Камчатский государственный технический университет

А. Исаков

Физика

Решение задач ЕГЭ
Часть 6

Электричество
Магнетизм

Петропавловск-Камчатский
2013

УДК 50(075.8)
ББК 20я73
И85

Рецензент
доктор физико-математических наук,
профессор Дальневосточного Федерального университета
Стоценко Л.Г.

Исаков Александр Яковлевич

И85 Физика. Решение задач ЕГЭ. Часть 6. Электричество. Магнетизм: КамчатГТУ, 2013. – 229 с.

Приведены решения типовых задач из электричества и магнетизма. Ряд задач не относятся к, так называемому, «базовому уровню». Это задачи, для решения которых не вполне достаточно знания математических интерпретаций, они требуют более углублённого проникновения в суть физических законов. Решение задач, предваряется краткими теоретическими сведениями, содержащими как основные уравнения, так и их физическую интерпретацию, что позволяет к решению задач подойти более осмысленно.

Условия большинства задач, не являются новыми, они заимствованы из известных сборников задач, в основном из задачника Трубецковой С.В, кроме того, использованы задачи, помещённые в пособиях под редакцией Н.Е. Савченко, С.М. Козела, Г.Ф. Меледина, А.А. Пинского,., Касаткиной И.Л., Степановой Г.Н. и других популярных авторов. Большинство задач снабжены подробными решениями с анализом применяемых законов и определений, для стандартных задач самого начального уровня приведены только схемы решений

Сборник предназначен, прежде всего, для школьников старших классов, намеревающихся овладеть методиками решения задач, в частности, части «С» в рамках современного ЕГЭ. Приведенные материалы могут быть так же полезными студентам первых курсов, изучающих общую физику в университетском объёме по техническим программам подготовки, особенно студентам заочной формы образования, когда программа осваивается самостоятельно.

Оглавление

Краткие теоретические сведения

Задачи

Краткие теоретические сведения

1. Электростатическое поле

1.1. Электрический заряд

Электрическим зарядом, по современным представлениям, является физическая скалярная величина, определяющая интенсивность электромагнитных взаимодействий, возникающих как между электрически заряженными частицами (точками), так и между заряженными макроскопическими телами.

Свойства электрического заряда:

1. **Носителями электрического заряда** являются элементарные частицы – протон и электрон, а так же нестабильные частицы: π – мезоны, μ – мезоны и т.д.;
2. В природе существуют частицы с **положительными и отрицательными зарядами**. Заряд электрона, самый маленький из всех известных (элементарный) к настоящему времени, считается отрицательным (факт сугубо исторический) и равным $e \cong -1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл. В качестве положительного элементарного заряда принят заряд протона $p = +e = +1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл;
3. **Электрон** является наименьшей из известных по массе стабильной частицей, обладающей элементарным зарядом. Элементарный заряд был открыт Дж. Дж. Томсоном в 1897 г. и впервые измерен непосредственно в 1909 г. Робертом Милликеном (США);
4. **Основная загадка** электрического заряда, не вполне разрешённая к настоящему времени, заключается в том, что электрон и протон, имея одинаковые по модулю заряды, отличаются по массе примерно в 1670 раз: масса электрона – $m_e \cong 1\cdot 10^{-30}$ кг, масса протона $m_p \cong 1{,}67\cdot 10^{-27}$ кг;
5. Заряд **макроскопического тела** определяется разностью между количеством электронов N_e и протонов N_p
$$Q = e(N_p - N_e)\,;$$
6. В природе экспериментально дробные заряды в свободном состоянии не обнаружены, т.е. **электрический заряд является квантованной величиной.**

1.2. Закон сохранения электрического заряда

Физиками обнаружено, что некоторые системы при определённых обстоятельствах обладают неизменными свойствами. Такие системы называются **консервативными**, в них выполняются законы сохранения. Всякий закон сохранения, по сути, сводится, к утверждению, что в отсутствии источников и стоков в системе её параметры неизменны во времени.

