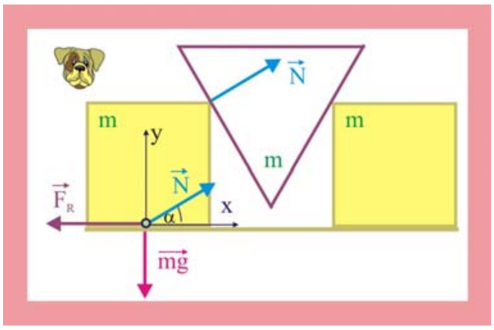


Рис. 288. Клин между брусками

Решение

1. Рассмотрим условия равновесия точки о, принадлежащей одному из брусков

$$\left.\begin{aligned}\sum F_y &= N\sin\alpha - mg = 0;\\ \sum F_x &= N\cos\alpha - \mu mg = 0;\end{aligned}\right\}$$

2. Из первого уравнения определим величину N

$$N = \frac{mg}{\sin\alpha};$$

3. Из второго уравнения найдём величину коэффициента трения

$$\frac{mg\cos\alpha}{\sin\alpha} = \mu mg;\quad \mu = \text{ctg}60^0 \cong 0{,}577;$$

---

289. Чтобы сдвинуть с места застрявший автомобиль, иногда пользуются таким приёмом: к форкопу привязывают буксировочный трос, а второй его конец закрепляют на дереве параллельно земле, по возможности сильно натянув ее. Если человек станет посередине верёвки, то он сможет сдвинуть автомобиль с места. Почему это возможно?

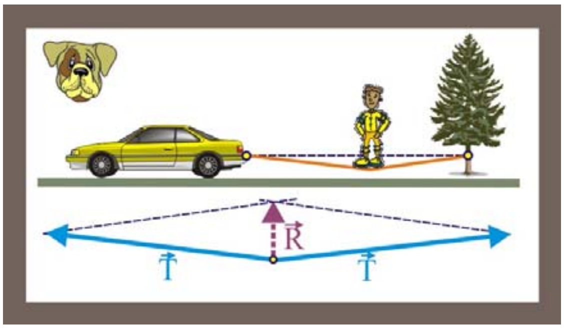


Рис. 289. Перемещение автомобиля

Решение

1. Сдвинуть автомобиль с места становится возможным, потому что относительно небольшая сила тяжести человека создаёт значительные усилия в канате:

$$mg = \sqrt{2T^2 + 2T^2\cos\alpha} = T\sqrt{2(1+\cos\alpha)};$$

$$T = \frac{mg}{\sqrt{2(1+\cos\alpha)}};$$

2. Так например, при $\alpha = 160^o$

$$T = \frac{mg}{0{,}36} \cong 2{,}9mg;$$

---

290. Лестница прислонена к наклонной стенке, образующей угол α с вертикалью. При каком значении коэффициента трения μ лестница будет сохранять состояние равновесия даже при гладком полу?

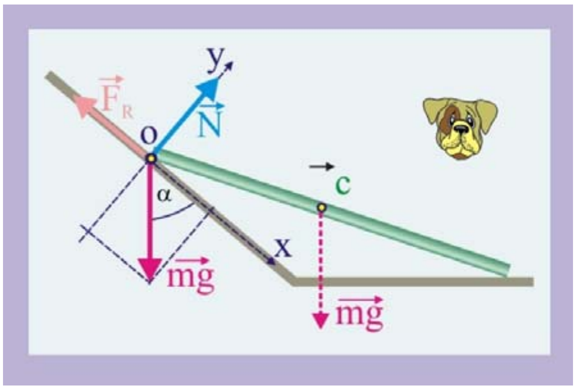


Рис. 290. Лестница у наклонной стены

Решение

1. Выделим точку О, равновесие которой необходимо рассмотреть. Поскольку движение лестницы возможно только в противоположном направлении горизонтальной оси, уравнение равновесия примет вид

$$\sum F_x = mg\cos\alpha - \mu mg\sin\alpha = 0;$$

$$\mu \ge \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \ge \text{ctg}\alpha;$$

---

4. Колебания и волны

291. Посередине натянутой струны длиной 2ℓ закреплён шар массой m.

а) Какая суммарная сила действует на шар со стороны струны, если его поперечное смещение из положения равновесия $\xi \ll \ell$, а сила натяжения струны F не зависит от смещения?

б) Как направлена эта сила по отношению к смещению?

в) Найти зависимость потенциальной энергии шара от величины его малых смещений.

г) Какова скорость шара в момент прохождения им положения статического равновесия, если амплитудное значение смещения ξ_m?

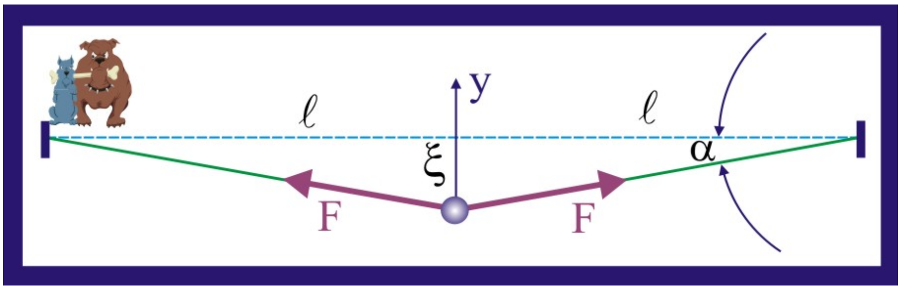


Рис. 291. Струна с шаром

Решение

1. Натяжение струны определится в виде суммы проекций сил натяжения на вертикальную ось, взятой с обратным знаком:

$$T = -2F\sin\alpha \cong -2F\mathrm{tg}\alpha = -2F\frac{\xi}{\ell};$$

2. Потенциальная энергия струны при смещении ξ численно равна работе, совершаемой силой F на этом перемещении:

$$U = A_{0\to\xi} = F\xi = \frac{F\xi^2}{\ell};$$

3. Скорость шара определится из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{F\xi_{max}{}^2}{\ell}; \quad \Rightarrow \quad v = \xi_{max}\sqrt{\frac{2F}{m\ell}};$$

---

292. Груз массы m подвешен на пружине с коэффициентом упругости k. Как зависит суммарная сила, действующая на груз, от смещения его на величину x из положения равновесия? Найти зависимость потенциальной энергии груза в функции смещения ξ.

Решение

1. Сила, действующая на груз при смещении его на величину ξ, равна силе упругости возникающей по закону Гука, взятой с обратным знаком:

$$F = -kx;$$

2. Если за нулевой уровень потенциальной энергии принять положение равновесия, то потенциальная энергия груза будет определяться потенциальной энергией деформированной пружины:

$$U = \frac{kx^2}{2};$$

---

293. а) Тело массы m, подвешенное на пружине, совершает колебания так, что наибольшая скорость равна v_0, а наибольшее отклонение от положения равновесия x_0. Определить жестокость пружины.

Решение

1. Периодическое движение тела, по гармоническому закону протекает под действием возвращающей упругой силы, которая относится к классу потенциальных сил, к которым применим закон сохранения энергии.

2. В отсутствии сопротивления максимальное значение кинетической энергии колеблющегося груза должно быть равно максимальному значению потенциальной энергии деформированной пружины

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{kx_0^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad k = \frac{mv_0^2}{x_0^2};$$

---

294. Скорость тела массы m подвешенного на пружине и совершающего гармонические колебания, зависит от координаты x по закону

$$v = v_0\sqrt{1-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}.$$

Определить зависимость силы, действующей на тело и потенциальной энергии этого тела от координаты x. Зависит ли полученный результат от природы силы, заставляющей тело двигаться по приведенному закону?

Решение

1. Перепишем заданное уравнение скорости:

$$\frac{v^2}{v_0^2} = 1 - \frac{x^2}{x_0^2}; \quad \frac{K}{K_0} = 1 - \frac{U}{U_0};$$

2. Потенциальная энергия деформированной пружины равна работе, затраченной при её деформации, т.е.

$$U = Fx; \quad U_0 = Fx_0; \quad U = kx \cdot x; \quad F = -kx;$$

3. Потенциальная энергия:

$$U = \int_0^x kxdx = \frac{kx^2}{2};$$

4. Упругая сила $F = -kx$ является возвращающей силой, т.е. эта сила при смещении груза из положения равновесия стремится вернуть его в положение статического равновесия. Природа этой силы может быть как механической, так и иной, например электрической или гравитационной.

---

295. Почему кажется, что быстро колеблющаяся на пружине лампочка, вспыхивает наиболее ярко в крайних точках своей траектории?

Решение

1. Пусть лампочка колеблется с частотой ν = 1 Гц с амплитудой A = 0,1 м.

2. Запишем уравнения смещения и скорости при гармонических свободных колебаниях и построим графики этих зависимостей

$$\begin{cases} x(t) = A\cos\dfrac{2\pi}{T}t; \\ \dot{x}(t) = A\dfrac{2\pi}{T}\sin\dfrac{2\pi}{T}t. \end{cases}$$

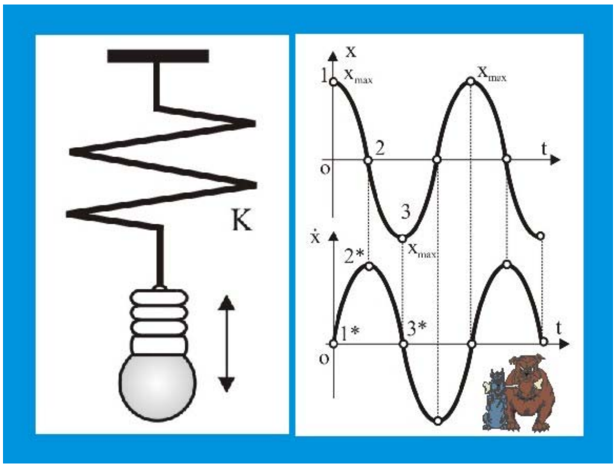


Рис. 295. Лампочка на пружине

2. Из системы уравнений видно, что в момент времени 1 отклонение лампочки от положения равновесия будет максимальным, в то время как скорость лампочки (точка 2* нижнего графика) будет равна нулю, другими словами, у наблюдателя будет создаваться впечатление что, лампочка на некоторое мгновение останавливается. В окрестностях точек 1*, 3* скорость лампочки будет иметь относительно малое значение.

3. Вычислим максимальное значение скорости

$$\dot{x}_{max} = 0{,}2\cdot 6{,}28\sin\frac{\pi}{2} = 1{,}25\,\frac{м}{с}.$$

4. Когда смещение лампочки будет достигать значений x(t) = 0, 95 A скорость лампочки будет равна 0,2 м/с.

---

296. Длина нити математического маятника ℓ, масса шарика m. Определить силу, действующую на шарик, при отклонениях его от положения равновесия на x в случае малых колебаний, т.е. при $x \ll \ell$. Как зависит от x потенциальная энергия шарика?

Решение

1. Рассмотрим подобие треугольников:

$$\Delta OAB \sim \Delta BDK,$$

$$\frac{x}{\ell} = \frac{F}{mg};\quad mgx = F\ell;\quad F = mg\frac{x}{\ell};$$

2. Если $x \ll \ell$, то можно найти силу проще:

$$F = mg\sin\alpha \approx mg\,tg\alpha \approx mg\frac{x}{\ell};$$

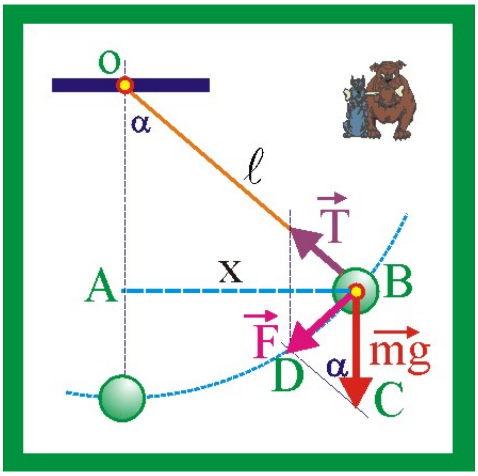


Рис. 296. Математический маятник

3. Для определения зависимости потенциальной энергии от x запишем уравнение элементарной работы силы F на элементарном отклонении шарика dx

$$\delta A = Fdx;\quad A = \int_0^x \frac{mg}{\ell}xdx = \frac{mgx^2}{2\ell};$$

4. Работа силы F численно равна потенциальной энергии шарика

$$U = \frac{mgx^2}{2\ell};$$

297. Найти максимальную скорость шарика математического маятника длины ℓ, движущегося в одной плоскости, если амплитуда смещения при малых колебаниях равна x_0.

Решение

1. В случае математического маятника возвращающая сила относится к классу консервативных сил, для которых справедлив закон сохранения энергии, т.е. в колебательной системе без затухания максимальное значение потенциальной энергии шарика в его амплитудных положениях равно максимальному значению его кинетической энергии при прохождении им положения статического равновесия:

$$U_0 = \frac{mgx_0^2}{2\ell} = K_0 = \frac{mv_0^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad gx_0^2 = v_0^2\ell; \quad v_0 = x_0\sqrt{\frac{g}{\ell}};$$

298. Горизонтальный жёлоб слева от нижней линии выгнут по цилиндрической поверхности радиуса r, а справа – по поверхности радиуса R. Определить отношение наибольших отклонений влево и вправо при малых колебаниях тела в этом жёлобе.

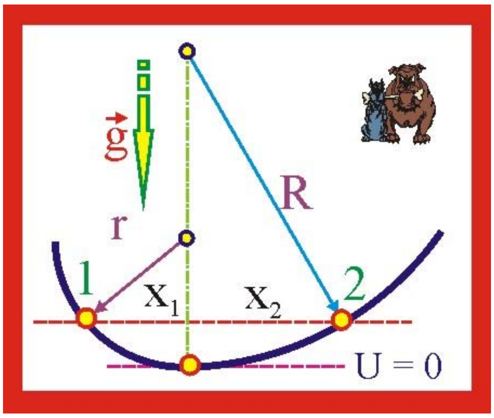


Рис. 298. Колебания в жёлобе

Решение

1. Положение статического равновесия тела примем за нулевой уровень потенциальной энергии. В крайних точках соей траектории 1 и 2 тело будет обладать одинаковой потенциальной энергией

$$U_1 = U_2;$$

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= \frac{mgx_1^2}{2r}; \\ U_2 &= \frac{mgx_2^2}{2R}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \zeta = \frac{x_1}{x_2} = \sqrt{\frac{R}{r}};$$

299. На концах лёгкого диэлектрического стержня длиной ℓ закреплено два точечных разноимённых, заряда модули, которых одинаковы и равны q. Конструкция помещена в электрическое поле с напряжённостью E. На заряды действует сила Кулона $F = \pm qE$. Найти массу каждого шарика m, если амплитуда малых поперечных колебаний равна x_0, а максимальная скорость v_0.

Решение

1. Система электрических зарядов, приведенная на рисунке, находится в положении статического равновесия. При повороте стержня вокруг оси, проходящей через середину стержня перпендикулярно плоскости вращения, т.е. вокруг точки о, возникнут проекции сил Кулона F_1 и F_2, которые будут стремиться вернуть заряды в исходное положение. Другими словами возникнет возвращающие силы, являющиеся необходимым условием возникновения колебаний.

2. При амплитудном значении смещения система зарядов будет обладать потенциальной энергией

$$U_0 = \frac{qEx_0^2}{\ell}.$$

3. В момент прохождения зарядами положения статического равновесия вследствие отсутствия сопротивления, потенциальная энергия преобразуется в кинетическую энергию

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{qEx_0^2}{\ell}, \Rightarrow m = \frac{2qEx_0^2}{\ell v_0^2};.$$

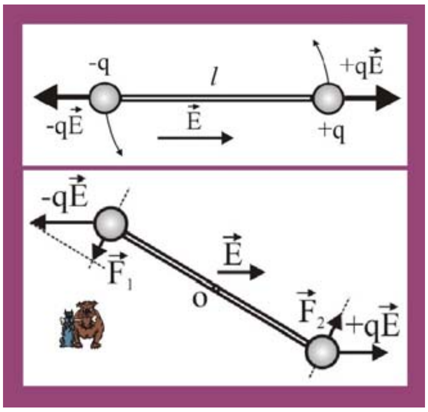


Рис. 299. Колебания диполя

300. Шар массы m и радиуса r скользит по поверхности лунки с кривизной R. Найти зависимость потенциальной энергии шара от величины его малых колебаний x из положения статического равновесия.

Решение

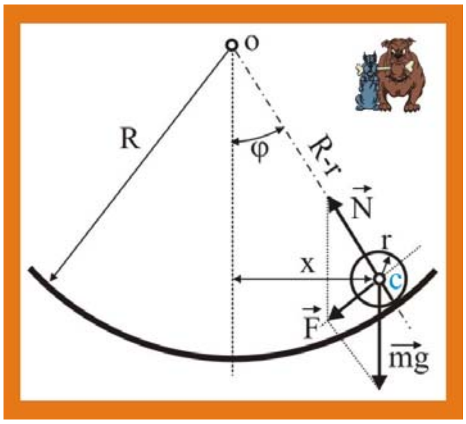


Рис. 300. Шар в Лунке

1. Охарактеризуем смещение шара из положения равновесия углом отклонения φ. Смещение центра масс шара с на расстояние x от положения равновесия приведёт к изменению взаимного направления силы тяжести mg и нормальной реакции связи N, что, собственно и является причиной возникновения возвращающей силы F

$$F = mg\sin\varphi = mg\frac{x}{R-r}.$$

2. Бесконечно малое изменение потенциальной энергии будет численно равно элементарной работе, совершаемой на перемещении dx, составит

$$dU = \frac{mgx}{R-r}dx.$$

3. Изменение потенциальной энергии на конечном перемещении запишется в виде следующего определённого интеграла

$$U = \frac{mg}{R-r}\int_0^x xdx = \frac{mgx^2}{2(R-r)}.$$

301. Бусинка с зарядом q может двигаться без трения по натянутой нити длины 2L, на концах которой закреплены заряды Q. Найти приращение потенциальной энергии при смещении бусинки на x вдоль нити из её центра. На сколько сместится бусинка массы m, если в положения равновесия сообщить ей скорость v?

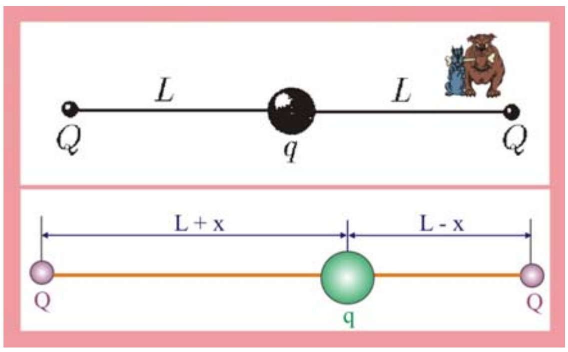


Рис. 301. Взаимодействие трёх зарядов

Решение

1. Потенциальная энергия системы зарядов при нахождении бусинки в центре нити:

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qQ}{L};$$

2. Потенциальная энергия при смещении бусинки на расстояние x вправо

$$U_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{qQ}{L+x} + \frac{qQ}{L-x}\right);$$

3. Изменение потенциальной энергии при сдвигании бусинки

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{qQ}{L+x} + \frac{qQ}{L-x} - \frac{2qQ}{L}\right);$$

4. Упростим уравнение для ΔU, приведя скобку к общему знаменателю:

$$\Delta U = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{L^2 - Lx + L^2 + Lx - 2L^2 + 2x^2}{L\left(L^2 - x^2\right)}\right); \quad L >> x;$$

$$\Delta U \approx \frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 L^3}x^2;$$

5. Смещение бусинки Δx из положения статического равновесия при сообщении ей скорости v определится из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 L^3}\Delta x^2; \quad \Rightarrow \quad \Delta x = v\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 L^3 m}{qQ}};$$

---

302. Две одинаковые, недеформированные первоначально, пружины жёсткостью k, имеют одну общую точку. Груз, какой массы необходимо подвесить к общей точке пружин, чтобы он опустился в положение равновесия на малое расстояние y?

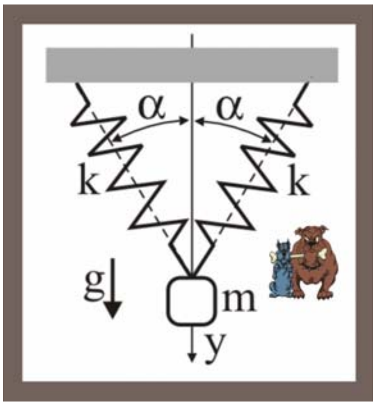


Рис 302. Две пружины

Решение

1. Определим удлинение пружины в проекции на вертикальную ось

$$\Delta y = y\cos\alpha.$$

2. Проекция силы упругости одной пружины в проекцию на вертикальную ось

$$F = k\Delta y\cos\alpha = ky\cos^2\alpha.$$

3. При подвешивании к общей точке пружин груза массой m суммарная сила упругости в состоянии равновесия по модулю должна быть равна силе тяжести

$$mg = 2ky\cos^2\alpha, \Rightarrow m = \frac{2ky\cos^2\alpha}{g}.$$

---

303. Определить максимальное значение силы натяжения нити математического маятника длиной ℓ при амплитуде колебаний x_0 ($x_0 << \ell$).

Решение

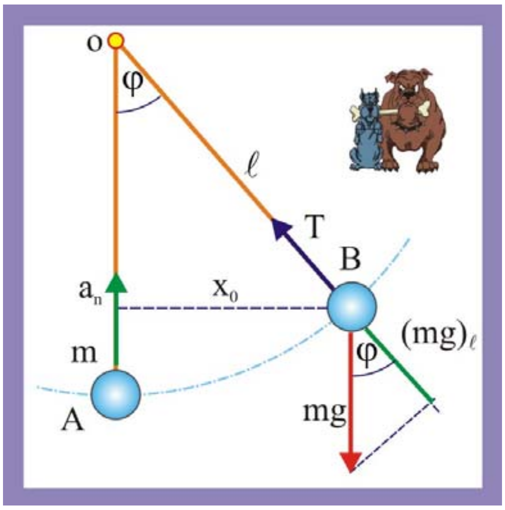


Рис. 303. Натяжение нити

1. Шарик математического маятника при колебаниях движется по круговой траектории, т.е. криволинейно, что сопряжено с возникновением нормальной составляющей ускорения a_n, максимальное значение которого будет иметь место в точке A, когда энергия шарика исключительно кинетическая, скорость при этом имеет максимальное значение.

2. Максимальное натяжение нити в точке траектории A определится как

$$T_0 = mg + \frac{mv_0^2}{\ell};$$

3. Максимальное значение скорости при заданной амплитуде колебаний

$$x(t) = x_0 \sin\omega t; \quad v(t) = \frac{dx}{dt} = x_0\omega\cos\omega t; \quad v_0 = x_0\omega;$$

4. Циклическая частота собственных колебаний математического маятника

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}; \quad \Rightarrow \quad v_0^2 = \frac{x_0^2 g}{\ell};$$

$$T_0 = mg + \frac{mgx_0^2}{\ell^2} = mg\left(1 + \frac{x_0^2}{\ell^2}\right);$$

5. В точке максимального отклонения из положения статического равновесия B скорость шарика равна нулю, $a_n = 0$, натяжение нити определится как:

$$T_B = mg\cos\varphi = mg\frac{x_0}{\ell};$$

---

304. Небольшое тело массой m = 1 кг подвешено к пружине длиной l_0 = 0,2 м с коэффициентом жёсткости k = 1 кН/м. Найти положение равновесия относительно которого происходят гармонические колебания с малой амплитудой A = 1 см и записать уравнение движения.

Решение

1. Определим статическое удлинение пружины при подвешивании к ней тела массой m

$$mg = k\Delta\ell, \quad \Delta\ell = \frac{mg}{k} \cong 0{,}01\,\text{м},$$

длина пружины при равновесии массы, таким образом, равна

$$\ell = \ell_0 + \Delta\ell = 0{,}21\,\text{м}.$$

2. Определим далее циклическую частоту собственных колебаний массы

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{1000} = 31{,}6\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

3. Запишем уравнение колебаний

$$x(t) = 0{,}01\sin 31{,}6t.$$

---

305. Груз массы m, подвешенный на пружине и совершающий колебания, расположен рядом с вращающимся со скоростью Ω колесом, причём точка А колеса всё время находится на одном уровне с центром масс груза. Где находится положение равновесия груза? Какая сила действует на груз, если смещение его из положения равновесия равно x? Через какое наименьшее время T повторяются значения скорости и смещения груза? Как изменяется значения скорости и смещения через время T/2?