Электрический заряд тоже относится к категории консервативных характеристик замкнутых систем, не испытывающих влияния извне. Дело в том, что для замкнутых систем алгебраическая сумма их электрических зарядов остаётся неизменной.

Так, например, если взять некоторое фиксированное количество воды, обычной H_2O, и определить суммарный электрический заряд всех структурных элементов, то он не будет изменяться при механических, физических, химических процессах.

Закон сохранения заряда является одним из фундаментальных законов природы. Невыполнение этого закона не зафиксировано в известных процессах, происходящих в природе или воспроизводимых человеком. Закон сохранения заряда являет собой принцип несотворимости и неуничтожимости движущейся материи. Формулировка закона проста и лаконична**: Алгебраическая сумма электрических зарядов любой электрически изолированной системы остаётся неизменной, при протекании любых процессов внутри этой системы**

$$Q = \sum_{i=1}^{i=n} q_i = \text{const}, \tag{1}$$

где Q – полный электрический заряд системы тел или частиц, q_i – электрический заряд i – той части системы, n – число частей системы.

Этот закон, наряду с законами сохранения импульса и энергии, составляет теоретическую основу анализа широкого круга разнообразных процессов, как на макро уровне, так и на микро уровнях. В частности, закон сохранения заряда успешно использовался при анализе результатов атомных и ядерных реакций.

В твёрдых телах, где связи между упорядоченно расположенными в пространстве ионами сильны, имеется некоторое число свободных электронов, способных перемещаться в пределах тела, или даже покидать его.

Электрический заряд не может удерживаться телом бесконечно долго, он «стекает» на, присутствующие в воздухе капельки воды, которые обладают свойством поляризоваться за счёт энергии заряженных тел.

С точки зрения наличия свободных носителей заряда, электронов и ионов, все вещества условно поделены на три категории, которые количественно характеризуются удельным сопротивлением ρ, Ом·м: **Проводники** $\rho \cong 10^{-8} - 10^{-6}$; **Полупроводники** $\rho \cong 10^{-6} - 10^{-3}$; **Диэлектрики** $\rho \cong 10^{-3} - 10^{16}$.

Следует отметить, что некоторые вещества относятся сразу к двум типам веществ, в зависимости от внешних условий. Во-первых, все полупроводники имеют свойство быть и проводниками и диэлектриками. Например, кремний, германий, селен и др. в обычных условиях обладают электронной проводимостью, но весьма чувствительны к нагреванию, облучению, бомбардировке заряженными частицами.

1.3. Электризация

Электризация представляет собой процесс, в результате которого тела приобретают способность участвовать в электромагнитных взаимодействиях, т.е. приобретает электрический заряд.

Электризация тел – процесс перераспределения электрических зарядов, входящих в состав тела. При электризации не происходит возникновения новых зарядов, а имеет место их перераспределение между телами или разными частями одного и того же тела. При этом, безусловно, справедлив закон сохранения заряда.

Виды электризации тел:

1. **Электризация за счёт электропроводности** происходит при контакте двух проводников с различными зарядами. Так, например, при контакте заряженного и нейтрального тела происходит частичное перераспределение свободных электронов между телами. Если заряженное тело несло отрицательный заряд, то электроны частично мигрируют на незаряженное тело, если заряженное тело имело первоначально положительный заряд, то на него прейдёт часть электронов с незаряженного тела;
2. **Электризация трением** возникает при механическом контакте перемещающихся друг относительно друга нейтральных тел, когда электроны одного тела переходят на другое. В результате электризации трением тела получают одинаковые по модулю и противоположные по знаку электрические заряды. Электризация трением является причиной возникновения, так называемого, «статического электричества», разряды которого наблюдаются при расчёсывании в темноте сухих волос.
3. **Электризация через влияние** происходит за счёт индуцирования (наведения) электрического заряда полем. Если к нейтральному проводнику поднести заряженное тело (без прямого контакта) то свободные заряды нейтрального проводника придут под действием поля в движение и в одном конце тела появится избыток электронов, а в другом их недостаток. Разрезав в целом электрически нейтральное тело, можно получить два разноимённо заряженных тела.

1.4. Закон Кулона

Система неподвижных электрических зарядов взаимодействует между собой посредствам **электрического поля**. Взаимодействие осуществляется не мгновенно, а со скоростью распространения света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Основной закон электростатического взаимодействия неподвижных точечных (размеры заряженных тел на много меньше расстояния между ними) был сформулирован в 1785 г. французским физиком Шарлем Огюстом Кулоном (1736 – 1806).

Закон Кулона: сила электрического взаимодействия между двумя неподвижными точечными зарядами в вакууме пропорциональна произведению модулей их зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. В векторной форме закон кулона записывается так

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1||q_2|}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}, \qquad (1.2)$$

где $\varepsilon_0 \cong 9 \cdot 10^{-12}$ Кл^2/(Н·м^2) – электрическая постоянная, служащая для совмещения в СИ электрических величин [q] с механическими величинами [F,r], r – расстояние между зарядами.

Силы взаимодействия направлены всегда вдоль прямой, соединяющей заряды. Такие силы называют центральными. Одноимённые заряды отталкиваются, а разноимённые притягиваются.

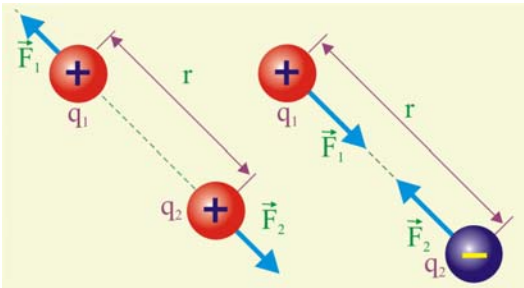


Рис. 1.1. Взаимодействие точечных зарядов

При решении задач закон Кулона удобнее представлять в скалярной форме

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}, \qquad (1.3)$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cong 9 \cdot 10^9 \text{ Н·м}^2/\text{Кл}^2. \qquad (1.4)$$

Кулон – единица электрического заряда определяемая как количество электричества, проходящее через поперечное сечение проводника при силе тока в 1 А за время τ = 1с.

Кулон является весьма большой величиной. Так, например, два заряда $q_1 = q_2$ = 1Кл, помещённые на расстояние r = 1 м, взаимодействуют в соответствии с (1.3) с силой $F \cong 9 \cdot 10^9$Н (вес 900 тыс. тонн груза). На практике используют чаще всего микрокулоны (1мкКл = 10^{-6} Кл) и нано кулоны (1нКл = 10^{-9} Кл)

Влияние среды на взаимодействие электрических зарядов определяется безразмерной величиной ε – диэлектрической проницаемостью среды. Диэлектрическая проницаемость показывает, во сколько раз сила кулоновского взаимодействия в данной среде F, меньше чем в вакууме или воздухе F_0

$$F = \frac{k}{\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{F_0}{F}, \qquad (1.5)$$

1.5. Электрическое поле

Электрическим полем называется часть пространства, в котором проявляются электрические силы. Электрическое поле, в современных представлениях рассматривается как частная форма проявления (наряду с магнитным полем) электромагнитного поля, определяющая действие на электрический заряд силы, не зависящей от скорости его движения. Представление об электрическом поле было введено в науку М. Фарадеем в 19 в. Согласно Фарадею, каждый покоящийся заряд создаёт в окружающем пространстве электрическое поле. Поле одного заряда действует на другой заряд, и наоборот; так осуществляется взаимодействие зарядов (концепция близкодействия).