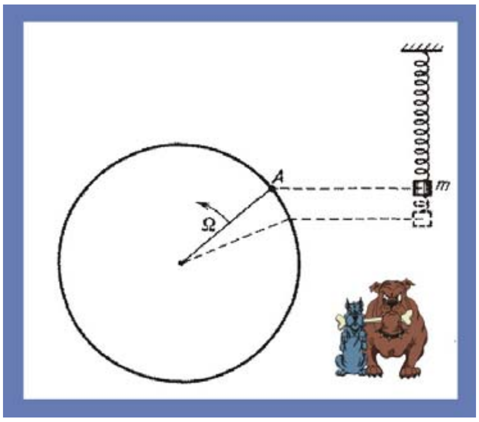


Рис. 305.1. Маятник и колесо

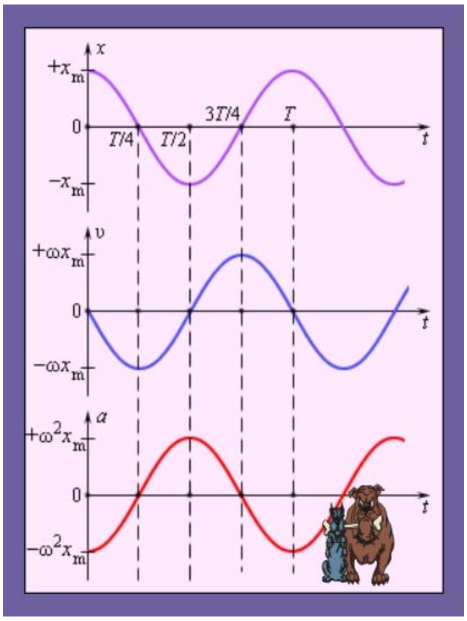


Рис. 305.2. Параметры колебаний

Решение

1. Чтобы точка А всё время совпадала с положением центра масс груза амплитуда колебаний должна совпадать с диаметром колеса $R = x_0$, т.е. центр колебаний (положение статического равновесия) должен совпадать с осью вращения колеса.

2. Колесо вращается с угловой скоростью Ω, что является аналогом циклической частоты колебаний $\Omega \equiv \omega$

$$\Omega \equiv \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad \Rightarrow \quad k = \omega^2 m,$$

сила, действующая на тело при смещении x

$$F = -kx = -m\Omega^2 x;$$

3. Период колебаний:

$$\Omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}; \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\Omega};$$

4. Изменение скорости и смещения центра масс тела через время $\tau = T/2$ определяется их уравнений гармонических собственных незатухающих колебаний с нулевой начальной фазой

$$x(t) = x_0 \cos\Omega t = x_0 \cos\frac{2\pi}{T};$$

$$\dot{x}(t) = -\Omega x_0 \sin\frac{2\pi}{T},$$

из которых видно (рис. 305.2), что через половину периода смещение изменит знак, скорость, оставаясь такой же по модулю, изменит своё направление.

306. Неподвижный груз, подвешенный на пружине, растягивает её находясь в положении равновесия, на длину $\Delta\ell$. Каков период колебаний груза?

Решение

1. Условие статического равновесия груза, подвешенного на пружине, определяется условием:

$$mg = k\Delta\ell; \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{m} = \frac{g}{\Delta\ell}; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta\ell}};$$

2. Период колебаний:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta\ell}{g}};$$

---

307. Груз колеблется по вертикали на резиновом шнуре. По сколько раз изменится период вертикальных колебаний груза, если его подвесить на том же шнуре, сложенным вдвое?

Решение

1. Жёсткость параллельно соединённых отрезков шнура, исходя из того, что они удлиняются на одну и ту же величину x

$$F_1 = kx, \quad F_2 = kx, \quad F = F_1 + F_2 = x(k + k) = 2kx,$$

.

2. частота собственных колебаний массы, соединённой с двумя параллельно соединёнными отрезками шнура

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}},.$$

период уменьшится в два раза.

---

308. Найти период колебаний груза массы m при различных способах соединения пружин жёсткости k_1 и k_2.

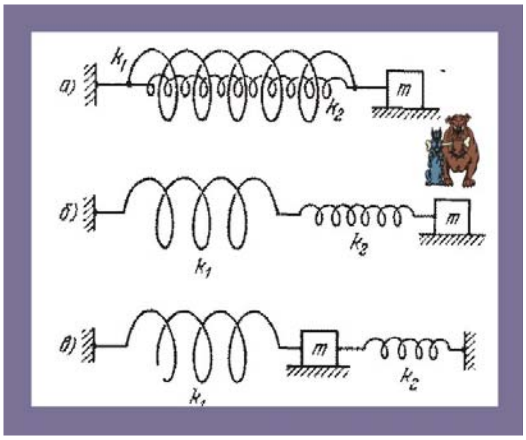


Рис. 308. Соединение пружин

Решение

1. В случае «а» и «в» пружины соединены параллельно. Определим общую жёсткость параллельно соединённых пружин, исходя из того, что они удлиняются на одну и ту же величину x

$$F_1 = k_1x, \quad F_2 = k_2x,$$

$$F = F_1 + F_2 = x(k_1 + k_2);$$

$$kx = x(k_1 + k_2), \Rightarrow k = k_1 + k_2,$$

частота и период собственных колебаний массы, соединённой с двумя параллельно соединёнными пружинами

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}; \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}.$$

2. В случае «б» пружины соединены последовательно. При растяжении или сжатии пружин на разные величины x_1 и x_2, сила приложенная к концам пружин будет одинаковой, т.е. общая жёсткость пружин определится следующим образом

$$x = x_1 + x_2, F = k_1x_1, \quad F = k_2x_2, \quad x_1 = \frac{F}{k_1}, \quad x_2 = \frac{F}{k_2},$$

$$F = k(x_1 + x_2) = k\left(\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}\right); \quad 1 = k\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right); \quad k = \frac{k_1k_2}{k_1 + k_2},$$

собственная частота и период колебаний:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{k_1k_2}{m(k_1+k_2)}};\quad\Rightarrow\quad T=2\pi\sqrt{\frac{m(k_1+k_2)}{k_1k_2}}.$$

309. Какова длина нити подвеса математического маятника, период колебаний которого T = 1 с?

Решение

1. Период колебаний математического маятника:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}};\quad\Rightarrow\quad \ell=\frac{T^2}{4\pi^2}g\cong 0{,}244\text{м};$$

310. Маятник представляет собой лёгкий жёсткий стержень длины ℓ с грузом на конце. С целью увеличения периода без утяжеления конструкции ось маятника устанавливают под углом α к вертикали. Найти период колебаний.

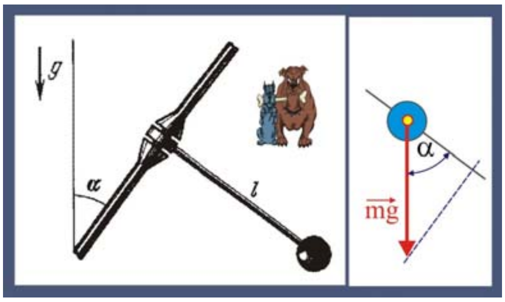


Рис. 310. Наклонный маятник

Решение

1. Для определения периода колебаний необходимо найти проекцию силы тяжести груза на направление стержня

$$mg_\ell=mg\sin\alpha;$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g\sin\alpha}};$$

311. а) Математический маятник – железный шарик массы m, висящий на длинной нити, – имеет период колебаний T_0. В присутствии магнита, расположенного чуть ниже шарика, период колебаний стал равным T. Определите действующую на шарик магнитную силу.

б) железный шарик маятника поместили между полюсами магнита так, что на него стала действовать горизонтальная магнитная сила. Определить величину этой силы и новое положение равновесия шарика, если период его колебаний в магнитном поле стал равным T.

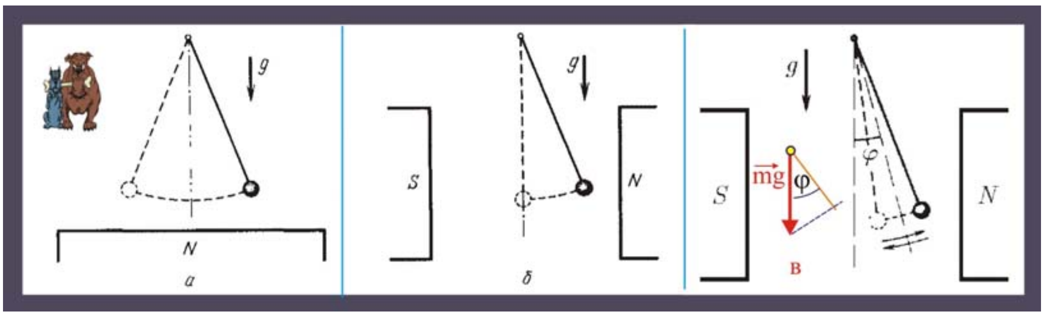


Рис. 311. Маятник в магнитном поле

Решение

1. Периоды колебаний маятника в отсутствии и при наличии магнитного поля, случай «а»:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}};\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g+a}},$$

где a – ускорение, вызванное магнитной силой F. Выразим из первого уравнения длину маятника

$$\ell = \frac{T_0^2 g}{4\pi^2},$$

и подставим это значение ℓ во второе уравнение периода с целью определения величины ускорения a

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{T_0^2 g}{4\pi^2(g+a)}};\quad \Rightarrow\quad a = g\left(\frac{T_0^2}{T^2} - 1\right),$$

Величина магнитной силы, действующая на железный шарик:

$$F = ma = mg\left(\frac{T_0^2}{T^2} - 1\right);$$

2. При помещении маятника в пространство между полюсами магнита, случай «б», на шарик будет действовать горизонтальная сила, которая изменит статическое положение нити подвеса, повернув её на некоторый угол φ, фрагмент «в» рис. 311, при этом период колебаний определится уравнением:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g\cos\varphi}}.$$

Подставим в уравнение периода значение длины маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{T_0^2 g}{4\pi^2 g\cos\varphi}} = \sqrt{\frac{T_0^2}{\cos\varphi}};\quad \Rightarrow\quad \varphi = \arccos\left(\frac{T_0^2}{T^2}\right);$$

---

312. На сколько отстанут за сутки маятниковые часы, поднятые над уровнем моря на высоту $h \cong 9$ км?

Решение

1. Отставание маятниковых часов обусловлено изменением величины ускорения свободного падения

$$g_x \approx \frac{GM}{R+h},$$

показания часов можно представить следующим образом:

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{T_0}{T},$$

где τ_0 и T_0 – показания часов и период на уровне моря, т.е. на высоте часы будут отставать на $\Delta\tau$

$$\Delta\tau = \tau_0 - \tau = \tau_0\left(1 - \frac{T_0}{T}\right).$$

2. Для периодов колебаний математических маятников справедливо отношение

$$\frac{T_0}{T} = \sqrt{\frac{g_x}{g_0}};$$

3. Из закона всемирного тяготения следует что:

$$\frac{g}{g_0} = \frac{R^2}{(R+h)^2}; \quad \Rightarrow \quad \Delta\tau = \tau_0\left(1 - \frac{R}{R+h}\right) \approx \tau_0\frac{h}{R} \approx 24\cdot 60\frac{9}{6400} \approx 2\text{мин};$$

---

313. Измерения круговой частоты колебаний тела массы m, закрепленного посередине натянутой струны, длина которой 2ℓ, дали значение ω. Определить натяжение струны.

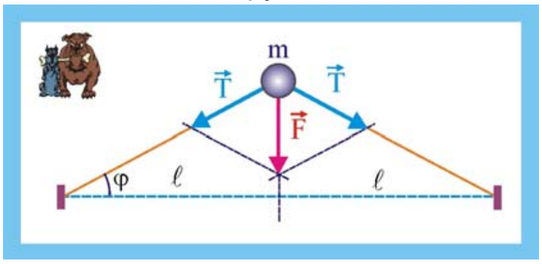


Рис. 313. Натяжение струны

Решение

1. Сила, действующая на тело со стороны струны:

$$F = 2T\sin\varphi;$$

2. При рассмотрении малых отклонений тела от положения статического равновесия:

$$\sin\varphi \approx \text{tg}\varphi = \frac{x_0}{\ell}; \quad \Rightarrow \quad F = \frac{2Tx_0}{\ell};$$

3. Колебания становятся возможными при возникновении возвращающей силы:

$$F = kx_0; \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2T}{\ell};$$

4. Период колебаний массы на струне

$$\Theta = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}; \quad \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell}{2T}}; \quad \frac{1}{\omega^2} = \frac{m\ell}{2T}; \quad \Rightarrow \quad T = \omega^2 m\frac{\ell}{2};$$

---

314. Бусинка с зарядом q может двигаться без трения по натянутой нити длины 2L, на концах которой закреплены заряды Q. Найти частоту малых колебаний системы.

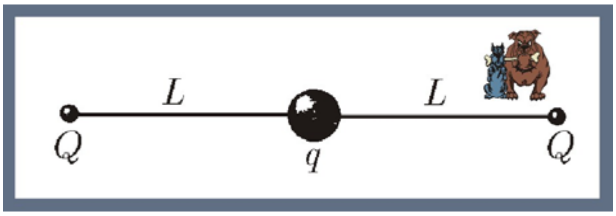


Рис. 314. Собственная частота колебаний

Решение

1. Потенциальная энергия системы зарядов при нахождении бусинки в центре нити:

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qQ}{L};$$

2. Потенциальная энергия при смещении бусинки на расстояние x вправо

$$U_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{qQ}{L+x} + \frac{qQ}{L-x}\right);$$

3. Изменение потенциальной энергии при сдвигании бусинки

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{qQ}{L+x} + \frac{qQ}{L-x} - \frac{2qQ}{L}\right);$$

4. Упростим уравнение для ΔU, приведя скобку к общему знаменателю:

$$\Delta U = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{L^2 - Lx + L^2 + Lx - 2L^2 + 2x^2}{L(L^2 - x^2)}\right); \quad L >> x;$$

$$\Delta U \approx \frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 L^3} x^2;$$

5. В рассматриваемой колебательной системе возвращающей силой является сила электростатического взаимодействия зарядов, при этом квазиупругий коэффициент системы определяется следующим образом:

$$\Delta U \approx \frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 L^3} x^2 \approx \frac{kx^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad k^* = \frac{qQ}{\pi\varepsilon_0 L^3};$$

6. Циклическая частота собственных колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m}} = \sqrt{\frac{qQ}{\pi\varepsilon_0 m L^3}};$$

---

315. Определить время полёта камня от одного полюса Земли до другого, по прямому тоннелю, прорытому через её центр. Плотность планеты принять постоянной.

Решение

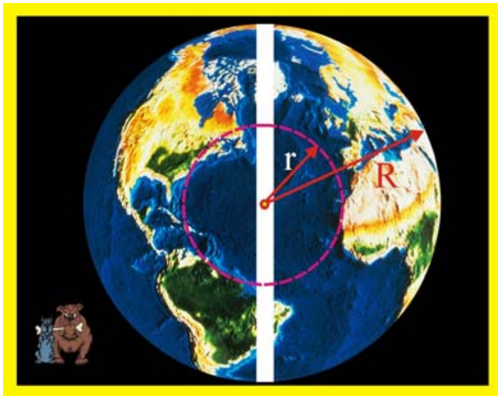


Рис. 315. Колебания в тоннеле

1. Камень, или иной, обладающий массой предмет, опущенный в такую шахту, будет совершать колебательное движение, потому что на поверхности планеты сила тяжести будет максимальной, а в центре Земли – сведётся к минимуму. По мере опускания камня в тоннеле будет уменьшаться масса участвующая в гравитационном взаимодействию. Камень в шахте испытывает притяжение только тех слоёв планеты, которые располагаются ниже его положения. Масса шара

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

пропорциональна R^3, поэтому:

$$\frac{M_r}{M_R} = \frac{r^3}{R^3};$$

2. Из закона гравитации для силы, действующей со стороны нижних слоёв Земли $(r > R)$, следует:

$$F = \frac{GM_r m}{r^2} = \frac{GM_R m}{R^3} r; \quad \frac{GM_R}{R^2} = g_R; \quad \Rightarrow \quad F = mg\frac{r}{R};$$

3. Возвращающей силой в данном случае будет изменяющаяся периодически сила тяжести. Квазиупругий коэффициент определится как:

$$F = k^* r; \quad \Rightarrow \quad k^* = \frac{mg}{R}, \left[\frac{Н}{м}\right];$$

4. Период колебаний камня от полюса к полюсу:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k^*}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 6{,}28\sqrt{\frac{6{,}4 \cdot 10^6}{10}} \approx 84 мин;$$

5. Время полёта камня от полюса до полюса:

$$\tau = \frac{T}{2} = 42\text{мин.}$$

---

316. Доска массы m лежит на двух катках, вращающихся с большой скоростью навстречу друг другу. Расстояние между осями катков ℓ, коэффициент трения при скольжении доски по катку μ. Найти частоту продольных колебаний доски.

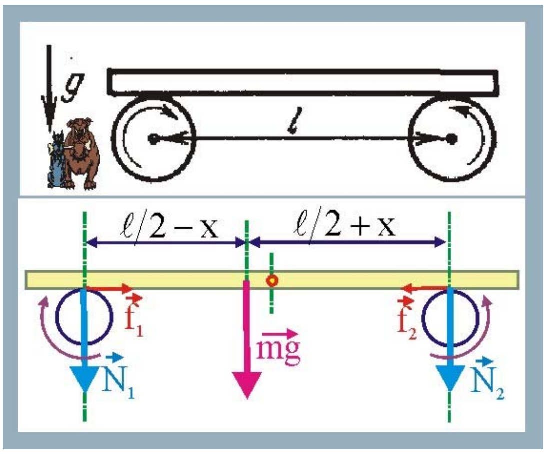


Рис. 316. Колебания доски

Решение

1. Если центр масс доски сместить вправо, например, на расстояние x, то силы трения $\vec{f}_1 \neq \vec{f}_2$, потому что станут разными нормальные реакции связи, т.е. $\vec{N}_1 \neq \vec{N}_2$

$$N_1 = \frac{2(\ell + x)}{\ell} mg; \quad N_2 = \frac{2(\ell - x)}{\ell};$$

2. Равнодействующая сил трения равна:

$$f_\Sigma = \mu mg \frac{2x}{\ell},$$

и является возвращающей силой, которая стремится вернуть доску в положение равновесия

$$F = kx = \frac{2\mu mgx}{\ell}; \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2\mu mg}{\ell};$$

3. Циклическая частота продольных колебаний доски:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2\mu g}{\ell}};$$

---

317. Шарик массой m, насаженный на стержень, вращается с угловой скоростью Ω вокруг оси O, с корой он соединён пружиной жёсткости k. Определить частоту колебаний шарика при условии $\Omega^2 < k/m$.

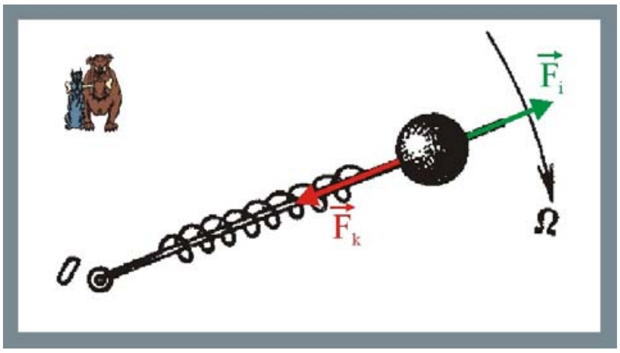


Рис. 317. Вращающаяся масса

Решение

1. Условие статического равновесия вращающегося тела определяется в соответствии с законом Ньютона уравнением:

$$F_K = ma_n;$$

2. Таким образом шарик находится под воздействием одновременно двух сил силы упругости и силы обусловленной возникновением нормального ускорения. При смещении шарика из положения равновесия на величину x возникнет неравенство этих сил и как результат – возвращающая сила, необходимая для появления колебаний.

$$F = kx - m\Omega^2 x;$$

3. Частота собственных колебаний системы

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \Omega^2};$$

---

318. Метроном представляет собой лёгкий стержень, на нижнем конце которого на расстоянии ℓ от оси находится груз массы *M*. Выше оси скользит груз массы m, который можно закреплять на стержне на разных расстояниях *x* от оси вращения, подбирая частоту колебаний метронома. Считая массы точечными, определить зависимость частоты собственных колебаний метронома от положения массы m.

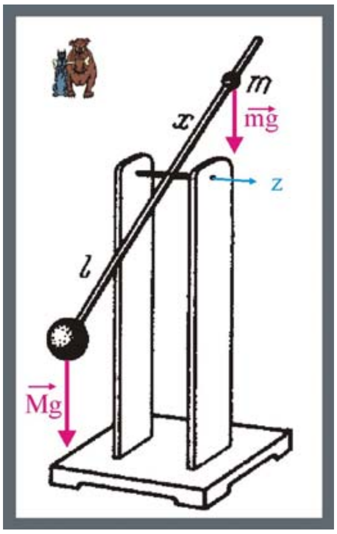


Рис. 318. Метроном

Решение

1. Колебательная система представляет собой физический маятник, собственная частота колебаний которого определяется уравнением

$$\omega = \sqrt{\frac{mgr}{J_z}};$$

2. В данном случае колебания возникают вследствие появления разности моментов сил тяжести масс при нарушении состояния равновесия

$$\Delta M_z(F) = Mg\ell - mgx;$$

3. Вместо масс в данном случае необходимо использовать их моменты инерции. Для материальных точек, каковыми являются по условию задачи рассматриваемые массы:

$$J_z = M\ell^2 + mx^2;$$

4. Циклическая частота колебаний данного физического маятника:

$$\omega = \sqrt{\frac{g(M\ell + mx)}{M\ell^2 + mx^2}};$$

---

319. Математический маятник с длиной нити подвеса L и массой m соединён с горизонтальной невесомой пружиной жёсткостью k. Определить период малых колебаний системы. Как изменится ответ, если пружину заменить резиновой лентой с эквивалентной длиной и жёсткостью?

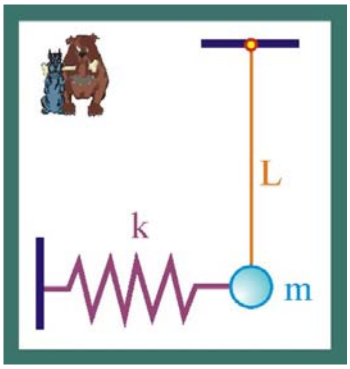


Рис. 13.146. Маятник с пружиной

Решение

1. Если систему отклонить из положения равновесия на бесконечно малую величину r, то выражение для полной энергии можно записать в виде

$$E = Ar^2 + B\left(\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

где A, B – положительные константы. В качестве обобщённой координаты dr может быть использована как линейная величина, так и угловая, например, угол отклонения нити от вертикали.

2. Если потери при движении системы отсутствуют, то энергия такой системы сохраняется, потому что силы тяжести и упругие силы относятся к консервативным силам. Закон сохранения энергии можно представить так:

$$\frac{dE}{dt}=0; \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)=-\frac{A}{B}r; \quad \ddot{r}+\frac{A}{B}r=0; \quad \ddot{r}+\omega^2 r=0$$

3. Таким образом, мы пришли к дифференциальному уравнению, описывающему процесс гармонических колебаний

$$\omega=\sqrt{\frac{A}{B}};$$

4. Запишем уравнение полной энергии применительно к данной системе

$$E=\left(k+\frac{mg}{L}\right)\frac{r^2}{2}+\frac{m\dot{r}^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad A=\frac{1}{2}\left(k+\frac{mg}{L}\right); \quad B=\frac{m}{2};$$

5. Период колебаний системы

$$T_1=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{B}{A}}=2\pi\sqrt{\frac{mL}{kL+mg}};$$

6. Если пружину заменить резиновой лентой, то она станет оказывать влияние только при растяжении, поэтому период колебаний такой системы представится так:

$$T_2=\frac{T_1}{2}+2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}=\pi\left(\sqrt{\frac{mL}{kL+mg}}+\sqrt{\frac{L}{g}}\right);$$

---

320. Во сколько раз изменится циклическая частота малых колебаний небольшого груза массой m на стержне, если к середине невесомого стержня прикрепить горизонтальную пружину жёсткостью k. В равновесном состоянии стержень занимает вертикальное положение.

Решение

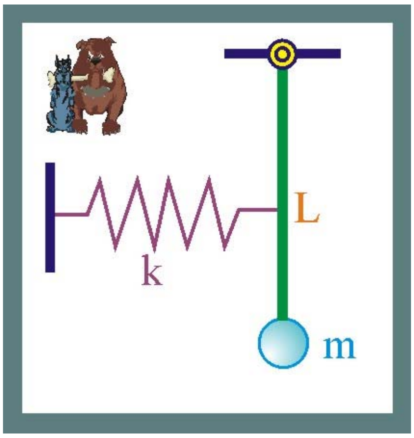


Рис. 320. Стержень с пружиной

1. Если пружину мысленно убрать, то оставшаяся конструкция будет представлять собой обычный математический маятник с частотой собственных колебаний

$$\nu_1=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}};$$

2. Прикрепление к середине стержня пружины будет увеличивать величину возвращающей силы, следовательно, частота собственных колебаний должна возрасти.

3. При отклонении из положения равновесия стержня на бесконечно малую величину $r \ll L$, он приобретает потенциальную энергию

$$mgh=\frac{mgr^2}{2L},$$

кроме того, при деформации пружины на r/2 ей сообщается дополнительная энергия

$$\Delta\Pi=\frac{k(r/2)^2}{2};$$

4. Полная механическая энергия системы определится как:

$$E=\left(\frac{mg}{L}+\frac{k}{4}\right)\frac{r^2}{2}+\frac{m\dot{r}^2}{2};$$

5. Сохранение энергии даёт:

$$\frac{dE}{dt}=0;\quad \ddot{r}+\left(\frac{g}{L}+\frac{k}{4m}\right)r=0;\quad \Rightarrow\quad \omega=\sqrt{\frac{g}{L}+\frac{k}{4m}};$$

6. Частота колебаний системы

$$\nu_2=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}+\frac{k}{4m}};$$

7. Отношение частот

$$\frac{\nu_2}{\nu_1}=\sqrt{1+\frac{kL}{4mg}};$$

---

321. К ободу колеса с горизонтальной осью прикрепили грузик массы m. Определить массу колеса, предполагая её равномерно распределённой по ободу, если частота колебаний колеса с грузиком вокруг оси равна ω, а его радиус равен R.

Решение

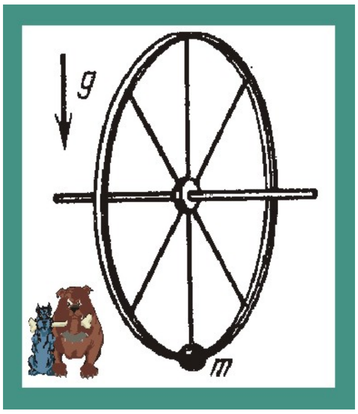


Рис. 321. Колесо с грузиком

1. Колебательная система является физическим маятником ч циклической частотой собственных колебаний:

$$\omega=\sqrt{\frac{mgR}{J_z}};$$

2. Момент инерции системы:

$$J_z=mR^2+MR^2;$$

3. Циклическая частота колебаний:

$$\omega=\sqrt{\frac{mgR}{R^2(M+m)}};\quad \Rightarrow\quad M=m\left(\frac{g}{\omega^2R}-1\right);$$

---

322. В сферической лунке радиуса R находятся две точечные массы, соединённые невесомым стержнем длины 2ℓ. Определить циклическую частоту собственных колебаний масс в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка.

Решение

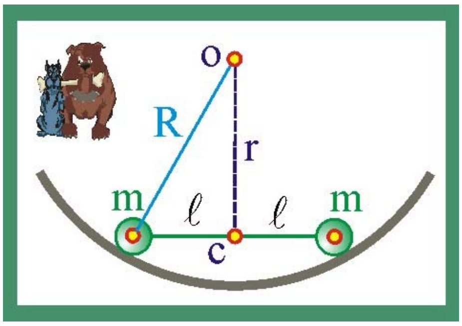


Рис. 322. Массы в лунке

1. Расстояние от центра масс *c* до оси вращения системы *o*

$$r=\sqrt{R^2-\ell^2};$$

2. В состоянии равновесия суммарный момент сил тяжести точечных масс относительно оси проходящей через точку о перпендикулярно плоскости чертежа, равен нулю. При малом смещении масс соединённых стержнем появляется возвращающий момент, стремящийся вернуть систему в состояние статического равновесия, т.е. возникнут колебания с циклической частотой:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgr}{J_z}} = \sqrt{\frac{mgr}{mr^2}} = \sqrt{\frac{g}{\sqrt{R^2 - \ell^2}}};$$

323. Пружина жёсткости k одним концом присоединена к оси колеса массы m, которое может кататься без проскальзывания, а другим прикреплена к стене. Масса колеса равномерно распределена по ободу. Какова частота колебаний системы?

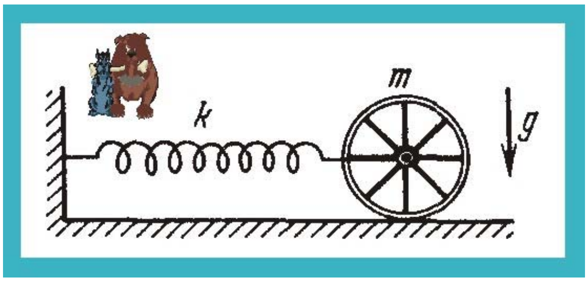


Рис. 323. Колесо с пружиной

Решение

1. При нарушении состояния равновесия система за счёт деформации пружины накапливает энергию, которая при возвращении в состояние равновесия сообщает колесу плоское движение, т.е. поступательное движение его центра масс и вращение точек обода колеса вокруг центра масс

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J_z\omega^2}{2} = \frac{m\omega^2r^2}{2} + \frac{m\omega^2r^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad \frac{kx^2}{2} = \frac{2mv^2}{2};$$

2. Поскольку вращательная и поступательная компонента энергии одинаковы, то циклическая частота определится как:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{2m}};$$

324. Тонкий обруч радиусом R = 0,3 м колеблется вокруг вбитого горизонтально в стену гвоздя, так что плоскость колебания параллельна стене. Определить период колебаний такого физического маятника.

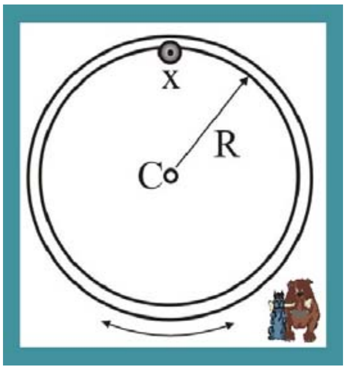


Рис.324 Колебания обруча

Решение

1. В данном случае центр масс обруча не совпадает с осью колебаний, для определения момента инерции относительно оси колебаний x, перпендикулярной плоскости чертежа необходимо воспользоваться теоремой Гюйгенса – Штейнера

$$J_x = mR^2 + ma^2 = 2mR^2.$$

2. Период колебаний обруча

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_x}{mg\delta}} = 2\pi\sqrt{\frac{2mR^2}{mgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}} = 6{,}28\sqrt{\frac{0{,}6}{9{,}81}} \cong 1{,}55\,c\,.$$

325. Две массы m_1 и m_2 соединены невесомой пружиной жёсткостью k. Определить период колебаний системы, считая, что перемещение масс происходят вдоль одной прямой.

Решение

1. Движение масс в данном случае будет происходить при неподвижности центра масс C, т.е. систему можно рассматривать в виде двух пружинных ма-

ятников. Если первоначальную длину пружины обозначить через x, то можно записать следующую систему уравнений

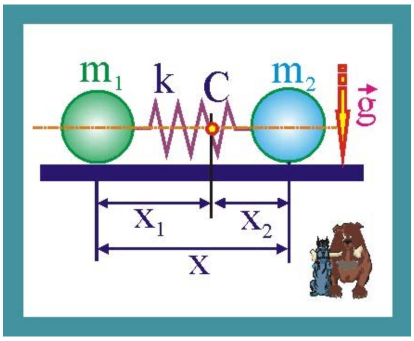


Рис. 325. Связанные массы

$$\left.\frac{m_1}{m_2}=\frac{x_2}{x_2};\quad x_1+x_2=x;\right\}$$

2. Выразим из системы уравнений величины x_1 и x_2

$$x_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}x;\quad x_2=\frac{m_1}{m_1+m_2}x;$$

3. Коэффициент жесткости пружины, как известно, обратно пропорционален её длине, т.е. для пружин длиной x_1 и x_2 можно записать следующие соотношения

$$\left.\frac{k_1}{k}=\frac{x}{x_1};\quad \frac{k_2}{k}=\frac{x}{x_2};\right\}$$

4. Подставим в последние уравнения значения x_1 и x_2 и разрешим их относительно k_1 и k_2

$$k_1=\frac{m_1+m_2}{m_2}k;\quad k_2=\frac{m_1+m_2}{m_1};$$

5. Неподвижность центра масс предполагает одинаковость периодов колебаний масс и движение в противоположные стороны. Исходя из этого, период колебаний определится как:

$$T=T_1=T_2=2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k_1}}=2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k_2}}=2\pi\sqrt{\frac{m_1m_2}{k(m_1+m_2)}};$$

---

326. Определить отношение частот собственных колебаний молекулы водорода H_2 и молекулы дейтерия HD.

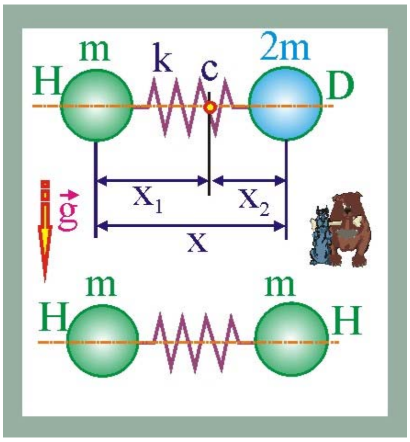


Рис. 326. Колебания молекул

Решение

1. Ядро дейтерия имеет по сравнению с водородом один дополнительный нейтрон, можно считать, что ядро водорода обладает массой m, а дейтерия 2m.

2. Воспользовавшись уравнениями предыдущей задачи, получим, для водорода ω_1 и дейтерия ω_2:

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k2m}{m^2}}=\sqrt{\frac{2k}{m}};\quad \omega_2=\sqrt{\frac{k3m}{2m^2}};$$

3. Отношение циклических частот:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}=\sqrt{\frac{3}{2}}\cong 1{,}224;$$

---

327. Тело массы m, прикрепленное к пружине, свободно колеблется. Смещение тела зависит от времени по закону $x = A\cos\omega t$. Как меняются во времени скорость и ускорение? Как зависит сила, действующая на тело от его смещения и от времени? Чему равна жёсткость пружины?

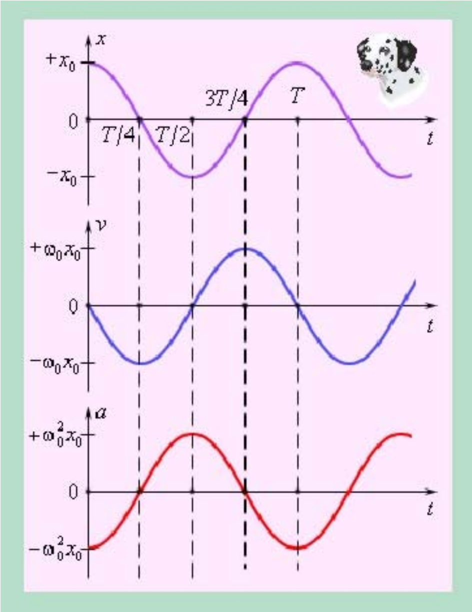


Рис. 327. Кинематические параметры

Решение

1. Скорость гармонического движения определится в виде первой производной смещения по времени:

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin\omega t;$$

2. Ускорение гармонического движения является первой производной скорости по времени или второй производной по времени смещения:

$$a = \ddot{x} = \frac{dv_x}{dt} = -A\omega^2\cos\omega t = -\omega^2 A;$$

3. Сила, действующая на колеблющуюся массу в соответствии со вторым Законом Ньютона равна произведению массы тела на его ускорение:

$$F = m\ddot{x} = -mA\omega^2\cos\omega t = -m\omega^2 A\,;$$

4. Коэффициент упругости пружины:

$$F = -kA = -m\omega^2 A; \quad \Rightarrow \quad k = -m\omega^2;$$

---

328. Амплитуда колебаний математического мятника A = 5 мм, длина нити подвеса составляет ℓ = 1 м. Как зависит смещение шарика от времени? а) за начало отсчёта времени принять момент прохождения точки равновесия слева направо; б) момент прохождения крайнего правого положения.

Решение

1. Циклическая частота колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \cong 3{,}16\frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

2. Уравнение смещения шарика для случая «а», когда при t = 0, x(0) = 0

$$x(t) = A\sin\omega t = 5\cdot 10^{-3}\sin 3{,}16t\,;$$

3. Уравнение смещения шарика для случая «б», когда при t = 0, x(0) = A

$$x(t) = A\cos\omega t = 5\cdot 10^{-3}\cos 3{,}16t\,;$$

---

329. Груз, свободно колеблющийся на пружине, за время τ = 0,01 с сместился с расстояния x = $5\cdot 10^{-2}$ м от положения равновесия до наибольшего, равного A = 10^{-2} см. Каков период колебаний груза?

Решение

1. Уравнение гармонического движения груза:

$$x(t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right); \quad \frac{A}{2} = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}\tau\right); \quad \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{T}0{,}01\right);$$

$$\left(\frac{2\pi}{T}0{,}01\right) = \frac{\pi}{3}; \quad \Rightarrow \quad T = 0{,}06c;$$

---

330. Частота свободных колебаний равна ω. Через какое наименьшее время кинетическая энергия тела уменьшится вдвое по сравнению со своим наибольшим значением?

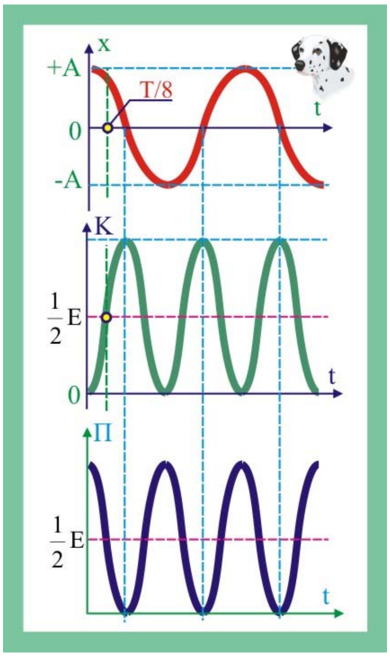


Рис. 330. Зависимость смещения и энергии от времени

Решение

1. Отметим, что упругая сила, так же как сила тяжести и сила Кулона относятся к консервативным силам, работа которых не зависит от вида траектории, а определяется только положением начальной и конечной точки, т.е., например, для массы, соединённой с горизонтальной пружиной можно записать:

$$\oint_L \vec{F}_{упр} d\vec{\ell} = 0.$$

2. Полная энергия колеблющейся массы должна оставаться постоянной, т.е. для консервативных сил справедлив закон сохранения энергии. В процессе колебаний происходит преобразование потенциальной энергии в кинетическую энергию. Применительно к массе, соединённой с пружиной, в крайних положениях массы энергия имеет потенциальный характер

$$E_{2,3} = \Pi_{max} = \frac{kx_0^2}{2}, \quad E_1 = K_{max} = \frac{m\dot{x}_0^2}{2} = \frac{mx_0^2\omega^2}{2}.$$

3. Установим закон изменения кинетической и потенциальной энергии в случае гармонического колебания, для этого запишем уравнение кинетической энергии в виде:

$$K(t) = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{mx_0^2\omega^2}{2}\sin^2(\omega t + \varphi_0), \quad \Pi(t) = \frac{kx^2}{2} = \frac{kx_0^2}{2}\cos^2(\omega t + \varphi_0),$$

4. Заменяя в уравнении k на $m\omega^2$, и складывая уравнения кинетической и потенциальной энергии, получим:

$$E = K + \Pi = \frac{kx_0^2}{2} = \frac{mx_0^2\omega^2}{2}, \quad \langle E \rangle = \frac{E}{2}.$$

5. Периодичность изменения энергии установим, переписав уравнения в соответствии с тригонометрическими правилами

$$K(t) = K_{max}\sin^2(\omega t + \varphi_0) = K_{max}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2(\omega t + \varphi_0)\right],$$

$$\Pi(t)=\Pi_{max}\cos^2(\omega t+\varphi_0)=\Pi_{max}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2(\omega t+\varphi_0)\right],$$

очевидно, что кинетическая и потенциальная энергии изменяются с частотой 2ω, в два раза превышающей частоту колебаний. В моменты амплитудного значения смещения кинетическая энергия обращается в нуль, а полная энергия колебаний равна наибольшему значению потенциальной энергии (рис. 330).

6. Таким образом, уменьшение кинетической энергии в два раза произойдёт через $\tau = T/8$

$$\tau=\frac{T}{8}=\frac{2\pi}{8\omega}=\frac{\pi}{4\omega};$$

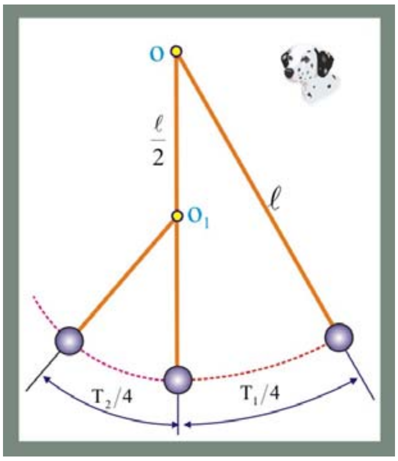


Рис. 331. Маятник с гвоздём

331. Найти период колебаний математического маятника длины ℓ, если на пути нити посередине на расстоянии $\ell/2$ вниз по вертикали от точки подвеса вбит гвоздь.

Решение

1. Маятник такой конструкции половину периода будет двигаться при длине подвеса ℓ, а половину периода при длине подвеса $\ell/2$, суммарный период колебаний можно представить следующим образом:

$$T=\frac{T_1}{2}+\frac{T_2}{2}=\frac{2\pi}{2}\sqrt{\frac{\ell}{g}}+\frac{2\pi}{2}\sqrt{\frac{\ell}{2g}};$$

$$T=\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

---

332. Горизонтальный жёлоб слева от нижней линии выгнут по цилиндрической поверхности радиуса r, а справа – по поверхности радиуса R. Определить период колебаний шарика, помещённого в такой жёлоб.

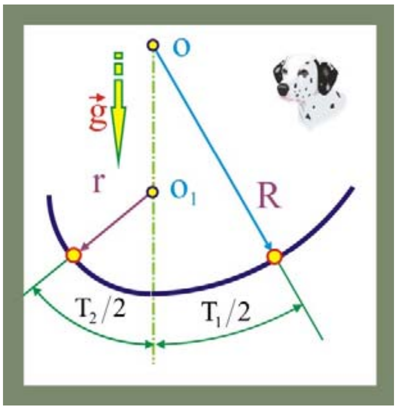


Рис. 332. Колебания в жёлобе

Решение

1. Если шарик сместить вправо, то под действием возвращающей силы он до положения статического равновесия будет двигаться в течение $\tau_1 = T_1/4$, а затем в течение $\tau_2 = T_2/4$ будет из равновесного положения двигаться влево. В общей сложности период колебаний шарика будет равен:

$$T=\frac{T_1}{2}+\frac{T_2}{2}=\frac{2\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}+\frac{2\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}};$$

$$T=\pi\left(\sqrt{\frac{R}{g}}+\sqrt{\frac{r}{g}}\right);$$

333. Из нижней точки гладкого горизонтального цилиндрического жёлоба радиуса R под небольшим углом к его образующей выскальзывает со скоростью v_0 маленький шарик. Сколько раз на длине ℓ он пересечёт нижнюю образующую жёлоба?

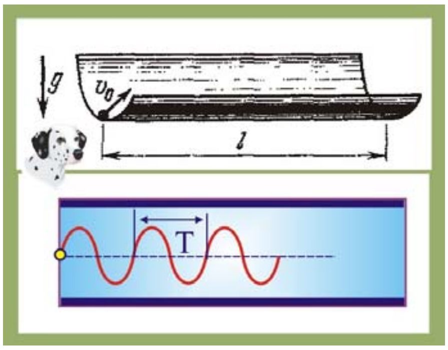


Рис. 333. Колебания в жёлобе

Решение

1. Наряду с поступательным движением вдоль нижней образующей цилиндрического жёлоба шарик будет совершать синусоидальные колебания в перпендикулярном направлении с периодом:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{R}};$$

2. Расстояние ℓ в своём поступательном движении шарик преодолеет за время:

$$\tau = \frac{\ell}{v_0};$$

3. С учётом того, что шарик в течение периода будет дважды пересекать нижнюю образующую, целое число пересечений определится как:

$$n = \frac{2\tau}{T} = \frac{\ell}{v_0\pi\sqrt{\frac{g}{R}}};$$

---

334. К наклонной стене подвешен математический маятник длины ℓ. Маятник отклонили на малый угол, в два за превышающий угол наклона стены к вертикали, и отпустили. Найдите период колебаний маятника, если удары о стену абсолютно упругие.

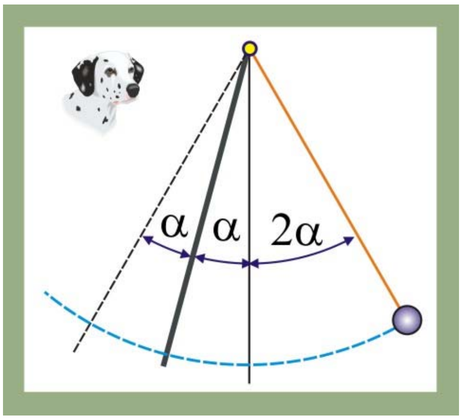


Рис. 334. маятник у наклонной стены

Решение

1. Если бы стена была вертикальной, то полный размах колебаний в угловом исчислении составлял бы 4α, а при наклонённой стене он составляет 3α, т.е. движение на треть периода продолжается меньше.

2. Для периода колебаний математического маятника подвешенного на наклонённую стену можно записать следующее уравнение:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} - \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{\ell}{g}} = \frac{4}{3}\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}};$$

---

335. На гладком горизонтальном столе покоится шар массой M, соединенный с горизонтальной невесомой пружиной жёсткостью k. В центр шара попадает горизонтально летящая пуля массой m, со скоростью v_0. Происходит абсолютно неупругий удар в результате которого пуля застревает в центре шара. Определить амплитуду и период возникших после удара гармонических колебаний шара с пулей внутри, а так же зависимость скорости и смещения от времени.

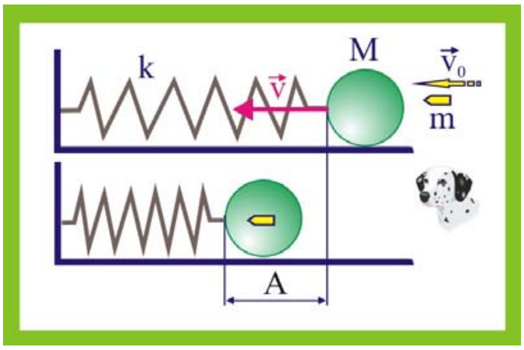


Рис.335. Колебания тела с застрявшей пулей

Решение

1. Запишем уравнения закона сохранения импульса и энергии

$$\left.\begin{aligned}&(M+m)v = mv_0;\\ &\frac{kA^2}{2}-\frac{(M+m)v^2}{2}=0,\end{aligned}\right\}$$

где A − амплитуда возникших колебаний, v − совместная скорость шара с пулей.

2. Выражая из первого уравнения совместную скорость v и подставляя найденное значение во второе уравнение системы, получим:

$$A=\frac{mv_0}{M+m}\sqrt{\frac{M+m}{k}};$$

3. Период колебаний системы

$$T=2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}};$$

4. Амплитудное значение скорости шара с застрявшей в нём пулей определим из первого уравнения исходной системы:

$$v_m=\frac{mv_0}{M+m};$$

5. После попадания пули тело совместно с ней вследствие возникновения со стороны деформированной пружины возвращающей силы придёт в колебательное гармоническое движение, при этом:

$$v(t)=v_m\cos\omega t=\frac{mv_0}{M+m}\cos\sqrt{\frac{k}{m+M}}\cdot t;$$

6. Смещение естественно тоже будет подчиняться гармоническому закону изменения во времени:

$$x(t)=A\sin\omega t=\frac{mv_0}{\sqrt{k(M+m)}}\sin\sqrt{\frac{k}{m+M}}t;$$

---

336. На горизонтальной ленте транспортёра, движущегося со скоростью u, находится груз массы m, связанный пружиной жёсткости k с неподвижной стенкой. В начальный момент времени пружина не деформирована, а масса вследствие трения движется вместе с лентой. Найти амплитуду возникших колебаний.

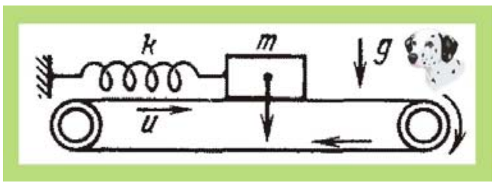


Рис. 336. Колебания на транспортёре

Решение

1. Деформация пружины будет происходить до тех пор, пока кинетическая энергия груза не станет равной потенциальной энергии пружины, в этот момент возникнут колебания с амплитудой:

$$\frac{kA^2}{2}=\frac{mu^2}{2};\quad\Rightarrow\quad A=u\sqrt{\frac{m}{k}};$$

---

337. Тело массы m колеблется по закону x = A cos(ωt + φ). Найти зависимость силы, действующей на тело, от времени. Чему равно её амплитудное значение? В какие моменты времени сила принимает наибольшие по модулю значения?

Решение

1. В соответствии со вторым законом Ньютона $F = m\ddot{x}$, где $\ddot{x}$ − проекция ускорения массы на направление движения. Определим величину $\ddot{x}$:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi); \quad \ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x;$$

$$F(t) = -mA\omega^2\cos(\omega t + \varphi);$$

2. Амплитудное значение силы:

$$F_m = -mA\omega^2;$$

3. Моменты времени, соответствующие максимальным значениям модуля силы достигаются тогда, когда cos(ωt + φ) = 1

$$\omega t + \varphi = n\pi; \quad n\pi - \varphi = \omega t; \quad t = \frac{n\pi - \varphi}{\omega}, \ (n = 1, 2, 3\ldots).$$

---

338. Горизонтальная мембрана совершает гармонические колебания по вертикали с частотой ω и амплитудой А. На мембране лежит маленький груз. При каком условии груз отделится от мембраны и станет подскакивать. Ниже или выше среднего положения мембраны происходит отрыв тела от её поверхности?

Решение

1. Отрыв груза от мембраны произойдёт в случае, когда колебательное ускорение поверхности мембраны по модулю превысит величину ускорения свободного падения:

$$m\omega^2 A \ge mg; \quad \omega^2 A \ge g;$$

2. Пусть смещение поверхности мембраны происходит по закону:

$$x(t) = A\sin\omega t,$$

тогда скорость и ускорение определятся как

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega t; \quad \ddot{x} = -A\omega^2\sin\omega t,$$

другими словами, максимальное колебательное ускорение имеет место в моменты достижения поверхностью мембраны амплитудных значений смещения, тут грузик – то и оторвётся, выше уровня статического положения поверхности мембраны.