Закон Кулона позволяет установить ряд математических следствий, количественно характеризующих физические процессы, протекающие в электрических полях. В частотности, можно вычислить особенности взаимодействия системы точечных зарядов. Рассмотрим систему неподвижных точечных зарядов $\{q_1,q_2,q\}$. Определим силу, действующую на заряд q со стороны q_1 и q_2, считая необходимые расстояния известными

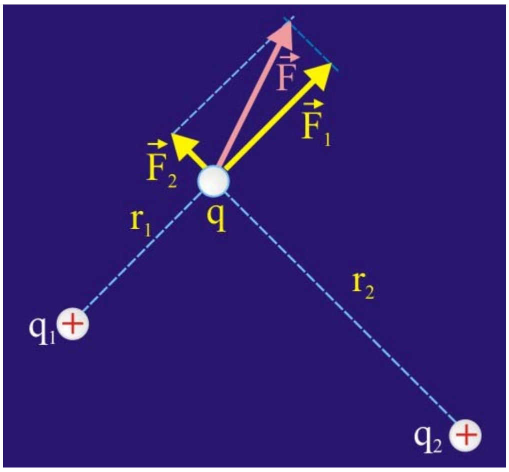


Рис. 1.2. Геометрическая сумма сил Кулона

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{qq_1}{r_1^2}; \quad F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{qq_2}{r_2^2};$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2;$$

$$\left|\vec{F}\right| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\left(\vec{F}_1;\vec{F}_2\right)};$$

Геометрически сумма сил определяется по правилу параллелограмма. Необходимо обратить внимание, что силы F_1 и F_2 пропорциональны заряду q, следовательно, и результирующая сила F тоже будет пропорциональна этому заряду. Если изменить величину зарядов q_1 и q_2, то параллелограмм сил изменит свою величину, но останется подобным первоначальному параллелограмму.

Поделим уравнения сил Кулона на величину заряда q, которую примем за условную единицу, т.е. будем рассматривать q как пробный заряд

$$\frac{F_1}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1^2} = E_1; \quad \frac{F_2}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2^2} = E_2; \quad \left[\frac{\text{Н}}{\text{Кл}} \equiv \frac{\text{В}}{\text{м}}\right]; \tag{1.6}$$

Векторная величина $\vec{E}$ называется напряжённостью электрического поля. Для изолированного точечного заряда, расположенного в вакууме или сухом воздухе, напряжённость создаваемого им электрического поля определяется непосредственно из уравнения закона Кулона

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{r^3}\vec{r}. \tag{1.7}$$

Как следует из уравнения (1.6), если поле создано положительным зарядом (напомним, что это понятие условное, принятое по общему соглашению), то вектор напряжённости электрического поля направлен от заряда во внешнее пространство по радиус-вектору, соединяющему заряд и данную точку пространства (рис. 1.3). В случае отрицательного заряда вектор напряжённости так же направлен по радиус-вектору, но из данной точки в сторону заряда.

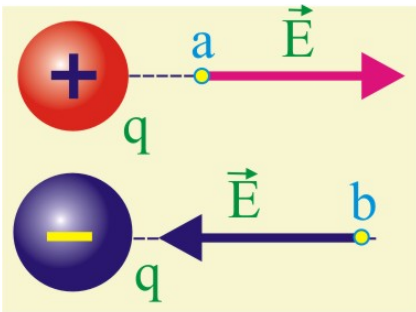


Рис. 1.3. Направление напряжённости электрического поля

Таким образом, если известна напряжённость электрического поля в какой-либо точке пространства, окружающего изолированный заряд, то можно однозначно определить величину и направление силы Кулона, которая возникнет при помещении в эту точку заряда q·

$$\vec{F} = q\vec{E}\,. \tag{1.8}$$

Пусть электрическое поле создаётся двумя разноимёнными точечными зарядами q_1 и q_2 с напряженностями, $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$. Результирующее поле может быть найдено по правилам сложения векторов, т.е. путём геометрического сложения (рис. 1.4)