---

339. На горизонтальной плоскости лежит тело массы М, связанное пружиной жёсткости k с неподвижной стенкой. Тело оттянули на расстояние ℓ и отпустили. Совершив n полных колебаний, тело остановилось. Чему равен коэффициент трения μ между телом и плоскостью, если после остановки тела пружина оказалась не деформированной?

Рис. 339. Колебания с трением

Решение

1. При смещении тела на расстояние ℓ пружина запасает потенциальную энергию

$$U_m = \frac{k\ell^2}{2}$$

2. В течение одного периода колебаний тело проходит расстояние 4ℓ, при этом энергия дважды принимает максимальное значение и дважды становится равной нулю, поэтому

$$\frac{k\ell^2}{2} + \frac{k\ell^2}{2} = \mu mg4\ell n; \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{k\ell}{4mgn};$$

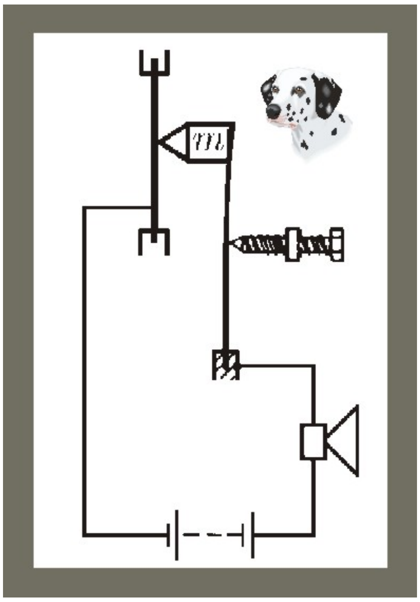


Рис. 340. Амплитуда колебаний

340. Для измерения малых амплитуд колебаний мембраны, совершающей гармонические колебания с высокой частотой ω, применяется «молоточек», включенный в электрическую цепь с мембраной и телефоном. Молоточек массы *m* прижимается к мембране с силой, которая регулируется микрометрическим винтом. Когда контакт с молоточком прерывается, то в телефоне появляется прерывистый сигнал. Найти амплитуду колебаний мембраны, если сигнал появился при прижатии молоточка силой *F*.

Решение

1. Электрические импульсные сигналы появляются при периодическом нарушении контакта молоточка с мембраной. Электрические импульсы в электродинамическом преобразователе (телефонном капсуле) преобразуются в механические колебания в акустическом диапазоне, которые и свидетельствуют о нарушении контакта.

2. Условие потери контакта молоточка с поверхностью мембраны:

$$m\ddot{x}_m \geq F; \quad m\omega^2 A \geq F; \quad A \approx \frac{F}{m\omega^2};$$

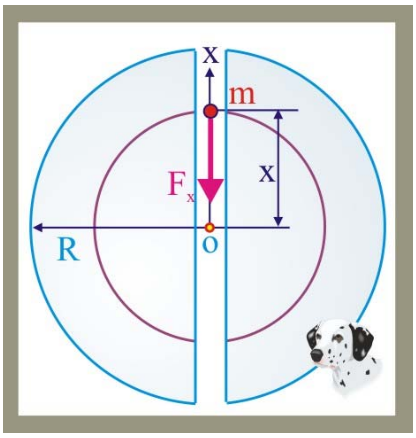


Рис. 341. Скорость в тоннеле

341. В шахту, поделанную по диаметру Земли, без начальной скорости опускают тело массой m, которое может двигаться по тоннелю без сопротивления. Определить скорость тела в центре Земли ($M_З \approx 6\cdot10^{24}$ кг).

Решение

1. В произвольной точке падения тела в шахте, на расстоянии x от центра Земли на него действует сила тяготения со стороны шара радиуса x

$$F_x = G\frac{mM_x}{x^2},$$

где M_x – масса шара радиуса x.

2. Средняя плотность планеты:

$$<\rho>=\frac{3M_З}{4\pi R^3}\approx\frac{M_З}{4R^3};$$

3. Масса шара радиусом x

$$M_x\approx 4G<\rho>x^3.$$

4. Сила, действующая на тело

$$F_x\approx 4G<\rho>mx;$$

5. Уравнение второго закона Ньютона даёт:

$$m\ddot{x}=-F_x;\quad\Rightarrow\quad \ddot{x}+4G<\rho>x=0,$$

полученное уравнение является уравнением гармонических колебаний. Если ввести обозначение: $\omega^2=4G<\rho>$, то

$$\ddot{x}+\omega^2x=0;$$

6. Решение уравнения записывается в виде:

$$x=A\sin(\omega t+\varphi_0);$$

7. Значение амплитуды колебаний и начальную фазу определим из начальных условий: при $t=0$, $x=R$, $\dot{x}=0$, или

$$R=A\sin\varphi_0,\quad 0=A\omega\cos\varphi_0;\quad\Rightarrow\quad \varphi_0=\frac{\pi}{2};\quad A=R;$$

8. Уравнен6ие движения тела с учётом начальных условий приобретает вид:

$$x(t)=R\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right);$$

9. Скорость тела в центре Земли:

$$v=\dot{x}=R\omega\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right);\quad v=\omega R=R\sqrt{4G\frac{M_З}{4R^3}}\approx\sqrt{\frac{GM_З}{R}}\approx 7{,}8\cdot 10^3\,\frac{м}{с},$$

первая космическая скорость, при условии движения спутника по круговой орбите примерно равной радиусу Земли.

---

342. Воздушный шар радиуса R и массой m при ударе о стенку деформируется, так ч то x << R. Считая избыточное давление, возникшее вследствие деформации Δp постоянным и пренебрегая упругостью оболочки, определить время соударения шара со стенкой.

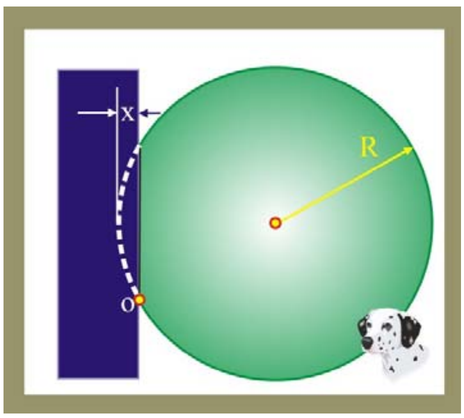


Рис. 342. Соударение шара со стеной

Решение

1. Площадь соприкосновения шара со стеной

$$s=\pi r^2;\quad r^2=R^2-(R-x)^2;$$

$$s=\pi(R^2-R^2+2Rx-x^2)=2\pi Rx$$

2. Сила, вызванная избыточным давлением при деформации шара

$$F=\Delta ps;$$

3. Второй закон Ньютона в проекции на горизонтальную ось

$$-F=m\ddot{x};\quad m\ddot{x}+F=0;$$

$$m\ddot{x}+\Delta p2\pi Rx=0;\quad \ddot{x}+\frac{2\pi\Delta pR}{m}x=0;$$

4. Введём обозначение:

$$\frac{2\pi\Delta pR}{m} = \omega^2; \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

5. Период колебаний шара

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2\pi R\Delta p}};$$

6. Шар будет контактировать со стеной в течение половины периода

$$\tau = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{2\pi R\Delta p}};$$

---

343. Шероховатая подставка колеблется по гармоническому закону в горизонтальной плоскости с периодом T. При какой амплитуде колебаний A, лежащее на подставке тело начнёт скользить, если коэффициент трения между поверхностями μ?

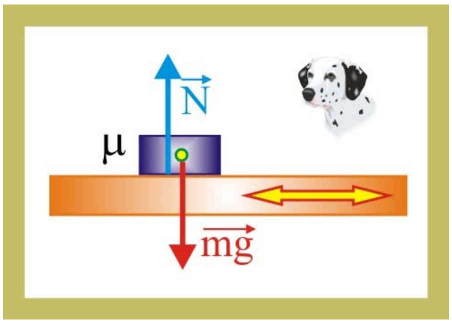


Рис. 343. Колеблющаяся опора

Решение

1. Пусть подставка колеблется в соответствии с уравнением:

$$x(t) = A\cos\omega t = F\cos\frac{2\pi}{T}t;$$

2. Определим скорость и ускорение точек подставки:

$$\dot{x} = -A\left(\frac{2\pi}{T}\right)\sin\frac{2\pi}{T}t; \quad \ddot{x} = -A\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\cos\frac{2\pi}{T}T$$

3. Амплитудное значение ускорения подставки

$$|\ddot{x}_m| = A\frac{4\pi^2}{T^2};$$

4. Тело движется вместе с подставкой благодаря наличию силы трения:

$$F_{Тр} = \mu N = \mu mg; \quad \mu mg = m\ddot{x}; \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_m = \mu g;$$

5. Условие начала перемещения предмета по подставке:

$$\mu g \geq \frac{4\pi^2 A}{T^2}; \quad \Rightarrow \quad A \geq \frac{\mu mgT^2}{4\pi^2};$$

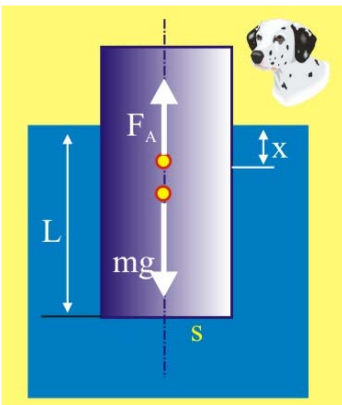


Рис. 344. Плавающий цилиндр

344. Цилиндр массой m с площадью поперечного сечения s плавает в жидкости с плотностью ρ. Когда цилиндр немного утопили и отпустили, он сал колебаться в вертикальном направлении. Пренебрегая потерями при движении, определить период малых колебаний цилиндра.

Решение

1. Условие плавания цилиндра:

$$mg = F_A; \quad mg = \rho gsL;$$

2. При дополнительном погружении сила Архимеда увеличивается, т.е. появляется возвращающая сила, обеспечивающая возникновение вертикальных колебаний:

$$\Delta F_A = \rho s(L + x);$$

3. Уравнение второго закона Ньютона с учётом возвращающей силы:

$$m\ddot{x} = -\rho g s x; \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{\rho g s}{m}x = 0; \quad \omega^2 = \frac{\rho g s}{m};$$

4. Период колебаний цилиндра

$$\omega = \frac{2\pi}{T}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho g s}};$$

---

345. Тело массой m, надетое на гладкий горизонтальный стержень, связано пружиной жёсткости k с неподвижной стеной. Тело смещают из состояния равновесия на расстояние x_0 и отпускают без начальной скорости. Найти среднюю скорость тела за время, в течение которого оно проходит расстояние из крайнего положения в положение $x_0/2$.

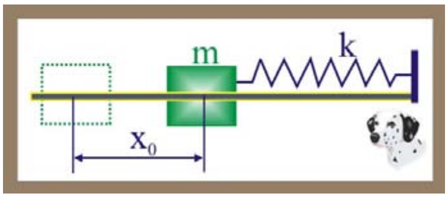


Рис. 345. Тело на стержне

Решение

1. Если за начало отсчёта времени принять момент начала движения под действием возвращающей силой, вызванной растяжением пружины на x_0, то уравнение возникших колебаний можно описать уравнением:

$$x(t) = x_0\cos\omega t = x_0\cos\frac{2\pi}{T}t = x_0\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t.$$

2. Пусть тело расстояние $x_0/2$ проходит за время τ, тогда:

$$\frac{x_0}{2} = x_0\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\tau; \quad \Rightarrow \quad \tau = \sqrt{\frac{k}{m}}\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}};$$

3. Средняя скорость движения:

$$< v >= \frac{x_0}{2\tau} = \frac{3x_0}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}};$$

---

346. Брусок массой m может двигаться поступательно между двумя невесомыми пружинами жёсткостью k_1 и k_2. В недеформированном состоянии расстояние между пружинами составляет L. В начальный момент времени брусок вместе с пружиной смещают влево на расстояние x_0. Через какое время τ после того, как брусок отпустят, он снова вернётся в исходное состояние? Размерами бруска можно пренебречь.

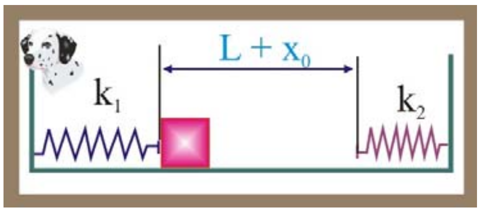


Рис. 346. Брусок между пружин

Решение

1. Искомое время движения будет состоять из трёх компонент: полупериоду колебания на левой пружине, равномерному поступательному движению на расстоянии 2L и полупериоду колебания на правой пружине.

2. Определим эти компоненты времени:

$$\tau_1 = \pi\sqrt{\frac{k_1}{m}}; \qquad \tau_2 = \pi\sqrt{\frac{k_2}{m}}; \quad \tau_3 = \frac{2L}{v};$$

3. Скорость равномерного движения определится из закона сохранения энергии:

$$\frac{k_1x_0^2}{2}=\frac{mv^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad v=\sqrt{\frac{k_1}{v}}x_0;$$

4. Суммируя времена, получим:

$$\tau=\tau_1+\tau_2+\tau_3=\pi\left(\sqrt{\frac{m}{k_1}}+\sqrt{\frac{m}{k_2}}\right)+\frac{2L}{x_0}\sqrt{\frac{m}{k_1}};$$

---

347. Полярная двухатомная молекула с массой каждого атома m и зарядом ±q находится в электрическом поле напряжённостью E. Расстояние между атомами L. Определить период собственных колебаний молекулы.

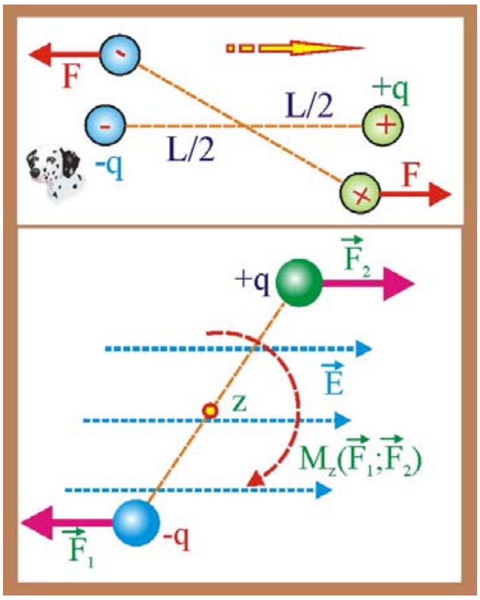


Рис. 347. Полярная молекула

Решение

1. Если атомы молекулы располагаются на одной линии силового электрического поля, то это состояние является устойчивым. Если разноимённо заряженные атомы поместить на разных силовых линиях, например, повернув вокруг общего центра, то возникнет восстанавливающий момент пары сил, который будет стремиться вернуть диполь в состояние равновесия.

2. Полярную молекулу можно рассматривать как физический маятник с периодом колебаний

$$T=2\pi\sqrt{\frac{J_z}{M_z(\vec{F})}}=2\pi\sqrt{\frac{m\left(\frac{L}{2}\right)^2}{|q|E\cdot\frac{L}{2}}};$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{mL}{2|q|E}};$$

---

348. Пластина с насыпанным не её поверхность песком совершает горизонтальные гармонические колебания с циклической частотой ω. Какова амплитуда колебаний пластины, если песчинки отскакивают от пластины на высоту h = 3 мм по отношению к их положению статического равновесия.

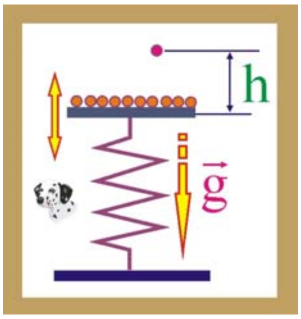


Рис.348. Песчинки на пластине

Решение

1. Запишем уравнение второго закона Ньютона для отскакивающей пластинки

$$F=m(g+a);$$

2. Ускорение песчинки вплоть до её отрыва от пластины определится как:

$$a=-\omega^2x=-4\pi^2\nu^2x;;$$

3. Отрыв песчинки произойдёт при F = 0

$$mg + ma = 0; \quad \Rightarrow \quad -a \ge |\vec{g}|; \quad x = \frac{g}{\omega^2};$$

4. Запишем закон сохранения энергии для песчинки

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{m\omega^2 A^2}{2} = -\frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{mg^2}{2\omega^2};$$

5. После отрыва от пластины песчинки движутся только под действием силы тяжести

$$\frac{mv^2}{2} = mg(h - x) = mg\left(h - \frac{g}{4\pi^2\nu^2}\right);$$

6. Совместим уравнения законов сохранения

$$mg\left(h - \frac{g}{4\pi^2\nu^2}\right) - \frac{m4\pi^2\nu^2 A^2}{2} = \frac{mg^2}{8\pi^2\nu^2}; \quad \left(h - \frac{g}{\omega^2}\right) - \frac{\omega^2 A^2}{g} = \frac{g}{2\omega^2};$$

$$\frac{h\omega^2 - g}{\omega^2} - \frac{g}{2\omega^2} = \frac{\omega^2 A^2}{g};$$

$$A = \sqrt{\frac{g}{\omega^2}\left(\frac{h\omega^2 - g}{\omega^2} - \frac{g}{2\omega^2}\right)} = \frac{g}{\omega}\sqrt{\frac{2h}{g} - \frac{1}{\omega^2}};$$

---

349. Два шара, массой m каждый, соединены пружиной жёсткости k и расположены на гладкой горизонтальной поверхности. Определить период колебаний этой системы.

Решение

1. Шары колеблются около центра масс, являющегося одновременно и центром симметрии. В первом приближении можно считать, что каждый шар колеблется независимо от другого около центра масс на пружине равной половине её исходной длины. В этом случае жёсткость пружины увеличивается в два раза, т.е. $k^* = 2k$.

2. Уравнение второго закона Ньютона, идентичное для каждого шара, примет вид:

$$-k^* x = m\ddot{x}; \quad -2kx = m\ddot{x}; \quad \ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0,$$

получилось уравнение описывающее процесс гармонического движения.

3. Период колебаний системы шаров определится следующим образом:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0; \quad \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}};$$

---

350. Два шара массами m_1 и m_2 соединены пружиной жёсткости k. Определить период колебаний системы тел на гладкой горизонтальной поверхности после деформации пружины. Массу пружины и потери при движении не учитывать.

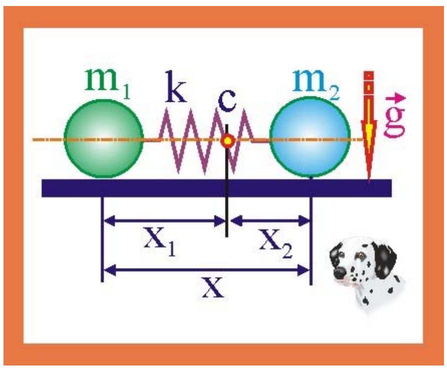


Рис. 350. Шары разной массы

Решение

1. Колебания шаров будут происходить относительно центра масс C, который в про-

цессе перемещения будет находиться в покое (теорема о движении центра масс системы). Если систему отсчёта совместить с центром первого шара массой m_1, то координаты точки с на выбранной оси определятся как:

$$x_C = \frac{m_2 x}{m_1 + m_2};$$

2. Колебания шаров будут независимы друг от друга и период их колебаний будет одинаковым:

$$T = T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k_1}}; \quad T = T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k_2}},$$

где k_1 и k_2 – жёсткости частей пружины длиной от центра масс до шаров.

3. Жёсткости частей пружины определим из условия обратной пропорциональности жёсткости длине пружины:

$$k_1 = k\frac{x}{x_C} = k\frac{m_1 + m_2}{m_2}; \quad k_2 = k\frac{m_1 + m_2}{m_1};$$

4. Период колебаний:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k_2}} = 2\pi\sqrt{k\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k_1}} = 2\pi\sqrt{k\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}},$$

введём обозначение приведённой массы системы ζ:

$$\zeta = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\zeta}{k}};$$

---

351. Невесомая штанга длиной x_1 одним концом закреплена в идеальном шарнире, другим опирается на пружину жёсткостью k. По штанге может перемещаться груз массой m. Определить зависимость периода колебаний штанги с грузом в зависимости от расстояния между центром масс груза и осью шарнира x_2.

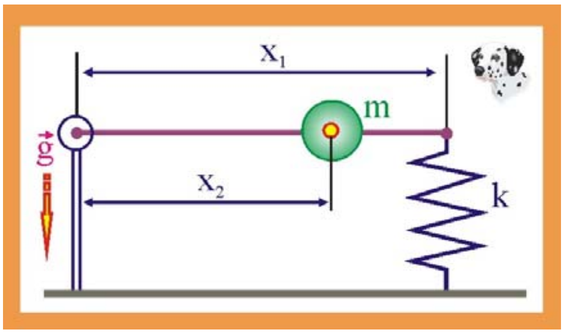


Рис. 351. Колебательная система

Решение

1. Пусть в произвольный момент времени t деформация пружины составила величину ζ, тогда закон сохранения энергии представится как:

$$\frac{k\zeta^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \text{const},$$

где v – скорость груза, которую можно определить как:

$$v = \frac{x_2}{x_1}\dot{\zeta};$$

2. Перепишем закон сохранения энергии с учётом значения скорости

$$\frac{k\zeta^2}{2} + \frac{m}{2}\frac{x_2^2}{x_1^2}\dot{\zeta}^2 = \text{const};$$

3. Продифференцируем уравнение по времени

$$\frac{2k\zeta\dot{\zeta}}{2} + \frac{m}{2}\frac{x_2^2}{x_1^2}2\dot{\zeta}\ddot{\zeta} = 0; \quad m\frac{x_2^2}{x_1^2}\ddot{\zeta} + k\zeta = 0$$

и перепишем уравнение, освободив старшую производную от коэффициента

$$\ddot{\zeta} + \frac{kx_1^2}{mx_2^2}\zeta = 0,$$

что приводит к дифференциальному уравнению, описывающему гармонические колебания с циклической частотой

$$\omega^2 = \frac{k}{m}\frac{x_1^2}{x_2^2}.$$

4. Период колебаний, таким образом, запишется как:

$$T = 2\pi\frac{x_2^2}{x_1^2}\sqrt{\frac{m}{k}};$$

---

352. Поршень массой m первоначально делит объём цилиндра с газом напополам. Поршень затем сдвигают влево, на расстояние x и отпускают. Полагая процесс изменения состояния газа изотермическим, определить циклическую частоту колебаний поршня.

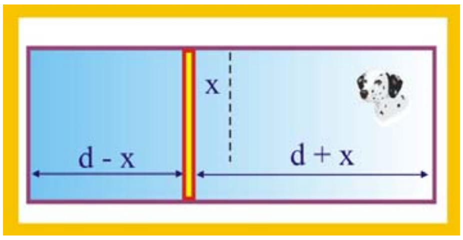


Рис. 352. Колебания поршня

Решение

1. При сдвигании поршня в левой части цилиндра давление увеличится, а в правой – уменьшится, что является причиной появления возрастающей силы и гармонических колебаний поршня.

2. Изменение состояния газа в данном случае подчиняется закону Бойля – Мариотта

$$p_1(d - x)s = p_2(d + x)s = psd;$$

3. Величина возвращающей силы:

$$F = (p_2 - p_1)s = -\frac{2pxsd}{d^2 - x^2} = -\frac{2pVx}{d^2 - x^2},$$

где V – половина объёма цилиндра.

4. Как видно, возвращающая сила не подчиняется закону Гука F = – kx, однако, если рассматривать малые смещения поршня x << d, то сила становится квазиупругой и возникающие колебания можно считать гармоническими

$$m\ddot{x} + \frac{2pV}{d^2}x = 0; \quad \ddot{x} + \frac{2pV}{md^2}x = 0;$$

$$\omega^2 = \frac{2pV}{md^2}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{md^2}{2pV}};$$

---

353. Тело массой m связано с двумя пружинами одинаковой жёсткости k, которые один раз соединяются праллельно, а второй – последовательно. В обоих случаях телу сообщается одинаковая скорость v. В каком отношении будут находиться амплитудs колебаний грузов без учёта трения и сопротивления?

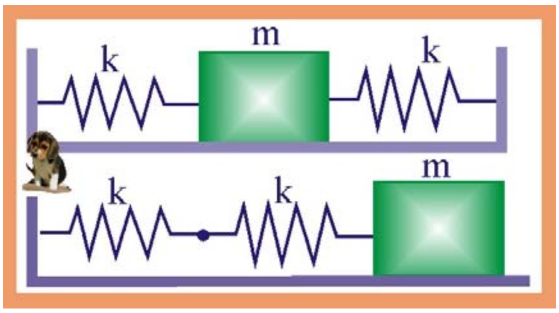


Рис.353. Отношение амплитуд

Решение

1. В первом случае пружины соединены параллельно, поэтому общая их жёсткость будет равна $k_1 = 2k$. Закон сохранения энергии представится следующим образом:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{2kA^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad A_1 = v\sqrt{\frac{2k}{m}};$$

2. При последовательном соединении пружин:

$$k_2 = \frac{k \cdot k}{k + k} = \frac{k}{2}; \quad \frac{mv^2}{2} = \frac{k_2A^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad A_2 = v\sqrt{\frac{k}{2m}};$$

3. Отношение амплитуд собственных колебаний:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{0,5}} = 2;$$

---

354. Материальная точка, совершая гармонические колебания между точками C и D, путь от O до D проходит за время τ_1. За какое время τ_2 точка проходит первую половину этого пути, если тоска O находится на середине отрезка CD? Какую среднюю скорость будет иметь точка на перемещении CD, если известнго амплитудное значение скорости v_m?

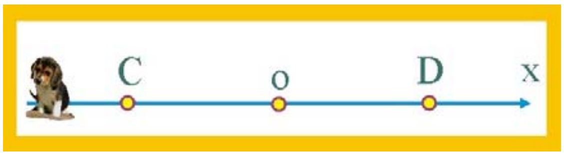


Рис. 354. Первая половина пути

Решение

1. Если принять, что в начальный момент времени колеблющаяся точка находится в O, то уравнение движения можно записать в виде:

$$x(t) = A\sin\omega t; \quad Oc = OD = A;$$

2. По условию задачи:

$$A\sin\omega\tau_1 = A; \quad \Rightarrow \quad \omega\tau_1 = \frac{\pi}{2}; \quad \omega = \frac{\pi}{2\tau_1};$$

3. Для первой половины пути OD:

$$A\sin\omega\tau_2 = \frac{A}{2}; \quad \sin\omega\tau_2 = \frac{1}{2}; \quad \omega\tau_2 = \arcsin\frac{1}{2}; \quad \Rightarrow \quad \omega\tau_2 = \frac{\pi}{6}; \quad \omega = \frac{\pi}{6\tau_2};$$

4. Время прохождения первой половины амплитуды

$$\frac{\pi}{2\tau_1} = \frac{\pi}{6\tau_2}; \quad \Rightarrow \quad \tau_2 = \frac{\tau_1}{3};$$

5. Расстояние OC = CD = A, время его прохождения соответствует $\tau = T/4$

$$< v >= \frac{4A}{T} = \frac{4A}{2\pi/\omega} = \frac{2A\omega}{\pi} = \frac{2v_m}{\pi} \approx 0,658v_m;$$

---

355. Движение материальной точки соответствует уравнению:

$$x(t) = 3\sin\omega t + 4\cos\omega t;$$

Является ли движение гармоническим? Определить амплитудное значение перемещения точки.

Решение

1. Заданное движение является результатом сложения двух колебаний происходящих вдоль одной оси

$$x(t) = A_1 \sin\frac{2\pi}{T}t + A_2 \cos\frac{2\pi}{T}t$$

и сдвинутых друг относительно друга по фазе на угол $\varphi = \pi/2$. Движение будет гармоническим с периодом $T = 2\pi/\omega$.

2. Амплитуда колебаний:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\varphi} = 5.$$

3. Уравнение движения, таким образом, можно записать в виде

$$x(t) = A\sin(\omega t + \alpha); \quad \cos\alpha = \frac{A_1}{A} = \frac{3}{5}; \quad \alpha = \arccos\frac{3}{5} \approx \frac{3\pi}{10};$$

$$x(t) = 5\sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{10}\right);$$

---

356. Две гладкие плоскости составляют двугранный угол. Левая плоскость наклонена под углом α к горизонту, правая – под углом β. Определить период колебаний шарика между плоскостями, если первоначально он находился на левой плоскости, на высоте h.

Решение

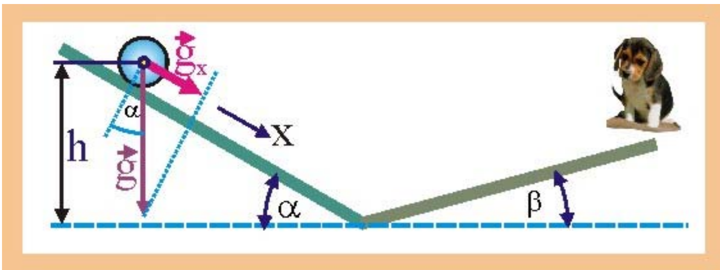


Рис. 356. Двугранный угол

1. В соответствии с законом сохранения энергии шарик будет подниматься при движении по обоим плоскостям на одинаковую высоту h.

2. Период колебаний шарика будет равен удвоенной сумме времён движения по плоскостям:

$$T = 2(t_\alpha + t_\beta);$$

3. Движение шарика по наклонным плоскостям будет протекать с ускорениями:

$$a_\alpha = g\sin\alpha; \quad a_\beta = g\sin\beta;$$

4. Уравнения движения шарика позволяет определить время его движения:

$$h = \frac{a_\alpha t_\alpha^2}{2} = \frac{g\sin\alpha t_\alpha^2}{2}; \quad \Rightarrow t_\alpha = \sqrt{\frac{2h}{g\sin\alpha}}; \quad t_\beta = \sqrt{\frac{2h}{g\sin\beta}};$$

5. Период колебаний шарика:

$$T = 2(t_\alpha + t_\beta) = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right);$$

---

357. Небольшой шарик массой m = 10 г колеблется на тонком невесомом стержне длиной ℓ = 1 м и обладает энергией E = 0,015 Дж. Можно ли считать колебания гармоническими? Какова амплитуда колебаний?

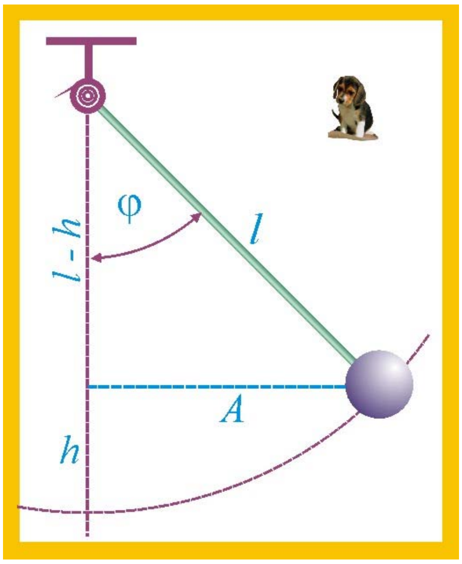


Рис. 357. Математический маятник

Решение

1. При отклонении стержня от вертикали на угол φ возникает восстанавливающая компонента силы тяжести, определяемая как:

$$F_g = -mg\sin\varphi .$$

2. При движении в сторону положения статического равновесия масса приобретает ускорение $\ell\ddot{\varphi}$, под действием силы инерции:

$$F_i = -m\ell\ddot{\varphi} .$$

3. Приравняем далее действующие на массу шарика силы:

$$m\ell\ddot{\varphi} + mg\sin\varphi = 0 ,$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\sin\varphi = 0 .$$

4. Введём традиционное обозначение:

$$\frac{g}{\ell} = \omega^2 ,$$

что даёт основание уравнение переписать следующим образом:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\sin\varphi = 0 .$$

5. Мы пришли к нелинейному дифференциальному уравнению, которое в принципе можно превратить в линейное уравнение, если рассматривать малые по амплитуде колебания. Действительно:

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \cdots \approx \varphi .$$

6. Таким образом, для малых колебаний становится справедливым линейное дифференциальное уравнение

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0 .$$

7. Определим, являются ли заданные колебания малыми, для чего определимся с амплитудой, используя закон сохранения энергии:

$$E = mgh; \quad h = \frac{E}{mg} \cong 0{,}15\text{м} ;$$

8. Амплитуда колебаний:

$$A = \ell\sin\varphi; \quad \varphi = \arccos\frac{\ell - h}{\ell} \approx 32^0; \quad A \approx 0{,}53\text{м} ;$$

9. Полученные значения угла отклонения не позволяют уравнение привести к линейному виду, колебания не будут при заданных условиях гармоническими.

---

358. Найти потенциальную энергию U математического маятника массы m при отклонении нити подвеса на угол α, при частоте его собственных колебаний ν.

Решение

1. За нулевой уровень потенциальной энергии целесообразно принять положение статического равновесия точечной массы маятника, в этом случае потенциальная энергия заданного положения определится как:

$$U = mgh = mg\ell(1 - \cos\alpha);$$

2. Неизвестную длину нити подвеса ℓ определим по заданной собственной частоте колебаний ν:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}; \quad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}; \quad \ell = \frac{g}{4\pi^2\nu^2};$$

3. Потенциальная энергия маятника:

$$U = \frac{mg^2(1 - \cos\alpha)}{4\pi^2\nu^2};$$

---

359. Доска длиной ℓ вначале с постоянной скоростью перемещалась по гладкой поверхности, которая внезапно стала шероховатой с коэффициентом трения μ. Найти время торможения доки τ до её полной остановки.

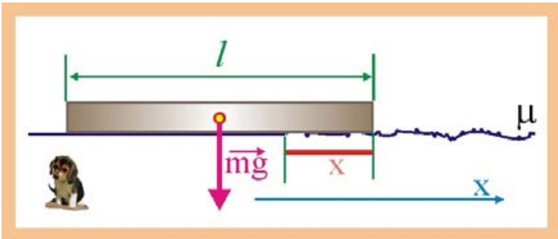


Рис 359. Время движения доски

Решение

1. Особенность движения доски заключается в том, что сила трения зависит от пройденного доской расстояния x по шероховатой поверхности. В обычной ситуации

$$F_\mu = \mu N = \mu mg,$$

в рассматриваемом же случае величина нормальной реакции связи N определяется тольк4о частью доски x, находящейся на шероховатой поверхности. При попадании на шероховатую поверхность движение становится ускоренным т.к. сила трения увеличивается – значит растёт и модуль ускорения.

2. Найдём нормальную реакцию связи участка доски протяжённостью x и соответствующую силу трения:

$$N_\zeta = mg\frac{x}{\ell}, \quad F_\mu = \mu N_x = \mu mg\frac{x}{\ell};$$

3. Уравнение второго закона Ньютона запишется следующим образом

$$m\ddot{x} = -\mu mg\frac{x}{\ell}; \quad m\ddot{x} + \mu mg\frac{x}{\ell} = 0; \quad \ddot{x} + \frac{\mu g}{\ell}x = 0;$$

4. Если ввести обозначение

$$\omega^2 = \frac{\mu g}{\ell},$$

то уравнение движения превращается в уравнение гармонических колебаний

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0; \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{\mu g}{\ell}}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\mu g}};$$

5. Начало движения по шероховатой поверхности будет соответствовать максимуму скорости. По аналогии с колебаниями смещение будет максимальным через четверть периода, при этом скорость станет равной нулю (крайние положения колеблющегося тела)

$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\ell}{\mu g}};$$

360. Изменится ли период колебаний математического маятника от того, что его поместили в гипотетическую жидкость, которая благодаря форме грузика не оказывает сопротивление его движению?

Решение

1. При отклонении стержня или нити математического маятника от вертикали в воздухе на угол φ возникает восстанавливающая компонента силы тяжести, определяемая как:

$$F_g = -mg\sin\varphi.$$

2. В жидкости, помимо силы тяжести необходимо учитывать и силу Архимеда, которая проявляется в воздухе весьма незначительно т.к. $\rho_{Воз} \cong 1{,}3$ кг/м^3, а плотность жидкостей $\rho_Ж >$ 600 кг/м^3, в этой связи возвращающая сила в первом приближении запишется следующим образом:

$$F = -mg\sin\alpha + \rho_Ж gV.$$

3. При движении в сторону положения статического равновесия масса, таким образом, приобретает ускорение меньшее, чем $\ell\ddot{\varphi}$.

$$F_i = -m\ell\ddot{\varphi}.$$

4. Циклическая частота в этом случае определится как:

$$\frac{a}{\ell} = \omega^2,$$

поскольку a < g, то

$$2\pi\sqrt{\frac{\ell}{a}} > 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

т.е. период колебаний в жидкости увеличится даже в отсутствии сопротивления.

361. Математический маятник, представляющий собой шарик массой m, подвешенный на нити длиной ℓ, помещён в электрическое поле плоского воздушного конденсатора с горизонтальными пластинами, заряженного до напряжения U. Расстояние между пластинами d. Определить период колебаний маятника, если грузику сообщили отрицательный заряд q.

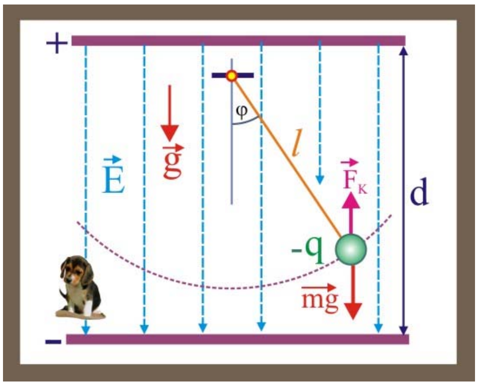


Рис. 361. Маятник в электрическом поле

Решение

1. Между обкладками конденсатора будет существовать электрическое поле напряжённостью E

$$E = \frac{U}{d};$$

2. Заряженный отрицательно маленький шарик, помещённый на нити в электрическое поле, находится под действием суммарной силы, состоящей из силы тяжести $m\vec{g}$ и силы Кулона $\vec{F}_К$. Закон ньютона в проекции на вертикальное направление запишется следующим образом

$$ma = mg - qE;$$

$$a = g - \frac{qE}{m} = g - \frac{qU}{md};$$

2. Период колебаний маятника определится как:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{a}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g - \frac{qU}{md}}};$$

---

362. Небольшая масса, надетая на гладкую горизонтальную спицу, прикреплена к двум невесомым пружинам, вторые концы которых заделаны в неподвижную стену так, что в положении равновесия массы пружины не деформированы. Найти период колебаний массы, если при её поочерёдном подвешивании к пружинам их удлинение составило Δx_1 и Δx_2.

Решение

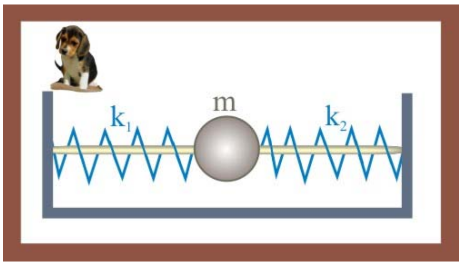


Рис. 362. Масса на спице

1. Жёсткости пружин:

$$mg = k_1\Delta x_1; \quad k_1 = \frac{mg}{\Delta x_1};$$

$$mg = k_2\Delta x_2; \quad k_2 = \frac{mg}{\Delta x_2};$$

2. Пружины соединены параллельно, поэтому их общая жёсткость равна сумме жёсткостей:

$$k_0 = k_1 + k_2 = mg\left(\frac{1}{\Delta x_1} + \frac{1}{\Delta x_2}\right) = mg\left(\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta x_1 \Delta x_2}\right);$$

3. Период колебаний массы:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_0}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta x_1 \Delta x_2}{g(\Delta x_1 + \Delta x_2)}};$$

---

363. Скорость некой материальной точки изменяется по закону:

$$\dot{x}(t) = 0{,}2\pi\cos(2\pi t), \text{ м/с};$$

Определить смещение точки, максимальное ускорение и пройденный путь через время τ = 5/12 с от начала колебаний.

Решение

1. По заданному уравнению скорости определим амплитуду колебаний:

$$A\omega = 0{,}2\pi; \quad A2\pi = 0{,}2\pi; \quad A = 0{,}1\text{м};$$

2. Смещение точки за время τ

$$x(\tau) = A\sin(2\pi\tau) = A\sin 0{,}83\pi \cong 0{,}1\sin 150^0 \cong 0{,}05\text{м};$$

3. Путь пройденный точкой:

$$T = \frac{\omega}{2\pi} = 1\text{с}; \quad \tau = \frac{5}{12}\text{с} = 0{,}42\text{с} > \frac{T}{2}; \quad \Rightarrow \quad s = F + x(\tau) \cong 0{,}15\text{м};$$

4. Амплитудное значение ускорения точки:

$$\ddot{x}(t) = \frac{d\dot{x}}{dt} = 0{,}4\pi^2\sin(2\pi t); \quad \ddot{x}_{max} = 0{,}4\pi^2 \approx 4\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

364. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний, записанное для единиц СИ, имеет вид: $0{,}2\ddot{x} + 0{,}8x = 0$; Определить период этих колебаний.

Решение

1. Преобразуем заданное уравнение:

$$\ddot{x} + 4x = 0; \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0; \quad \omega = 2\frac{рад}{с}; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 3{,}14с;$$

---

365. Колебания тела массой m = 10^{-2} кг протекают в соответствии с уравнением: $\ddot{x} + 0{,}64x = 0$; Найти решение этого уравнения, если полная энергия тела E = 0,02 Дж, и колебания начинаются из положения равновесия.

Решение

1. Определим коэффициент упругости колебательной системы, с учётом того, что $\omega^2 = 0{,}64\ с^{-2}$:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad k = \omega^2 m = 6{,}4\cdot 10^{-3}\frac{Н}{м};$$

2. Амплитуда колебаний:

$$\frac{kA^2}{2} = E; \quad A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = 2{,}5м;$$

3. Уравнение колебаний:

$$x(t) = A\sin\omega t = 2{,}5\sin(0{,}8t);$$

---

366. Математический маятник совершает малые гармонические колебания в соответствии с уравнением $\ddot{x} + 2{,}5x = 0$. Длина маятника ℓ = 1 м. В начальный момент времени маятник был отклонён на угол φ = 30^0 от вертикали. Найти зависимость x(t) для такого маятника.

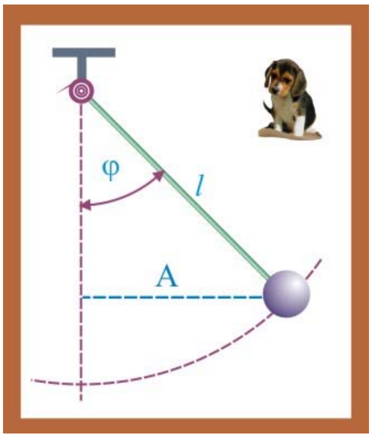


Рис. 366. Амплитуда колебаний

Решение

1. Амплитуда колебаний маятника определяется из прямоугольного треугольника:

$$A = \ell\sin\varphi = 0{,}5м;$$

2. Перепишем заданное уравнение:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0; \quad \omega = \sqrt{2{,}5} = 1{,}5\frac{рад}{с};$$

3. уравнение колебаний с учётом найденных значений циклической частоты и амплитуды:

$$x(t) = A\sin\omega t = 0{,}5\sin 1{,}5t;$$

---

367. Записать дифференциальное уравнение гармонических колебаний тела массой m = 0,1 кг, колеблющимся на пружине жёсткостью k = 20 Н/м.

Решение

1. Уравнение второго закона Ньютона в проекции на горизонтальную ось в общем виде для пружинного маятника имеет вид:

$$m\ddot{x} = -kx; \quad \Rightarrow \quad 0{,}1\ddot{x} + 20x = 0;$$

2. Решение уравнения:

$$x(t) = A\sin\omega t = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) = A\sin 5\cdot 10^{-3}t;$$

---

368. Математический маятник длины ℓ совершает малые гармонические колебания. Записать дифференциальное уравнение его колебаний.

Решение

1. Квадрат циклической частоты колебаний математического маятника:

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell};$$

2. Дифференциальное уравнение движения:

$$\ddot{x} + \frac{g}{\ell}x = 0;$$

---

369. Тело массой m = 2 кг совершает гармонические колебания с амплитудой A = 5 см. Записать дифференциальное уравнение колебаний, если полная энергия колебательной системы составляет E = 1 Дж.

Решение

1. Коэффициент упругости системы:

$$E = \frac{kA^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2E}{A^2} = \frac{2}{2{,}5\cdot 10^{-3}} = 800\frac{Н}{м};$$

2. Квадрат циклической частоты колебаний

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = 400c^{-1};$$

3. Дифференциальное уравнение колебаний:

$$\ddot{x} + 400x = 0;$$

---

370. Найти зависимость x(t) при гармонических колебаниях, если амплитудное значение ускорения $\ddot{x}_m$ = 50 см/с^2, частота колебаний ν = 0,5 Гц, смещение точки в начальный момент времени x_0 = 25 мм. Определить значение максимальной скорости. Записать дифференциальное уравнение колебаний.

Решение

1. Циклическая частота колебаний:

$$\omega = 2\pi\nu = 3{,}14c^{-1};$$

2. Амплитуда колебаний:

$$\ddot{x}_m = A\omega^2; \quad A = \frac{\ddot{x}_m}{\omega^2} \approx 0{,}05м;$$

3. Максимальное значение скорости:

$$\dot{x}_m = A\omega = 0{,}157\frac{м}{с};$$

4. С учётом значения x_0 и A зависимость x(t) будем искать в виде

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi),$$

при t = 0

$$x_0 = A\cos\varphi; \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arccos\frac{x_0}{A} = \frac{\pi}{3}; \quad x(t) = 0{,}05\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right);$$

5. Дифференциальное уравнение колебаний:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0; \quad \ddot{x} + \pi^2 x = 0;$$

---

371. Какова длина математического маятника, совершающего колебания по закону: $x(t) = 4\cdot 10^{-3}\cos(2t + 0{,}8)$?

Решение

1. Циклическая частота и период колебаний:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = 3{,}14с;$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = \pi; \quad \sqrt{\frac{\ell}{g}} = 0{,}5; \quad \Rightarrow \quad \ell \approx 2{,}5м;$$

---

372. Маятник с периодом T_1 = 1 с представляет собой металлический шарик массой m = 16 г, подвешенный на диэлектрической нити. Шарик несёт отрицательный заряд. Маятник помещают в электрическое поле, вектор напряжённости которого направлен вертикально вверх. В электрическом поле период колебаний стал равным T_2 = 0,8 с. Определить модуль силы, действующей на шарик со стороны электрического поля.

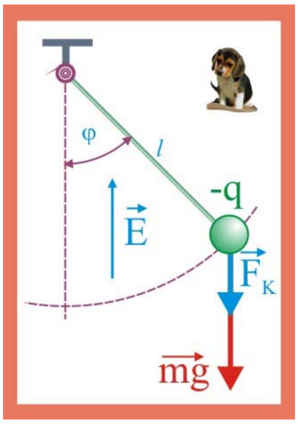


Рис. 372. Маятник в электрическом поле

Решение

1. Сила Кулона $\vec{F}_K$ в данном случае направлена вертикально вниз (шарик заряжен отрицательно), поэтому сообщает шарику дополнительное ускорение. Периоды колебаний маятника в отсутствии поля и при его наличии запишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}; \\ T_2 &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g+a}}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \frac{g+a}{g}; \quad a \approx 5{,}62\frac{м}{с^2};$$

2. Модуль силы Кулона: $\vec{F}_K = ma \approx 0{,}09Н$.

---

373. Как изменится ход маятниковых часов за τ = 1 час, если их поместить в однородное, направленное вниз, электрическое поле напряжённостью E = 20 кВ/м, а маятнику сообщить положительный заряд q = 30 нКл? Масса маятника m = 100 г.

Решение

1. Сила Кулона, действующая на заряженный груз маятника:

$$F_K = qE = 3\cdot 10^{-7}\cdot 2\cdot 10^{4} = 6\cdot 10^{-4}\,Н;$$

2. Сила Кулона, направленная вертикально вниз, сообщит грузику дополнительное ускорение:

$$a = \frac{F_K}{m} = \frac{6\cdot 10^{-4}}{0,1} = 6\cdot 10^{-3}\,\frac{м}{с^2};$$

3. Отношение периодов колебаний маятника в отсутствии поля и при его наличии:

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}; \\ T_2 &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g+a}}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \frac{g+a}{g}; \quad T_1 \approx 1{,}003T_2;\,;$$

4. Разность периодов:

$$\Delta T = T_1 - T_2 = 3\cdot 10^{-3}\,с.$$

5. Период колебаний маятника в электрическом поле будет меньше, поэтому часы будут уходить вперёд за час на время Δt

$$\Delta t = \Delta T\tau = 3\cdot 10^{-3}\cdot 3600 \approx 10{,}8с;$$

---

374. Математический маятник, длина подвеса которого ℓ, помещён в однородное электрическое поле напряжённостью E. Грузику маятника массой m сообщён заряд q. Определить величину заряда, при котором периоды колебаний маятника в поле и его отсутствии будут одинаковы.

Решение

1. Чтобы такая ситуация сложилась, необходимо, чтобы сила Кулона, действующая на шарик «компенсировала» силу тяжести и сообщала шарику ускорение, равное по модулю ускорению силы тяжести. Это может состояться, если маятник поместить в вертикальное электрическое поле, чтобы сила Кулона была направлена в сторону, противоположную силе тяжести и в два раза превосходила её по модулю

$$\left|\vec{F}_K\right| = 2\left|m\vec{g}\right|; \quad qE = 2mg; \quad \Rightarrow \quad q = \frac{2mg}{E};$$

---

375. Маятник представляет собой стальной шарик массой m = 5 г, подвешенный на нити. Период колебаний маятника T_1 = 1 с. Когда под шариком поместили магнит, то период его колебаний стал равным T_2 = 0,8 с. Определить силу притяжения шарика к магниту.

Решение

1. Сила притяжения определяется дополнительным ускорением, сообщаемым шарику магнитным полем:

$$F = ma;$$

2. Ускорение определим, сравнивая периоды колебаний маятника:

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}; \\ T_2 &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g+a}}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \frac{g+a}{g}; \quad \left(\frac{1}{0{,}8}\right)^2 g - g = a; \quad a \approx 5{,}6\frac{м}{с^2};$$

3. Сила притяжения магнита:

$$F = ma = 5\cdot 10^{-3}\cdot 5{,}6 \approx 0{,}03Н.$$

---

376. Длина математического маятника ℓ = 24 см. Маятник запускают, отклонив на угол φ_0 = 14^0. Определить угол отклонения маятника в моменты времени: τ_1 = 0,25 с; τ_2 = 1,6 с; τ_3 = 5 с от начала колебаний.

Решение

1. Циклическая частота маятника:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \approx 6{,}4\frac{рад}{с};$$

2. Амплитуда, соответствующая отклонению $\varphi_0 = 14^0$:

$$\frac{A}{\ell} = \sin\varphi_0; \quad \Rightarrow \quad A = \ell\sin\varphi_0 \approx 5{,}8\cdot 10^{-2}м;$$

3. В начальный момент времени отклонение маятника максимально, поэтому смещение подчиняется закону косинуса:

$$x(t) = A\cos\omega t,$$

для момента времени τ_1:

$$x_1(\tau_1) = A\cos\omega\tau_1 = 5{,}8\cdot 10^{-2}\cos(6{,}4\cdot 0{,}25) \approx -1{,}7\cdot 10^{-3}м,$$

угол φ_1, соответствующий отклонению $x_1(\tau_1)$

$$\varphi_1 = \arcsin\frac{x_1(\tau_1)}{\ell} = -\arcsin\frac{1{,}7\cdot 10^{-3}}{0{,}24} \cong -0{,}4^0;$$

4. Угол отклонения при τ_2:

$$x_2(\tau_2) = A\cos\omega\tau_2 = 5{,}8\cdot 10^{-2}\cos(6{,}4\cdot 1{,}6) \approx -4\cdot 10^{-2}м,$$

$$\varphi_2 = \arcsin\frac{x_2(\tau_2)}{\ell} = -\arcsin\frac{4\cdot 10^{-2}}{0{,}24} \cong -9{,}6^0;$$

5. Угол отклонения при τ_3:

$$x_3(\tau_3) = A\cos\omega\tau_3 = 5{,}8\cdot 10^{-2}\cos(6{,}4\cdot 5) \approx 4{,}8\cdot 10^{-2}м,$$

$$\varphi_2 = \arcsin\frac{x_2(\tau_2)}{\ell} = \arcsin\frac{4{,}8\cdot 10^{-2}}{0{,}24} \cong 11{,}6^0;$$

---

377. Математический маятник отклонили на угол φ = 5^0. Найти скорость шарика в момент прохождения им положения равновесия, если циклическая частота колебаний ω = 2 рад/с.

Решение

1. Длина нити полвеса маятника:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}; \quad \ell = \frac{g}{\omega^2} \cong 2{,}5м;$$

2. Высота подъёма грузика маятника над уровнем нулевой потенциальной энергии:

$$h = \ell(1 - \cos\varphi) \cong 0{,}01\text{м};$$

3. В момент прохождения грузиком маятника положения статического равновесия его потенциальная энергия будет равна нулю, а кинетическая энергия принимает максимальное значение. В соответствии с законом сохранения механической энергии:

$$\frac{mv_m^2}{2} = mgh; \quad \Rightarrow \quad v_m = \sqrt{2gh} \cong 0{,}44\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

---

378. Маятник массой m = 25 г отклонён от положения равновесия, при этом модуль силы натяжения нити равен T = 0,2 Н. Определить модуль квазиупругой силы.

Решение

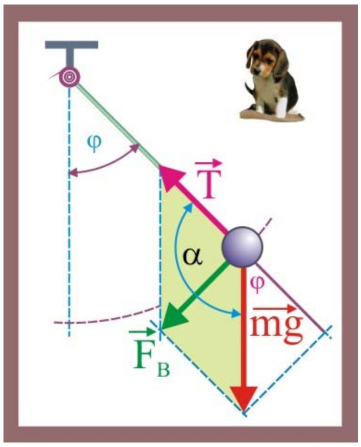


Рис. 378. Возвращающая сила

1. В данном случае квазиупругая сила является одновременно и возвращающей силой, которая определяется в виде геометрической суммы силы тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения $\vec{T}$.

2. Модуль возвращающей силы определится, как диагональ параллелограмма, построенного на модуле силы натяжения и модуле силы тяжести, кроме того из прямоугольного треугольника, вектор силы тяжести в котором является диагональю:

$$|\vec{F}_B| = mg\sin\varphi;$$

3. Угол отклонения полвеса маятника φ определяется условием:

$$T = mg\cos\varphi; \quad \varphi = \arccos\frac{T}{mg} \approx 37^0;$$

4. Модуль возвращающей силы:

$$|\vec{F}_B| = mg\sin\varphi = 2{,}5\cdot10^{-2}\cdot9{,}8\cdot\cos37^0 \approx 0{,}147\text{Н};$$

---

379. Маятник массой m = 102 г отклоняется от положения равновесия на угол φ = 30^0. Определить модули возвращающей силы и натяжения нити.

Решение

1. Натяжение нити подвеса (рис. 378):

$$T = mg\cos\varphi = 0{,}102\cdot9{,}8\cdot\cos30^0 \approx 0{,}865\text{Н};$$

2. Модуль возвращающей силы:

$$|\vec{F}_B| = mg\sin\varphi \cong 0{,}5\text{Н};$$

---

380. При угле отклонения φ_1 = 15^0, сила, возвращающая маятник в положение равновесия, равна F_1 = 1 Н. Чему равна эта сила при φ_2 = 35^0?

Решение

$$F_1 = mg\sin\varphi_1; \quad mg = \frac{F_1}{\sin\varphi_1}; \quad F_2 = mg\sin\varphi_2 = \frac{F_1\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1} \approx 2{,}2\text{Н};$$

---

381. Математический маятник представляет собой стальной шарик радиусом r = 2 см, подвешенный на нити длиной ℓ = 243 см. Он совершает колебания с амплитудой A = 10 см. Определить скорость шарика при прохождении им положения равновесия и наибольшее значение модуля возвращающей силы.

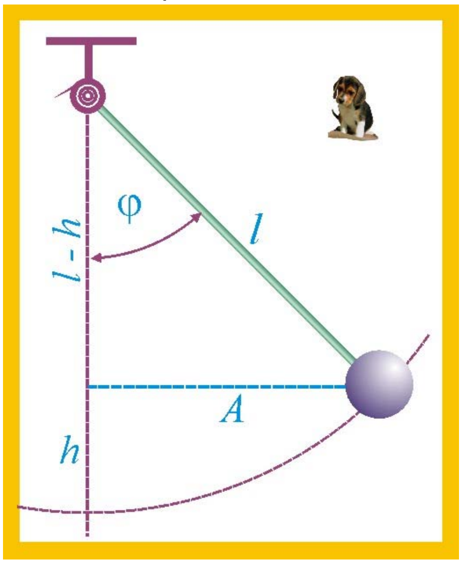


Рис. 381. Математический маятник

Решение

1. Масса колеблющегося шарика:

$$m = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 \approx 7800\cdot 4\cdot 8\cdot 10^{-6} \approx 0{,}25\text{кг};$$

2. Угол отклонения нити подвеса маятника:

$$\varphi = \arcsin\frac{A}{\ell} \approx 2{,}35^0;$$

3. Высота подъёма шарика над уровнем нулевой потенциальной энергии

$$h = \ell(1-\cos\varphi) \approx 2{,}2\cdot 10^{-3}\text{м};$$

4. Закон сохранения энергии для математического маятника:

$$mgh = \frac{mv_m^2}{2}; \quad v_m = \sqrt{2gh} \approx 0{,}2\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

5. Модуль возвращающей силы:

$$\left|\vec{F}_B\right| = mg\sin\varphi = 0{,}25\cdot 9{,}8\cdot 0{,}041 \approx 0{,}1\text{Н};$$

---

382. Математический маятник длиной ℓ = 0,98 м совершает гармонические колебания. Какое расстояние от положения равновесия должен пройти по дуге центр тяжести маятника, чтобы его ускорение стало равным a = 0,3 м/с^2.

Решение

1. Циклическая частота колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \approx 3{,}16\frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

2. Центр масс движется по круговой траектории, ускорение будет нормальным, что позволяет смещение центра масс от положения равновесия записать следующим образом:

$$a_n = x\omega^2; \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a_n}{\omega^2} \approx 0{,}03\text{м};$$

3. Угловое перемещение, соответствующее смещению x, (рис. 381):

$$\varphi = \arcsin\frac{x}{\ell} \approx 1{,}72^0;$$

4. Длина дуги, соответствующая угловому перемещению φ:

$$\breve{s} = \frac{\pi\ell\varphi}{180} \approx 0{,}0297\text{м} \approx 3\text{см};$$

---

383. Маятник массой m = 5 кг, имеющий длину ℓ = 0,8 м, совершает колебательное движение с амплитудой A = 0,4 м. Найти скорость движения маятника, когда он пройдёт путь $\breve{s}$ = 0,1 м от положения равновесия, и наибольшую силу натяжения нити.

Решение

1. Циклическая частота колебаний маятника

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} = 3{,}5\frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

2. Амплитудный угол отклонения нити подвеса маятника:

$$\varphi_m = \arcsin\frac{A}{\ell} = \arcsin\frac{0{,}4}{0{,}8} = 30^0;$$

3. Максимальная высота подъёма центра масс над нулевым уровнем потенциальной энергии:

$$H = \ell(1 - \cos\varphi_m) \approx 0{,}1\text{м};$$

4. Амплитудное значение квадрата скорости массы в момент прохождения положения статического равновесия:

$$v_m^2 = 2gH;;$$

5. Максимальная сила натяжения нити будет иметь место в момент прохождения массы положения статического равновесия

$$T_m = m(g + a_n) = m\left(g + \frac{v_m^2}{\ell}\right) = m\left(g + \frac{2gH}{\ell}\right) \approx 61{,}25\ \text{Н};$$

6. Угол отклонения нити подвеса в момент прохождения расстояния $\breve{s}$:

$$\breve{s} = \frac{\pi\ell\varphi_s}{180}; \quad \varphi_s = \frac{180\breve{s}}{\pi\ell} \approx 7{,}2^0;$$

7. Высота подъёма над нулевым уровнем потенциальной энергии:

$$h = \ell(1 - \cos\varphi_s) \approx 6{,}4\cdot 10^{-3}\text{м};$$

8. Кинетическая энергия маятника при прохождении им расстояния $\breve{s}$ будет равна разности потенциальных энергий:

$$K_s = U_m - U_s = mg(H - h) \approx 4{,}6\ \text{Дж};$$

9. Скорость маятника в заданной точке траектории:

$$v_s = \sqrt{\frac{2K_s}{m}} \approx 1{,}35\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

---

384. Маятник, представляющий собой груз массой m = 5 кг, подвешенный на нерастяжимой невесомой нити длиной ℓ = 1 м, совершает колебания с амплитудой A = 0,5 м. Найти горизонтальное смещение маятника от положения равновесия в момент, когда его скорость v_1 = 1,5 м/с.

Решение

1. Амплитудное значение угла отклонения нити маятника:

$$\varphi_m = \arcsin\frac{A}{\ell} = 30^0;$$

2. Максимальное значение высоты подъёма центра масс над нулевым уровнем потенциальной энергии:

$$H = \ell(1 - \cos\varphi_m) \approx 0{,}134 \text{ м}.$$

3. Квадрат максимальной скорости маятника при прохождении им положения равновесия:

$$v_m^2 = 2gH\,;$$

4. Разность максимального значения кинетической энергии и энергии в заданной точке траектории маятника равна его потенциальной энергии в этой точке:

$$\Delta K = K_m - K_1 = U_1 = \frac{m}{2}\left(2gH - v_1^2\right) \approx 0{,}925 \text{ Дж}\,;$$

5. Высота подъёма центра масс над нулевым уровнем потенциальной энергии при скорости v_1

$$U_1 = mgh; \quad h = \frac{U_1}{mg} \approx 0{,}0188 \text{ м};$$

6. Угол отклонения нити маятника при скорости v_1:

$$h = \ell(1 - \cos\varphi_1); \quad \varphi_1 = \arccos\left(1 - \frac{h}{\ell}\right) \approx 11{,}2^0\,;$$

7. Горизонтальное смещение груза маятника в момент достижения им скорости v_1:

$$x_1 = \ell \sin\varphi_1 \approx 0{,}193 \text{ м}\,;$$

---

385. Математический маятник, длина которого ℓ = 1,6 м, совершает гармонические колебания. Определить ускорение груза маятника при его смещении из положения равновесия x = 8 см.

Решение

1. Квадрат циклической частоты колебаний маятника:

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell};$$

2. Нормальное ускорение a_n при горизонтальном смещении x:

$$a_n = \omega^2 x = 0{,}49\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

---

386. Математический маятник массой m, совершающий колебания с амплитудой A, обладает энергией W. Определить частоту колебаний и длину нити подвеса. Изменится ли энергия колебаний, если амплитуду увеличить вдвое, а частоту уменьшить вдвое?

Решение

1. Определим амплитудное значение скорости маятника:

$$W = \frac{mv_m^2}{2}; \quad v_m = \sqrt{\frac{2W}{m}}\,;$$

2. Циклическая частота колебаний:

$$v_m = \omega A; \quad \omega = \frac{1}{A}v_m = \frac{1}{A}\sqrt{\frac{2W}{m}}\,;$$

3. Частота колебаний:

$$\omega = 2\pi\nu; \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi A}\sqrt{\frac{2W}{m}} = \frac{1}{\pi A}\sqrt{\frac{W}{2m}};$$

4. Длина маятника:

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell}; \quad \ell = \frac{g}{\omega^2} = \frac{mgA^2}{2W};$$

5. Энергия колебаний при синхронном уменьшении амплитуды и увеличении частоты не изменится, потому что:

$$2\pi\nu = \frac{1}{A}\sqrt{\frac{2W}{m}}; \quad \Rightarrow \quad W = 2\pi^2 A^2 \nu^2 m;$$

---

387. Шарик подвешен на длинной нити. Первый раз его поднимают по вертикали до точки подвеса, второй раз отклоняют на угол $\pi/2$. В каком случае шарик быстрее достигнет положения равновесия, если его отпустить?

Решение

1. При падении шарика, с длиной нити подвеса ℓ вертикально вниз:

$$\ell = \frac{g\tau_1^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad \tau_1 = \sqrt{\frac{2\ell}{g}};$$

2. При движении шарика в режиме колебаний, до статического положения равновесия он будет в пути T/4

$$\tau_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\ell}{g}} = \sqrt{\frac{\pi^2\ell}{4g}};$$

3. Отношение времён движения:

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \sqrt{\frac{\pi^2}{8}} \approx 1{,}1$$

---

388. Маятник состоит из тяжёлого шарика массой m = 0,1 кг, подвешенного на нити длиной ℓ = 0,5 м. Определить период колебаний маятника и запас энергии, которым он обладает, если наибольший угол его отклонения от положения равновесия составляет $\varphi = 30^0$.

Решение

1. Период колебаний маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \approx 1{,}42c;$$

2. Высота подъема шарика относительно нулевого уровня потенциальной энергии:

$$h = \ell(1 - \cos\varphi) = 0{,}067\text{м};$$

3. Потенциальная энергия шарика при отклонении нити подвеса маятника на угол $\varphi = 30^0$:

$$U = mgh \approx 0{,}066\ \text{Дж};$$

---

389. Маятник состоит из тяжёлого шарика массой m, подвешенного на нити длиной ℓ. Определить величину полной энергии, которой обладает маятник, пни отклонении нити подвеса на угол α. какова будет максимальная скорость движения маятника?

Решение

1. Высота подъема центра масс шарика относительно нулевого уровня потенциальной энергии:

$$h = \ell(1 - \cos\alpha);$$

2. Максимальная механическая энергия шарика:

$$W = U_m = mgh = mg\ell(1 - \cos\alpha);$$

3. Максимальная скорость маятника в момент прохождения грузиком положения статического равновесия:

$$\frac{mv_m^2}{2} = mgh; \quad v_m = \sqrt{2g\ell(1 - \cos\alpha)};$$

---

390. Математический маятник длиной ℓ = 1 м отклонён от положения равновесия на угол $\varphi = 30^0$. Определить приращение потенциальной энергии маятника, если его вес равен P = 1 Н. Найти наибольшую скорость маятника.

Решение

1. Высота подъема центра масс шарика относительно нулевого уровня потенциальной энергии:

$$h = \ell(1 - \cos\varphi) \approx 0{,}134\text{м.};$$

2. Приращение потенциальной энергии:

$$\Delta U = Ph = 0{,}134\text{Дж};$$

3. Наибольшая скорость маятника:

$$\frac{mv_m^2}{2} = mgh; \quad v_m = \sqrt{2gh} \approx 1{,}62\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

---

391. Грузик массой $m = 10^{-2}$ кг колеблется на нити длиной ℓ = 1 м и обладает энергией W = 0,015 Дж. Определить амплитуду колебаний.

Решение

1. Из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_m^2}{2} = W; \quad v_m = \sqrt{\frac{2W}{m}}; \quad \omega A = \sqrt{\frac{2W}{m}}; \quad A = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\sqrt{\frac{2W}{m}};$$

$$A = \sqrt{\frac{2W\ell}{mg}} \approx 0{,}55\text{м};$$

---

392. Маятник, представляющий собой шарик массой m = 2 кг, подвешенный на нити длиной ℓ = 1 м, совершает гармонические колебания с амплитудой A = 0,6 м. Найти значение кинетической энергии маятника в момент прохождения им положения статического равновесия и при смещении от положения равновесия на x = 0,4 м.

Решение

1. Угол отклонения нити при смещении A:

$$\varphi_m = \arcsin(A/\ell) \approx 37^0;$$

2. Высота подъема центра масс шарика относительно нулевого уровня потенциальной энергии при смещении шарика на расстояние A:

$$h = \ell\left(1 - \cos 37^0\right) \approx 0{,}2\text{м.};$$

3. Максимальное значение потенциальной энергии равно максимальному значению кинетической энергии:

$$U_m = K_m = mgh \approx 3{,}92\text{Дж};$$

4. Угол отклонения нити при смещении шарика на расстояние x:

$$\varphi_1 = \arcsin\left(x/\ell\right) \approx 23{,}5^0;$$

5. Высота подъема центра масс шарика относительно нулевого уровня потенциальной энергии при смещении шарика на расстояние A:

$$h_1 = \ell\left(1 - \cos 23{,}5^0\right) \approx 0{,}083\text{м};$$

6. Потенциальная энергия шарика при его смещении на расстояние x:

$$U_1 = mgh_1 \approx 1{,}62\text{Дж};$$

7. Кинетическая энергия при смещении шарика на расстояние x будет равна разности потенциальных энергий

$$K_1 = \Delta U = U_m - U_1 \approx 2{,}3\text{Дж};$$

---

393. Маятник, представляющий собой груз, подвешенный на невесомой нити длиной ℓ = 0,5 м, совершает колебательное движение с амплитудой A = 0,5 м, при этом максимальная сила натяжения подвеса равна T_m = 100 Н. Определить массу груза.

Решение

1. Квадрат циклической частоты колебаний:

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell};$$

2. Максимальное значение нормального (центростремительного) ускорения:

$$a_n = A\omega^2;$$

3. Максимальная сила натяжения нити подвеса при прохождении положения сатанического равновесия:

$$T_m = m\left(g + a_n\right); \quad m = \frac{T_m}{g + a_n} \approx 6{,}8\text{Н};$$

---

394. Маятник, представляющий собой груз массой m = 5 кг, подвешенный на невесомой нити длиной ℓ = 1 м, колеблется с амплитудой A = 0,5 м. Найти горизонтальное смещение маятника от положения равновесия в момент, когда скорость маятника v = 1,5 м/с.

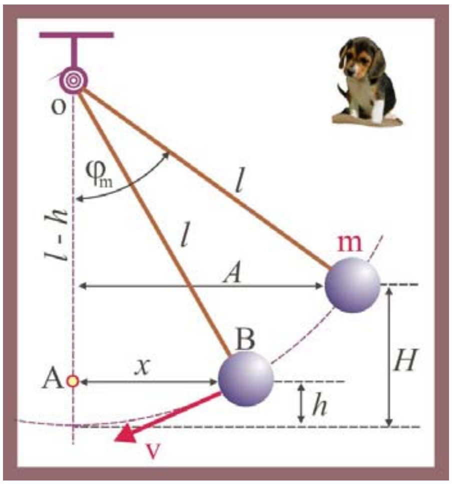


Рис. 394. Горизонтальное смещение маятника

Решение

1. Максимальный угол отклонения нити подвеса маятника φ_m:

$$\varphi_m = \arcsin\frac{A}{\ell} = 30^0;$$

2. Высота подъёма центра масс груза над нулевым уровнем потенциальной энергии:

$$H = \ell(1 - \cos\varphi_m) \approx 0{,}134\text{м};$$

3. Максимальное значение потенциальной энергии груза:

$$U_m = mgH \approx 6{,}57\text{Дж};$$

4. Кинетическая энергия груза при скорости v:

$$K_1 = \frac{mv^2}{2} \approx 5{,}62\text{Дж};$$

5. Потенциальная энергия маятника при его смещении по горизонтали x:

$$U_1 = U_m - K_1 \approx 0{,}941\text{Дж};$$

6. Высота подъёма центра масс груза h при искомом смещении x:

$$U_1 = mgh; \quad h = \frac{U_1}{mg} \approx 0{,}02\text{м};$$

7. Из прямоугольного треугольника OAB (рис. 394):

$$x = \sqrt{\ell^2 - (\ell - h)^2} \approx 0{,}19\text{м};$$

---

395. Определить массу пружинного маятника, если период его колебаний равен T = 0,2 с, а жёсткость пружины k = 200 Н/м.

Решение

1. Масса, при невесомой пружине определяется из уравнения периода:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}; \quad \Rightarrow \quad m = \frac{kT^2}{4\pi^2} = 0{,}2\text{кг};$$

---

396. Груз массой m = 0,2 кг, подвешенный на невесомой пружине, совершает N = 30 колебаний в минуту. Определить жёсткость пружины.

Решение

1. Период колебаний маятника:

$$T = \frac{60}{N} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}; \quad k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4\pi^2 mN^2}{3{,}6\cdot 10^3} \approx 2\frac{\text{Н}}{\text{м}};$$

---

397. Груз массой m = 0,2 кг совершает колебания на пружине с жёсткостью k = 500 Н/м с амплитудой A = 8 см. Записать уравнение колебаний.

Решение

1. Циклическая частота колебаний маятника:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 50\frac{\text{рад}}{\text{с}} \approx 16\pi\frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

2. Уравнение колебаний в СИ:

$$x(t) = 8\cdot 10^{-2}\cos(16\pi t);$$

---

398. За какое время τ тело массой m = 3,6 кг совершит N = 20 колебаний на пружине жёсткостью k = 10 Н/м?

Решение

1. Период колебаний тела:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 3{,}8c;$$

2. Время, в течение которого произойдут N колебаний:

$$\tau = NT \approx 75{,}4;$$

---

399. Медный шарик (ρ_{Cu} = 8,9·10^3 кг/м^3), подвешенный к пружине, совершает вертикальные гармонические колебания. Как изменится период колебаний, если к пружине подвесить шарик прежнего радиуса, выполненный из алюминия (ρ_{Al} = 2,7 10^3 кг/м^3)?

Решение

1. Отношение периодов колебаний маятников:

$$\left.\begin{aligned} T_{Cu} &= 2\pi\sqrt{\frac{4\pi r^3\rho_{Cu}}{3k}}; \\ T_{Al} &= 2\pi\sqrt{\frac{4\pi r^3\rho_{Al}}{3k}}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{T_{Cu}}{T_{Al}} = \sqrt{\frac{\rho_{Cu}}{\rho_{Al}}} \approx 1{,}8;$$

---

400. Пружина под действием груза удлинилась на Δx = 9,8 см. Определить период собственных колебаний этого груза на пружине.

Решение

1. Условие статического равновесия груза на пружине позволяет найти период колебаний:

$$k\Delta x = mg; \quad \frac{m}{k} = \frac{\Delta x}{g}; \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta x}{g}} \approx 0{,}628c;$$

---

401. Пружина с грузом совершает гармонические колебания с периодом T = 0,6 с. Чему равно удлинение пружины в состоянии статического равновесия?

Решение

1. Условие статического равновесия груза на пружине позволяет найти период колебаний:

$$k\Delta x = mg; \quad \frac{m}{k} = \frac{\Delta x}{g}; \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta x}{g}}; \quad \Delta x = \frac{T^2 g}{4\pi^2} \approx 0{,}088\text{м};$$

---

402. Определить массу груза, совершающего гармонические колебания в вертикальном направлении на невесомой пружине с коэффициентом жёсткости k = 18 Н/м, если при смещении на Δx = 2 см ускорение груза a = 3 м/с^2.

Решение

1. Величина силы упругости (возвращающей силы) в статическом состоя-

нии при подвешивании к ней груза массы m:

$$F_k = k\Delta x;$$

2. Ускорение, сообщаемое массе возвращающей силой:

$$a = \frac{F_k}{m}; \quad \Rightarrow \quad m = \frac{F_k}{a} = \frac{k\Delta x}{a} \cong 0{,}12\,\text{кг};$$

---

403. Шарик массой m = 0,2 кг, закреплённый на пружине жёсткостью k = 200 Н/м, совершает гармонические колебания. Найти зависимость ускорения шарика от его смещения их положения равновесия.

Решение

1. Квадрат циклической частоты колебаний:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = 10^3\,\text{с}^{-2};$$

2. Зависимость смещения, скорости и ускорения от времени:

$$x(t) = A\sin\omega t; \quad \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega t; \quad \ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin\omega t;$$

3. Зависимость ускорения от времени:

$$\ddot{x}(x) = -\omega^2 x(t) = -1000x(t);$$

---

404. Определить массу груза, колеблющегося на невесомой пружине, жёсткость которой k = 16 Н/м, если амплитуда колебаний A = 2 см, а скорость в момент прохождения положения равновесия v_m = 0,4 м/с.

Решение

1. Циклическая частота колебаний:

$$v_m = \omega A; \quad \omega = \frac{v_m}{A} = 20\,\frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

2. Масса колеблющегося груза:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad \Rightarrow \quad m = \frac{k}{\omega^2} = 4\cdot 10^{-2}\,\text{кг};$$

---

405. Шарик массой m = 0,1 кг колеблется на пружине с жёсткостью k = 10 Н/м. Найти смещение шарика от положения равновесия в момент, когда его ускорение равно $\ddot{x}$ = 4 м/с^2.

Решение

1. Квадрат циклической частоты колебаний

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = 10^2\,\text{с}^{-2};$$

2. Смещение шарика при заданном ускорении:

$$\ddot{x} = \omega^2 x; \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\ddot{x}}{\omega} = 4\cdot 10^{-2}\,\text{м};$$

---

406. Висящий на невесомой пружине груз, совершает вертикальные колебания с амплитудой А = 4 см. Найти энергию гармонического колебания груза, если для удлинения пружины на Δx = 1 см требуется сила F = 0,1 Н.

Решение

1. Коэффициент упругости пружины k:

$$|F| = k\Delta x; \quad \Rightarrow \quad k = \frac{F}{\Delta x} = 10\frac{Н}{м};$$

2. Максимальное значение потенциальной энергии пружины будет равно полной механической энергии колебательной системы:

$$U_m = K_m = \frac{kA^2}{2} = 8\cdot 10^{-3}\,Дж;$$

---

407. Гиря, подвешенная на пружине жёсткостью k = 980 Н/м, колеблется с амплитудой А = 3 см. Найти максимальное значение кинетической энергии колеблющейся гири.

Решение

1. В колебательной системе без потерь (свободные собственные гармонические колебания) максимальное значение кинетической энергии, в соответствии с законом сохранения механической энергии, равно максимальному значению потенциальной энергии, имеющему место при амплитудном смещении:

$$U_m = K_m = \frac{kA^2}{2} = \frac{980\cdot 9\cdot 10^{-4}}{2} = 0{,}441\,Дж;$$

---

408. Максимальная потенциальная энергия тела массой m = 0,4 кг, совершающего гармонические колебания на пружине, равна $U_m = 3{,}2\cdot 10^{-2}$ Дж. Определить скорость колеблющегося тела в момент прохождения им положение статического равновесия.

Решение

1. В соответствии с законом сохранения механической энергии:

$$U_m + K_m = const; \quad U_m = \frac{mv_m^2}{2}; \quad v_m = \sqrt{\frac{2U_m}{m}} = 0{,}4\frac{м}{c};$$

---

409. Определить массу груза, колеблющегося на невесомой пружине с коэффициентом жёсткости k = 16 Н/м, если амплитуда колебаний А = 0,02 м, а скорость в момент прохождения положения равновесия v_m = 0,4 м/с.

Решение

1. В соответствии с законом сохранения механической энергии:

$$U_m + K_m = const; \quad \frac{mv_m^2}{2} = \frac{kA^2}{2}; \quad m = \frac{kA^2}{v_m^2} = \frac{16\cdot 4\cdot 10^{-4}}{0{,}16} \cong 4\cdot 10^{-2}\,кг.$$

---

410. Висящий на пружине груз массой m = 0,1 кг совершает вертикальные колебания с амплитудой $A = 5\cdot 10^{-2}$ м. Чему равна скорость груза в момент прохождения им положения равновесия, если k = 40 Н/м?

Решение

$$U_m + K_m = \text{const}; \quad U_m = \frac{mv_m^2}{2} = \frac{kA^2}{2}; \quad v_m = A\sqrt{\frac{k}{m}} = A\omega = 1\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

---

411. Тело совершает гармонические колебания на пружине в соответствие с уравнением: $x(t) = 0{,}07\sin(\pi t + 0{,}5\pi)$. Жёсткость пружины равна k = 20 Н/м. Определить частоту колебаний и полную энергию тела.

Решение

1. Из заданного уравнения следует что:

$$\omega = \pi\frac{\text{рад}}{\text{с}}; \quad \omega = 2\pi\nu; \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = 0{,}5\ \text{Гц}; \quad A = 0{,}07\text{м};$$

2. Полная энергия тела:

$$U_m = K_m; \quad W = \frac{kA^2}{2} = \frac{20 \cdot 4{,}9 \cdot 10^{-3}}{2} = 4{,}9 \cdot 10^{-2}\,\text{Дж};$$

---

412. Определить массу тела, совершающего гармонические колебания на пружине с амплитудой A = 0,1 м и частотой ν = 2 Гц, если полная энергия колебаний равна W = 7,7 мДж.

Решение

1. Циклическая частота колебаний:

$$\omega = 2\pi\nu = 12{,}56\,\text{с}^{-1};$$

2. Максимальное значение скорости тела в момент прохождения им положения равновесия:

$$v_m = \omega A;$$

3. Из закона сохранения энергии:

$$W = U_m = K_m = \frac{mv_m^2}{2} = \frac{m\omega^2A^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad m = \frac{2W}{\omega^2A^2} \approx 9{,}75 \cdot 10^{-3}\,\text{кг};$$

---

413. Движение тела массой m = 2 кг описывается уравнением:

$$x(t) = 0{,}8\sin(\pi t + 0{,}5\pi),\text{м}$$

Определить полную энергию колеблющегося тела.

Решение

1. Из заданного уравнения движения:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = 0{,}8\pi\cos(\pi t + 0{,}5\pi); \quad \dot{x}_m = 0{,}8\pi;$$

2. Полная энергия колебаний:

$$W = K_m = \frac{m\dot{x}_m^2}{2} \approx \frac{2 \cdot 0{,}64 \cdot 9{,}86}{2} \approx 6{,}3\,\text{Дж};$$

---

414. Тело массой m подвешено к пружине жёсткостью k. При сообщении телу в положении равновесия некоторой скорости возникли колебания с амплитудой x_m. Определить начальную скорость тела.

Решение

1. Из закона сохранения механической энергии:

$$\frac{kx_m^2}{2} = \frac{mv_m^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad v_m = x_m\sqrt{\frac{k}{m}} = x_m\omega;$$

---

415. По грузу массой m, прикрепленному к концу горизонтальной пружины с жёсткостью k, ударяют молотком, который сообщает грузу начальную скорость v_0. Определить амплитуду колебаний и максимальное ускорение.

Решение

1. Из закона сохранения механической энергии:

$$\frac{kx_m^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad x_m = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}; \quad \ddot{x}_m = \omega^2 x_m = v_0\omega = v_0\sqrt{\frac{k}{m}};;$$

---

416. Груз массой m = 0,1 кг закреплён на пружине жёсткостью k = 100 Н/м. Груз смещают на $x_0 = 3\cdot10^{-2}$ м от положения равновесия и сообщают ему скорость v_0 = 0,1 м/с. Записать уравнение колебаний.

Решение

1. Циклическая частота колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 31{,}62\frac{\text{рад}}{\text{с}} \approx 10\pi\frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

2. Энергия тела в начальный момент времени:

$$W = \frac{kx_0^2}{2} + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{100\cdot 9\cdot 10^{-4}}{2} + \frac{0{,}1\cdot 10^{-2}}{2} \approx 4{,}55\cdot 10^{-2}\,\text{Дж};$$

3. Амплитуда колебаний:

$$W = \frac{kA^2}{2}; \quad A = \sqrt{\frac{2W}{k}} = \sqrt{\frac{9{,}1\cdot 10^{-2}}{100}} \approx 3\cdot 10^{-2}\,\text{м};$$

4. Начальная фаза колебаний:

$$x_0 = A\sin\varphi; \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arcsin\frac{x_0}{A} = \frac{\pi}{2};$$

5. Уравнение колебаний

$$x(t) = 3\cdot 10^{-2}\sin(10\pi t + 0{,}5\pi);$$

---

417. Пуля массой m_2 = 12 г попадает в брусок массой m_1 = 300 г, прикрепленный к горизонтальной пружине с коэффициентом жёсткости k = 5,2 кН/м, другой конец пружины закреплён неподвижно. Амплитуда колебаний бруска после проникновения в него пули составила A = 12,4 см. Определить скорость пули.

Решение

1. Максимальное значение потенциальной энергии деформированной пружины:

$$U_m = \frac{kA^2}{2} \cong 40Дж;$$

2. Скорость бруска с застрявшей в нём пулей:

$$U_m = \frac{(m_1 + m_2)v_1^2}{2}; \quad v_1 = \sqrt{\frac{2U_m}{m_1 + m_2}} \cong 16\frac{м}{с};$$

2. Скорость пули определится посредствам закона сохранения импульса:

$$(m_1 + m_2)v_1 = m_2 v_2; \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{(m_1 + m_2)v_1}{m_2} = \frac{0,312 \cdot 16}{0,012} \cong 416,3\frac{м}{с};$$

---

418. На гладком горизонтальном столе лежит шар массой M, прикрепленный к пружине жёсткостью k. В шар попадает пуля массой m, имеющая перед ударом скорость v_1, направленную вдоль оси пружины. Считая удар абсолютно неупругим, пренебрегая массой пружины и потерями при движении, определить амплитуду и период колебаний шара.

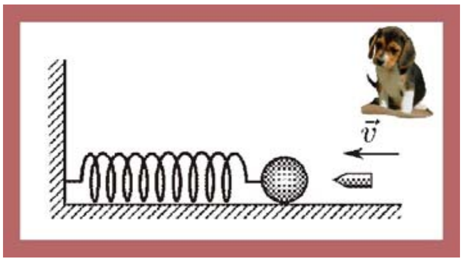


Рис. 418. Попадание пули в шар

Решение

1. Период колебаний шара с застрявшей в нём пулей:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + M}{k}};$$

2. Скорость шара с застрявшей в нём пулей:

$$mv_1 = (M + m)v_2; \quad v_2 = \frac{mv_1}{M + m};$$

3. Кинетическая энергия шара с пулей:

$$K_m = \frac{(M + m)v_2^2}{2} = \frac{(M + m)(mv_1)^2}{2(M + m)^2} = \frac{(mv_1)^2}{2(M + m)};$$

4. Кинетическая энергия шара с пулей равна максимальному значению потенциальной энергии деформированной пружины:

$$K_m = U_m = \frac{kA^2}{2}; \quad \frac{kA^2}{2} = \frac{(mv_1)^2}{2(M + m)}; \quad \Rightarrow \quad A = mv_1\sqrt{k(M + m)};$$

---

419. На горизонтальной пружине укреплено тело массой m_1 = 10 кг, лежащее на гладкой поверхности. В тело попадает и застревает в нём пуля массой m_2 = 10 г, летящая со скоростью v_2 = 500 м/с, направленной вдоль оси пружины. Тело вместе с застрявшей пулей начинает колебаться с амплитудой A = 10 см. Считая началом колебаний момент попадания пули, записать уравнение колебаний.

Решение

1. Скорость тела после попадания в него пули:

$$m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v_2; \quad m_1 >> m_2; \quad \Rightarrow \quad m_2 v_2 \approx m_1 v_1; \quad v_1 \approx 0,5 м/с;$$

2. В соответствии с законом сохранения механической энергии

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{kA^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad k = \frac{m_1 v_1^2}{A^2} \approx 250 \frac{Н}{м};$$

3. Циклическая частота колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \approx 5 \frac{рад}{с} \approx 1{,}6\pi \frac{рад}{с};$$

4. Уравнение колебаний:

$$x(t) = A\sin\omega t \approx 0{,}1\sin(1{,}6\pi t);$$

---

420. Пружинный маятник вывели из состояния равновесия и отпустили. В какие моменты времени одного колебания кинетическая энергия маятника станет равна его потенциальной энергии, если период колебаний этого маятника составляет T = 1 с?

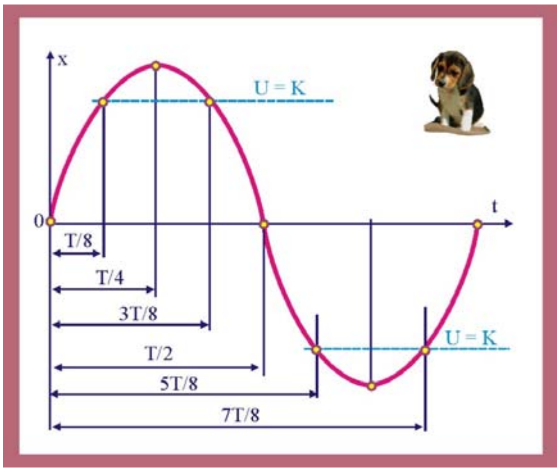


Рис. 420. Равенство энергий маятника

Решение

1. Уравнение смещения маятника:

$$x(t) = A\sin\frac{2\pi}{T}t;$$

2. Уравнение скорости:

$$\dot{x}(t) = A\frac{2\pi}{T}\cos\frac{2\pi}{T}t;$$

3. Коэффициент жёсткости колебательной системы:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}; \quad \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{k}{m}; \quad k = \frac{4\pi^2 m}{T^2};$$

4. Потенциальная энергия маятника:

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{2\pi^2 A^2 m}{T^2}\sin^2\frac{2\pi}{T}t;$$

5. Кинетическая энергия маятника:

$$K = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{2\pi^2 A^2 m}{T^2}\cos^2\frac{2\pi}{T}t;$$

6. Условие равенства кинетической и потенциальной энергий маятника:

$$\frac{U}{K} = 1; \quad \frac{\sin^2\frac{2\pi}{T}t}{\cos^2\frac{2\pi}{T}t} = 1; \quad tg^2\frac{2\pi}{T}t = 1; \quad tg\frac{2\pi}{T}t = 1; \quad \frac{2\pi}{T}t = \frac{\pi}{4}; \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{T}{8};$$

$$t_2 = \frac{3T}{8}; \quad t_3 = \frac{5T}{8}; \quad t_4 = \frac{7T}{8};$$

---

421. Шарик массой m = 20 г колеблется с периодом T = 2 с. В начальный момент времени шарик обладал энергией $W_0 = 10^{-2}$ Дж и находился от положения равновесия на расстоянии x_0 = 2,5 см. Записать уравнение гармонических колебаний шарика и закон изменения во времени возвращающей силы.

Решение

1. Циклическая частота колебаний шарика:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi\frac{рад}{с};$$

2. Коэффициент упругости колебательной системы:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}; \quad k = \omega^2 m \cong 0{,}197\frac{Н}{м};$$

3. Амплитуда колебаний:

$$W_0 = \frac{kA^2}{2}; \quad A = \sqrt{\frac{2W_0}{k}} \approx 0{,}316м;$$

4. Поскольку начальное смещение меньше амплитуды, то колебания протекают по закону косинуса:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0); \quad x_0 = A\cos\varphi_0; \quad \varphi_0 = \arccos\frac{x_0}{A} \approx 0{,}475\pi;$$

$$x(t) \approx 0{,}316\cos(\pi t + 0{,}475\pi);$$

5. Ускорение шарика:

$$\ddot{x}(t) - A\omega^2\cos(\pi t + 0{,}475\pi) \approx -3{,}11\cos(\pi t + 0{,}475\pi);$$

6. Возвращающая сила, действующая на шарик:

$$F_k = m\ddot{x}(t) = -0{,}062\cos(\pi t + 0{,}475\pi);$$

---

422. Шарик массой m = 10 г совершает гармонические колебания с амплитудой A = 3 см и частотой ν = 10 Гц. Чему равна максимальная величина возвращающей силы и полная энергия шарика?

Решение

1. Циклическая частота колебаний:

$$\omega = 2\pi\nu = 62{,}8\frac{рад}{с};$$

2. Коэффициент упругости колебательной системы:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}; \quad k = \omega^2 m \approx 40\frac{Н}{м};$$

3. Полная энергия колеблющегося шарика:

$$W = \frac{kA^2}{2} \approx 1{,}77\cdot 10^{-2}Дж;$$

4. Амплитудное значение возвращающей силы:

$$|F_m| = kA \approx 1{,}2Н;$$

---

422. Тело массой m = 0,2 кг упало с высоты h = 0,5 м на невесомую чашку пружинных весов, чашка начала совершать гармонические колебания. Написать уравнение колебаний для пружины жёсткостью k = 200 Н/м.

Решение

1. Квадрат скорости упасшей массы при попадании на чашку:

$$mgh = \frac{mv^2}{2}; \quad v^2 = 2gh \approx 9{,}8\frac{м^2}{с^2};$$

2. Амплитуда возникших колебаний:

$$\frac{kA^2}{2} = \frac{mv^2}{2}; \quad A = \sqrt{\frac{mv^2}{k}} \approx 0{,}1м;$$

3. Циклическая частота колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \approx 31{,}6\frac{рад}{с};$$

4. Уравнение колебаний:

$$x(t) \approx 0{,}1\sin 10\pi t;$$

---

423. Частота собственных колебаний доски, переброшенной через ручей, равна ν = 0,5 Гц. Наступит ли явление резонанса, если по доске по доске пойдёт человек, делающий n = 6 шагов за каждые τ = 3 с?

Решение

1. Частота воздействия внешней силы на доску:

$$\Omega = \frac{n}{\tau} = 2с^{-1}; \quad \Omega \neq \nu \Rightarrow \quad \text{резонанс не наступит.}$$

---

424. Когда водитель массой m = 80 кг садится в легковой автомобиль массой M = 1200 кг, упругие элементы подвески проседают на Δx = 1,4 см. Какова, без учёта затухания, частота собственных колебаний автомобиля при наезде на ухаб?

Решение

1. Условие статического равновесия автомобиля после посадки водителя:

$$mg = k\Delta x; \quad \Rightarrow \quad k = \frac{mg}{\Delta x} \approx 5{,}6\cdot 10^3\frac{Н}{м};$$

2. Частота собственных колебаний автомобиля с водителем:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}} \approx 2{,}1\frac{рад}{с}; \quad \omega = 2\pi\nu; \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} \approx 0{,}33Гц;$$

---

425. Определить период колебаний вагона на рессорах, если его статическая осадка составляет Δx = 250 мм.

Решение

1. Жёсткость вагонной подвески:

$$mg = k\Delta x; \quad k = \frac{mg}{\Delta x};$$

2. Период собственных колебаний вагона

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \sqrt{\frac{m\Delta x}{mg}} = \sqrt{\frac{\Delta x}{g}} \approx 1с.$$

---

426. Через ручей переброшена длинная доска. Когда путник стоит на ней неподвижно, она пригибается на Δx = 0,1 м. Кодда же он пошёл по доске со скоростью v = 1 м/с доска раскачалась так, что путник упал в ручей. Какова примерно длина шага путника?

Решение

1. Речь идёт о совпадении частоты внешней периодической силы, связанной с перемещением веса путника, с частотой собственных колебаний доски. Частота шагов путника оказалась в области собственной частоты колебаний системы «путник – доска», что привело к возрастанию амплитуды собственных колебаний.

2. Коэффициент упругости доски:

$$mg = k\Delta x; \quad \Rightarrow \quad k = \frac{mg}{\Delta x};$$

3. Период собственных колебаний системы «доска – путник»:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m\Delta x}{mg}} \cong 0{,}628c;$$

4. Доска начнёт интенсивно раскачиваться, если путник будет делать шаги длиной:

$$\ell \approx vT \approx 0{,}63м;$$

---

427. Грузовики въезжают по грунтовой дороге на зерновой склад с одной стороны, а выезжают со склада с другой стороны с той же скоростью. С одной стороны склада выбоины на дороге идут чаще, чем с другой. Как по состоянию дороги определить, с какой стороны склада грузовики въезжали, а с какой выезжали?

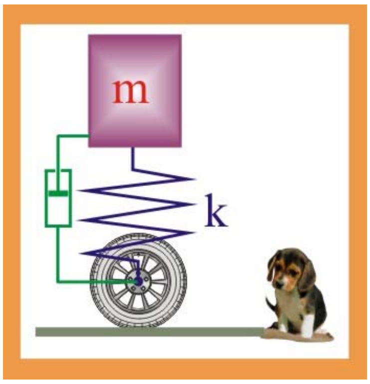


Рис. 427. Схема автомобиля

Решение

1. Грузовик, в первом приближении, можно представить как массу, соединённую с упругим элементом k (рессоры, упругие свойства шин) и демпфером. В самом приближённом варианте, без учёта демпфирования, период колебаний определится как:

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

т.е. у нагруженного автомобиля период собственных колебаний будет больше, чем у пустого, поэтому частота воздействия на дорогу у гружёных автомобилей будет ниже, «волны» на дороге будут более глубокими и длинными с той стороны склада, откуда выезжает нагруженный транспорт. По этой причине для большегрузных автомобилей ограничивают проезд даже по некоторым асфальтовым дорогам.

---

428. Период собственных колебаний железнодорожного вагона T = 1, 25 с. На стыках рельс вагон испытывает ударные возбуждения, приводящие к возникновению вынужденных колебаний. При какой скорости поезда амплитуда колебаний вагона будет максимальной если длина рельса ℓ = 25 м?

Решение

1. При совпадении частоты внешнего ударного возбуждения с частотой собственных колебаний вагона наступает явление резонанса:

$$v = \frac{\ell}{T} = 20\frac{м}{с};$$

---

429. Вёдра, наполненные водой, и подвешенные на коромысле имеют частоту собственных колебаний ν = 0,625 Гц. При какой длине шага колебания поверхности воды будут особенно сильными, если водонос движется с постоянной скоростью v = 2,7 км/ч?

Решение

1. Скорость водоноса и период собственных колебаний вёдер с водой:

$$T = \frac{1}{\nu} = 1{,}6с; \quad v = \frac{2{,}7}{3{,}6} = 0{,}75\frac{м}{с};$$

2. Чтобы частота возмущающей внешней силы совпала с частотой собственных колебаний водоносу необходимо делать в течение периода два шага:

$$\ell = v\frac{T}{2} = 0{,}6м;$$

---

430. Танк, проехав по мокрой грунтовой дороге, оставил два ряда углублений, расположенных на расстоянии l = 8 м друг от друга. Через некоторое время по дороге проехал легковой автомобиль массой M = 1,3 т, который попав в резонанс стал испытывать ощутимые вертикальные колебания. С какой скоростью двигался автомобиль, если под действием массы четырёх пассажиров m = 300 кг подвеска автомобиля «проседает» в состоянии покоя на Δx = 2 см.

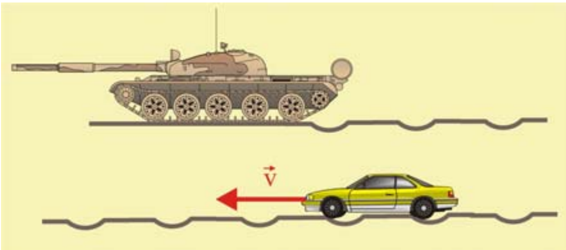


Рис. 430. Резонансные колебания автомобиля

Решение

1. По величине статической реакции подвески автомобиля определим коэффициент её жесткости

$$k = \frac{Mg}{\Delta x} = \frac{1{,}3\cdot 10^3\cdot 9{,}81}{2\cdot 10^{-3}} \cong 1{,}25\cdot 10^4\,\frac{Н}{м}.$$

2. Частота собственных колебаний автомобиля

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}} = \frac{1}{6{,}28}\sqrt{\frac{1{,}25\cdot 10^4}{1{,}3\cdot 10^3}} \cong 0{,}5\,Гц.$$

3. Скорость движения автомобиля, соответствующая резонансным колебаниям

$$v = \ell\nu_0 = 8\cdot 0{,}5 = 4\,м/с = 14{,}4\,км/час.$$

---

431. В жидкости плотностью ρ_1 плавает цилиндр высотой h. Если цилиндр немного утопить, а затем отпустить, то он начинает совершать гармонические колебания. Плотность материала цилиндра ρ_2. Определить период возникающих свободных колебаний цилиндра без учёта затухания.

Решение

1. При плавании цилиндра в жидкости имеет место равенство модулей сил тяжести и Архимеда. При погружении цилиндра по вертикали на величину x объём погруженной части цилиндра возрастает, что приводит к увеличению значения силы Архимеда на величину:

$$\Delta F = \rho_1 gsx,$$

где s – площадь основания цилиндра.

2. Сила ΔF является возвращающей силой, поэтому дифференциальное уравнение колебаний можно представить следующим образом:

$$m\ddot{x} = -\Delta F; \quad \rho_2 sh\ddot{x} = -\rho_1 gsx; \quad \ddot{x} + \frac{\rho_1 g}{\rho_2 h}x = 0;$$

3. Циклическая частота собственных колебаний цилиндра:

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho_1 g}{\rho_2 h}};$$

4. Период собственных колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_2 h}{\rho_1 g}};$$

---

432. Сплошной цилиндр высотой h плавает в вертикальном положении в жидкости, погрузившись в неё на 2/3 своего объёма. Найти период колебаний цилиндра.

Решение

1. Дифференциальное уравнение колебаний цилиндра в жидкости:

$$\ddot{x} + \frac{\rho_1 g}{\rho_2 h}x = 0;$$

2. Из условия статического равновесия цилиндра:

$$\rho_1 shg = -\rho_2 s\frac{2}{3}hg; \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{3}{2};$$

3. Циклическая частота и период колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2h}}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2h}{3g}};$$

---

433. Ареометр массой m и поперечным сечением s помещён в жидкость с плотностью ρ. Определить период собственных колебаний ареометра.

Решение

1. При погружении ареометра на величину x возникающая возвращающая сила будет удовлетворять уравнению:

$$m\ddot{x} = -\rho gsx; \quad m\ddot{x} + \rho gsx = 0; \quad \ddot{x} + \frac{\rho gs}{m}x = 0;$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho gs}{m}}; \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho gs}};$$

---

434. Океанская волна имеет длину λ = 300 м, период колебаний частиц в которой составляет T = 13,5 с. С какой скоростью распространяется такая волна?

Решение

1. Частота колебаний частиц в волне:

$$\nu = \frac{1}{T} = 0{,}074\text{Гц};$$

2. Фазовая скорость (скорость распространения формы поверхности) распространения волны:

$$c = \lambda\nu = 22{,}2\ \text{м/с};$$

---

435. Определить расстояние между соседними точками, находящимися в одинаковых фазах, если волна распространяется со скоростью c = 330 м/с, а частота колебаний частиц в волне равна ν = 256 Гц.

Решение

1. Расстояние между двумя точками, колеблющимися синфазно, называется длиной волны:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 1{,}29\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

---

436. Судно раскачивается на волнах, распространяющихся со скоростью c = 1,5 м/с. Расстояние между двумя соседними гребнями λ = 6 м. Определить период колебаний судна.

Решение

1. Частота колебаний частиц в волне:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = 0{,}25\text{Гц};$$

2. Период колебаний судна:

$$T = \frac{1}{\nu} = 4\text{с};$$

---

437. Волны распространяются вдоль резинового шнура со скоростью c = 3 м/с при частоте ν = 2 Гц. Какой сдвиг по фазе у точек, отстоящих друг от друга на Δx = 0,75 м?

Решение

1. Длина волны:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 1{,}5\text{м};$$

$$\Delta x = \lambda/2; \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi = \pi;$$

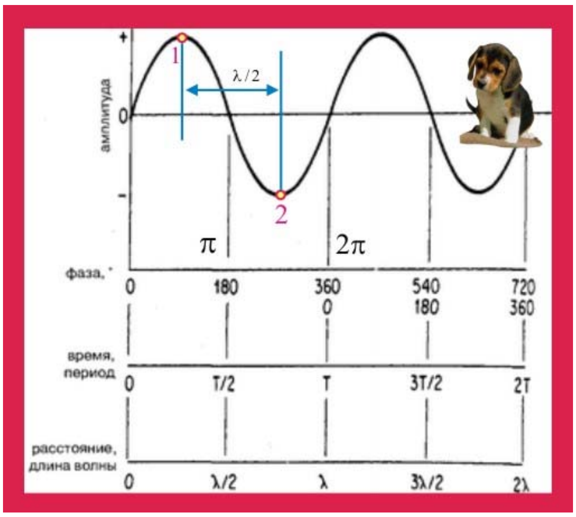


Рис. 437. Длина волны

438. Скорость звука в воде равна с = 1450 м/с. На каком расстоянии Δx находятся точки, совершающие колебания в противоположных фазах, если частота источника колебаний ν = 725 Гц?

Решение

1. В противофазе колеблются частицы среды, отстоящие друг от друга на расстоянии $\lambda/2$. Точки волновой поверхности 1 и 2 будут двигаться в противоположных направления(рис. 437):

$$\lambda = \frac{c}{\lambda} = 2\text{м}; \quad \Delta x = 1\text{м};$$

---

439. Волна распространяется со скоростью с = 360 м/с при частоте источника колебаний ν = 450 Гц. Чему равна разность фаз двух точек волны, отстоящих друг от друга на расстоянии Δx = 0,2 м?

Решение

1. Длина волны:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 0{,}8\text{м}; \quad \Delta x = \frac{\lambda}{4}; \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2};$$

---

440. Волна распространяется со скоростью с = 2,4 м/с при частоте ν = 3 Гц. На каком расстоянии находятся точки, разности фаз которых $\Delta\varphi = \pi/2$?

Решение

1. Длина волны:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 0{,}8\text{м}; \quad \lambda\Delta\varphi = 2\pi\Delta x; \quad \Delta x = \frac{\lambda\Delta\varphi}{2\pi} = 0{,}2\text{м};$$

---

441. Определить частоту звуковых колебаний в стали, если расстояние между ближайшими точками звуковой волны, отличающимися по фазе на $\Delta\varphi$ = $\pi/2$ равно Δx = 1б54 м. Скорость распространения звуковых волн в стали с $=5\cdot 10^3$ м/с.

Решение

1. Расстояние Δx соответствует четверти длины волны $\Delta x = \lambda/4$, откуда видно, что $\lambda \approx 6,16$ м.

2. Частота источника колебаний:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \approx 812 \text{ Гц};$$

---

442. На поверхности воды распространяется волна со скоростью с = 2,4 м/с при частоте колебаний ν = 2 Гц. Какова разность фаз в точках, лежащих на одном луче и отстоящих друг от друга на расстояниях: Δx_1 = 0,1 м; Δx_2 = 0,6 м; Δx_3 = 0,9 м; Δx_4 = 1,2 м; Δx_5 = 1,4 м?

Решение

1. Длина волны:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 1{,}2\text{м};$$

2. Разности фаз в заданных точках луча:

$$\lambda\Delta\varphi = 2\pi\Delta x; \quad \Delta\varphi_1 = \frac{2\pi\Delta x_1}{\lambda} = \frac{2\pi\cdot 0{,}1}{1{,}2} \approx \frac{\pi}{6};$$

$$\Delta\varphi_2 = \frac{2\pi\Delta x_2}{\lambda} = \frac{2\pi\cdot 0{,}6}{1{,}2} \approx \pi;$$

$$\Delta\varphi_3 = \frac{2\pi\Delta x_3}{\lambda} = \frac{2\pi\cdot 0{,}9}{1{,}2} \approx 1{,}5\pi;$$

$$\Delta\varphi_4 = \frac{2\pi\Delta x_4}{\lambda} = \frac{2\pi\cdot 1{,}2}{1{,}2} \approx 2\pi;$$

$$\Delta\varphi_5 = \frac{2\pi\Delta x_5}{\lambda} = \frac{2\pi\cdot 1{,}4}{1{,}2} = \frac{2{,}8\pi}{1{,}2} \approx \frac{7}{3}\pi;$$

---

443. Плоская бегущая волна распространяется вдоль прямой со скоростью $c = 20$ м/с. Две точки, находящиеся на этой прямой на расстояниях $x_1 = 12$ м и $x_2 = 15$ м от источника волн, колеблются с разностью фаз $\Delta\varphi = 0{,}75\,\pi$. Амплитуда колебаний источника $A = 0{,}1$ м. Определить, в какой момент времени после начала распространения волны дальняя от источника точка будет иметь смещение $y_2 = 7{,}1$ см. Каково смещение y_2 в этот момент ближней к источнику точки?

Решение

1. Длина волны:

$$x_2 - x_1 = \Delta x; \quad \left.\begin{aligned} 0{,}75\pi &\to \Delta x; \\ 2\pi &\to \lambda; \end{aligned}\right\} \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{2\pi\Delta x}{0{,}75\pi} = 8\text{м};$$

2. Частота колебаний источника:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = 2{,}5\text{ Гц};$$

3. Уравнение упругой плоской бегущей волны:

$$y(x,t) = A\sin(\omega t - kx) \quad y(x,t) = A\sin\left(2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right);$$

4. Применительно к точке, расположенной на расстоянии x_2 уравнение перепишется следующим образам:

$$y_2(x_2,\tau) = A\sin\left(2\pi\nu\tau - \frac{2\pi}{\lambda}x_2\right); \quad \left(2\pi\nu\tau - \frac{2\pi}{\lambda}x_2\right) = \arcsin\frac{y_2}{A} \approx \frac{\pi}{4};$$

5. Искомый момент времени τ:

$$2\nu\tau - \frac{2x_2}{\lambda} \approx \frac{1}{4}; \quad \Rightarrow \quad 5\tau - 3{,}75 \approx 0{,}25; \quad \tau \approx 0{,}8\text{с};$$

6. Смещение в момент времени τ точки, расположенной на расстоянии x_1:

$$y_1(x_1,\tau) = A\sin\left(2\pi\nu\tau - \frac{2\pi}{\lambda}x_1\right); \quad y_1 = 0{,}1\sin(4\pi - 3\pi) = 0;$$

---

444. Во сколько раз изменится длина звуковой волны при её переходе из воздуха ($c_1 \approx 340$ м/с) в воду ($c_2 \approx 1480$ м/с)?

Решение

1. При переходе из одной среды в другую частота колебаний не изменяется, т.к. она определяется свойствами источника волн, поэтому:

$$\nu = \frac{c_1}{\lambda_1} = \frac{c_2}{\lambda_2}; \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{c_2}{c_1} \approx 4{,}35;$$

---

445. Звуковые колебания с частотой ν имеют в первой среде длину волны λ_1, а во второй среде – λ_2. Как изменится скорость распространения этих колебаний при переходе из первой среды во вторую, если $\lambda_1 = \lambda_2$?

Решение

1. При переходе из одной среды в другую частота колебаний не изменяется, т.к. она определяется свойствами источника волн, поэтому:

$$\nu = \frac{c_1}{\lambda_1} = \frac{c_2}{\lambda_2}; \quad c_1\lambda_2 = c_2\lambda_1; \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{2};;$$

---

446. Определить скорость звука в воде, если упругие колебания с периодом $T = 5\cdot10^{-3}$ с генерируют волну с длиной λ = 7, 175 м.

Решение

1. Частота колебаний:

$$\nu = \frac{1}{T} = 200\ \text{Гц};$$

2. Скорость распространения волны:

$$c = \nu\lambda = 1435\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

---

447. Для точек, находящихся на расстоянии Δx = 0,5 м друг от друга на прямой, вдоль которой распространяется упругая волна со скоростью v = 50 м/с и периодом $T = 5\cdot10^{-2}$ с, определить разность фаз колебаний $\Delta\Phi$.

Решение

1. Запишем уравнения фазы колебаний для заданных по условию задачи точек

$$\Phi = (\omega t - kx) = \left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{Tv}x\right),$$

$$\Phi_1 = (\omega t - kx_1) = \left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{Tv}x_1\right),$$

$$\Phi_2 = (\omega t - kx_2) = \left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{Tv}x_2\right),$$

2. Определим разность фаз

$$\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = \frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{Tv}x_1 - \frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{Tv}x_2 = \frac{2\pi}{Tv}\Delta x = 1{,}26\,\text{рад}\,(72{,}2^0).$$

---

448. Упругая волна распространяется вдоль прямой со скоростью v = 40 м/с при частоте колебаний частиц среды ν = 5 Гц. Определить разность фаз колебаний между источником и точкой отстоящей от источника на расстоянии x_1 = 2 м.

Решение

1. Запишем уравнение фаз колебаний для источника и заданной точки с учётом того, что $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ м

$$\Phi_1 = \left(2\pi\nu t - \frac{2\pi\nu}{v}x_1\right); \quad \Phi_2 = \left(2\pi\nu t - \frac{2\pi\nu}{v}x_2\right).$$

2. Разность фаз колебаний между рассматриваемыми точками:

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi\nu}{v}\Delta x = \frac{6{,}28\cdot 5}{40}2 = 1{,}57\,\text{рад}\,\left(90^0\right).$$

---

449. Волновой фронт распространяется со скоростью v = 100 м/с. Наименьшее расстояние между точками среды, колеблющимися синфазно, составляет Δx = 1 м. Определить частоту колебаний.

Решение

1. Расстояние между двумя ближайшими точками, совершающими синфазные колебания, преодолевается волной за время одного полупериода. Зная скорость распространения волнового фронта, можно определить период и частоту колебаний частиц среды

$$T = \frac{2\Delta x}{v}; \quad \nu = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\Delta x} = 50\,\text{Гц}.$$

---

450. При распространении плоской волны частицы среды колеблются с частотой ν = 25 Гц. Частицы среды, отстоящие друг от друга на расстоянии Δx = 0,1 м, колеблются с разностью фаз $\Delta\Phi = 60^0$. Найти скорость распространения волны.

Решение

1. Запишем уравнение разности фаз и определим скорость распространения волны

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi\nu}{v}\Delta x,$$

$$\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi\nu}{v}\Delta x; \quad \Rightarrow \quad v = 6\nu\Delta x = 15\,\text{м/с}.$$

---

451. Звуковая волна в воздухе распространяется со скоростью v = 340 м/с, период колебания частиц среды равен T = 1 мс. Определить, на каком расстоянии от источника направление движения частиц поменяется на обратное. Как изменится это расстояние при увеличении частоты колебаний источника вдвое?

Решение

1. Изменение направления смещения частиц на обратное происходит при изменении фазы на $\Delta\Phi = 180^0 = \pi$ рад, поэтому :

$$\pi = \frac{2\pi}{Tv}\Delta x; \quad \Delta x_1 = \frac{Tv}{2} = 0{,}17\,\text{м}.$$

2. При увеличении частоты вдвое период уменьшится тоже в два раза, следовательно, минимальное расстояние между точками среды, колеблющимися в противофазе, составит $\Delta x = 8{,}5$ см.

---

452. Бегущая акустическая волна описывается уравнением

$$\xi(x,t) = \xi_m \cos(1560t - 5{,}2x),$$

где величины времени t и расстояния x выражены в секундах и метрах, соответственно. Вычислить частоту колебаний частиц среды ν, скорость распространения волны c и её длину λ.

Решение

1. По условию задачи заданы следующие параметры волнового движения: циклическая частота колебаний $\omega = 1560$ рад/с, волновое число $k = 5{,}2$ м$^{-1}$.

2. Частота колебаний частиц среды относительно положения равновесия

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 248\ \text{Гц}.$$

3. Длина волны определится из следующих соображений

$$k = \frac{2\pi}{\lambda};\quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = 1{,}21\,\text{м}.$$

4. Скорость распространения волны

$$k = \frac{\omega}{c};\quad c = \frac{\omega}{k} = 300\,\frac{\text{м}}{\text{c}}.$$

---

453. Акустическая волна, распространяющаяся в воздухе, описывается уравнением

$$\xi(x,t) = 6\cdot 10^{-5}\cos(1800t - 5{,}3x),$$

где время t выражено в секундах, расстояние x – в метрах. Найти отношение амплитудного значения смещения частиц среды к длине волны и отношение максимального значения колебательной скорости частиц к скорости распространения волны.

Решение

1. Из заданного уравнения следует, что: $\xi_m = 6\cdot 10^{-5}\,$м; $\omega = 1800$ рад/с; $k = 5{,}3$ м$^{-1}$, поэтому длину волны можно определить следующим образом

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 1{,}18\ \text{м}.$$

2. Отношение амплитуды смещения частиц при колебаниях к длине волны, таким образом, будет равно

$$\frac{\xi_m}{\lambda} = \frac{6\cdot 10^{-5}}{1{,}18} = 5{,}1\cdot 10^{-5}.$$

3. Определим амплитудное значение колебательной скорости

$$\dot{\xi}_m = \frac{d\xi(x,t)}{dt} = -\omega\xi_m = 1800\cdot 6\cdot 10^{-5} = 0{,}11\,\frac{\text{м}}{\text{c}}.$$

4. Скорость распространения волны

$$c = \frac{\omega}{k} = 340\,\frac{\text{м}}{\text{c}}.$$

5. Отношение амплитудного значения колебательной скорости к скорости распространения волны

$$\frac{\dot{\xi}_m}{c} = \frac{0{,}11}{340} = 3{,}24 \cdot 10^{-4}.$$

454. Стальные детали проверяются ультразвуковым дефектоскопом. На какой глубине обнаружена трещина в детали, и какова толщина деталт, если после излучения ультразвукового импульса были получены два отражённых сигнала через τ_1 = 10 $^{-4}$ с и $\tau_2 = 2 \cdot 10^{-4}$ с? Скорость распространения ультразвуковой волны в материале с = 5200 м/с.

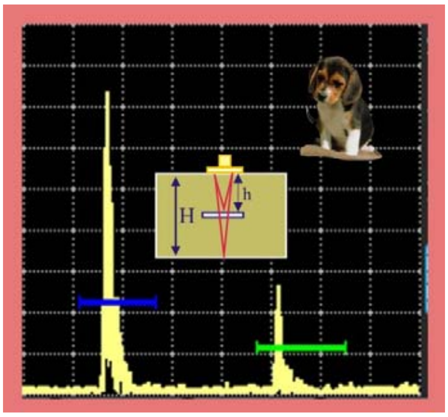


Рис. 454. Отражённые импульсы

Решение

1. За время τ_1 ультразвуковой импульс проходит расстояние от поверхности детали до дефекта и обратно, т.е. $\ell = 2h$, поэтому:

$$h = \frac{1}{2}c\tau_1 = 0{,}26\text{м};$$

2. Толщина детали:

$$H = \frac{1}{2}c\tau_2 = 0{,}52\text{м};$$

455. Скорость звука относительно Земли при попутном ветре равна c_1 = 380 м/с, а при встречном – c_2 = 320 м/с. Чему равна скорость звука относительно воздуха и скорость ветра относительно Земли?

Решение

1. Скорость звука относительно неподвижного воздуха:

$$c_0 = \frac{c_1 + c_2}{2} = 350\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

2. Скорость ветра:

$$v = \frac{c_1 - c_2}{2} = 30\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

456. Звук выстрела и пуля одновременно достигают высоты h = 680 м. Какова начальная скорость пули, если выстрел произведён вертикально вверх, а звук распространяется со скоростью с = 340 м/с?

Решение

1. Время полёта пули при условии $\tau_п = \tau_з = \tau$:

$$\tau = \frac{h}{c} = 2\text{с};$$

2. Кинематическое уравнение движения пули:

$$h = v_0\tau - \frac{g\tau^2}{2}; \quad v_0 = \frac{1}{\tau}\left(h + \frac{g\tau^2}{2}\right) \approx 350\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

457. На расстоянии L = 1068 м ударяют по стальному рельсу. Это расстояние в стали звук проходит на Δt = 3 с быстрее, чем в воздухе ($c_в$ = 330 м/с) определить скорость звука в стали.

Решение

1. Соотношения времён и скоростей:

$$L = c_{ст}\tau; \quad \tau = \frac{L}{c_{ст}};$$

$$L = c_в(\tau + \Delta t) = c_в\left(\frac{L}{c_{ст}} + \Delta t\right); \quad L = \frac{c_в L}{c_{ст}} + c_в\Delta t; \quad L - c_в\Delta t = \frac{c_в L}{c_{ст}};$$

$$c_{ст} = \frac{c_в L}{L - c_в\Delta t} = \frac{330\cdot 1068}{1068 - 990} \approx 4518\,\frac{м}{с};$$

---

458. Точки некоторой среды совершают незатухающие колебания, которые распространяются с фазовой скоростью v. Получить уравнение волнового движения и показать его физический смысл.

Решение

1. При нулевой начальной фазе смещение частиц среды при распространении упругой волны можно записать следующим образом

$$\xi(x,t) = \xi_m \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right] = \xi_m \sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{v}\right),$$

$$\xi(x,t) = \xi_m \sin\left[\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{Tv}\right] = \xi_m\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right).$$

2. Количество длин волн λ, укладывающихся на отрезке 2π, называется волновым числом

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}.$$

3. Введём в уравнение волны волновое число

$$\xi(x,t) = \xi_m \sin(\omega t - kx).$$

4. Найдём частные производные уравнения по времени t и координате x

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = u = \xi_m \omega \cos(\omega t - kx);$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a = -\xi_m \omega^2 \sin(\omega t - kx) = -\omega^2 \xi(x,t);$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \xi_m(-k)\cos(\omega t - kx);$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\xi_m k^2 \sin(\omega t - kx) = -\frac{4\pi^2 v^2}{v^2}\xi(x,t) = \frac{\omega^2}{v^2}\xi(x,t).$$

5. Ввиду того, что переменные x и t не зависят друг от друга, то, сравнивая уравнения производных, получим:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

6. Полученное уравнение является дифференциальным уравнением плоской бегущей волны. Это уравнение описывает не только распространение плоской волны в упругой среде, но и широкое многообразие других волновых процессов, поэтому называется волновым уравнением.

7. В частности для акустической волны в твёрдых телах волновое уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2};$$

где E – модуль упругости (модуль Юнга), ρ – плотность среды. Так например, для стали $E = 2\cdot10^{11}$ Н/м^2, ρ=7800 кг/м^3, скорость звука равна

$$c = \sqrt{E/\rho} \cong 5100\,\text{м/с}.$$

8. Распространения упругих волн в газах, если считать их идеальными, описывается уравнением адиабаты $PV^\gamma = \text{const}$, из которого следует, что

$$dPV - P\gamma dV = 0.$$

Это уравнение можно преобразовать к волновому уравнению, в котором скорость определится как

$$c = \sqrt{(P_o/\rho_o)\cdot\gamma},$$

где $\gamma = c_p/c_v$ – показатель адиабаты, $p_0 = n_0kT$ – давление в отсутствие волны, ρ_0 – плотность невозмущённого газа, n_0 – концентрация молекул в невозмущённой среде, $k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К, T – абсолютная температура. С учётом того, что $n_0 = \rho_0/m_0$,

$$p_0 = \rho_0 kT\frac{1}{m_0} = \frac{\rho_0 RT}{\mu};$$

9. Скорость определится как:

$$c = \sqrt{\gamma\frac{RT}{\mu}};$$

10. Полученное уравнение показывает, в частности, что скорость звука в газах совпадает со скоростью теплового движения молекул.

459. Звуковые колебания распространяются в азоте N_2 при температуре T = 300 К. Определить скорость звука.

Решение

1. Распространения упругих волн в газах, если считать их идеальными, описывается уравнением адиабаты $PV^\gamma = \text{const}$, из которого следует, что

$$dPV - P\gamma dV = 0.$$

Это уравнение можно преобразовать к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2},$$

при этом скорость определится как

$$c = \sqrt{\frac{p_0\gamma}{\rho_0}},$$

где $\gamma = c_p/c_v$ – показатель адиабаты, $p_0 = n_0kT$ - давление в отсутствие волны, ρ_0 - плотность невозмущённого газа, n_0 –концентрация молекул в невозмущённой среде, $k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К, T – абсолютная температура. С учётом того, что $n_0 = \rho_0/m_0$,

$$p_0 = \rho_0 kT\frac{1}{m_0} = \frac{\rho_0 RT}{\mu};$$

скорость определится как:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}};$$

Уравнение фазовой скорости показывает, в частности, что скорость звука в газах совпадает со скоростью теплового движения молекул. Скорость распространения упругих волн, в большинстве своём, не зависит от амплитуды колебаний, исключение составляют волны взрывного типа, которые относятся к нелинейным волнам, когда колебания среды, порождающие эти волны, не являются гармоническими.

2. Двухатомная молекула азота N_2 состоит из двух атомов, т.е. обладает пятью степенями свободы i = 5

$$\gamma = \frac{i+2}{i} = 1{,}4.$$

3. Молярная масса азота $\mu(N_2) = 28\cdot10^{-3}$ кг/моль, универсальная газовая постоянная R = 8,3 Дж/моль·К. Скорость звука определится как

$$c(N_2) = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{1{,}4\cdot 8{,}3\cdot 300}{28\cdot 10^{-3}}} \cong 354\,\frac{м}{с}.$$

---

460. Слуховой орган среднего статистического человека может воспринимать акустические колебания в интервале частот ν_{min} = 22 Гц, ν_{max} = 18 кГц. Определить диапазон длин волн для температур окружающего воздуха t_1 = – 25 ^{0}С и t_2 = 40 ^{0}С.

Решение

1. Определим скорость звука при заданных условиях принимая внешнее давление равным $p = 10^5$ Па, молярную массу $\mu = 29\cdot10^{-3}$ кг/моль, число степеней свободы молекул воздуха i = 5, показатель адиабаты γ = 1,4

$$c_1 = \sqrt{\frac{\gamma RT_1}{\mu}} = \sqrt{\frac{1{,}4\cdot 8{,}3\cdot 248}{29\cdot 10^{-3}}} = 315\,\frac{м}{с},$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{\gamma RT_2}{\mu}} = \sqrt{\frac{1{,}4\cdot 8{,}3\cdot 313}{29\cdot 10^{-3}}} = 354\,\frac{м}{с}.$$

2. Искомые диапазоны длин волн

$$\lambda_{max} = \frac{c_1}{\nu_{min}} = \frac{315}{22} = 14{,}3\,м.$$

$$\lambda_{min(1)} = \frac{c_2}{\nu_{max}} = \frac{315}{18\cdot 10^3} = 1{,}75\cdot 10^{-2}\,м.$$