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2\,.$$

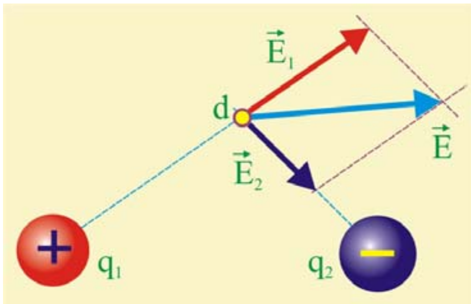


Рис. 1.4. Сложение электрических полей

Модуль результирующего вектора определится в этом случае как

$$\left|\vec{E}\right| = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\left(\vec{E};\vec{E}_2\right)}\,.$$

Правило векторного сложения электрических полей справедливо для производного числа зарядов. Если имеется ансамбль зарядов $\{q_1,\ q_2,\ \ldots..q_n\}$, создающих электрические поля с напряжённостями $\left\{\vec{E}_1, \vec{E}_2, \ldots\ldots \vec{E}_n\right\}$, то вектор напряжённости результирующего поля $\vec{E}$ в некоторой точке общего пространства определится уравнением

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n \equiv \sum_{i=1}^{i=n} \vec{E}_i\,. \tag{1.9}$$

Уравнение (1.9) выражает, так называемый, **принцип суперпозиции** (наложения) электрических полей. Следует отметить, что принцип суперпозиции выполняется, строго говоря, не всегда.

Так, например, на микроуровне, когда расстояния между зарядами сокращаются до величин порядка 10^{-15} м, этот принцип не выполняется. Вместе с тем на макрорасстояниях этот принцип является достаточно мощным и универсальным инструментом при исследовании электрических полей.

Как отмечалось выше, в качестве точечного заряда можно принимать и заряженные тела, в том случае если их геометрические размеры существенно меньше расстояний, на которых предполагается оценивать электрическое поле. При необходимости вычисления напряжённости поля от произвольного числа источников в заданной точке вычисляется напряжённость от каждого заряженного тела, рассматриваемого как точечный заряд, а затем в соответствии с принципом суперпозиции находится суммарная напряжённость.

На практике часто встречаются случаи, когда заряженное тело настолько велико, что использование модели точечного заряда не представляется возможным, в этом случае для определения параметров поля необходимо знать распределение зарядов внутри тела, т.е. по его объёму.

В этом случае поступают по аналогии с определением плотности тела, весь объём тела V разбивается на большое количество элементарных объёмов ΔV, заряд которых будет Δq. В этом случае заряженность тела можно охарактеризовать объёмной плотностью заряда

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dt}, \ [\text{Кл/м}^3].$$

Заряд, находящийся в элементе объёма dV определится как:

$$dq = \rho dV .$$

Для тел с преобладанием двух или одного размера применяется понятия поверхностной и линейной плотности заряда:

$$\delta = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}, \left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}\right]. \quad \tau = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta L} = \frac{dq}{dL}, \left[\frac{\text{Кл}}{\text{м}}\right].$$

Как и в случае гравитации, электрические поля не следует рассматривать как разновидность вещества. **Поля – это особая форма материи**, обладающая целым набором свойств, присущих веществу, например, импульсом и энергией.

За направление вектора $\vec{E}$ принимается направление силы, с которой поле действует на пробный заряд, помещённый в данную точку поля.

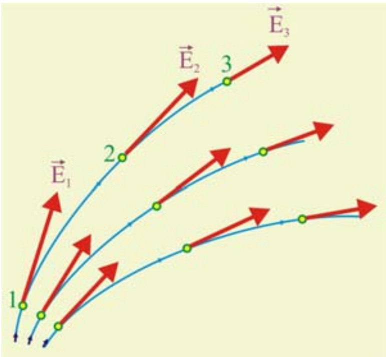


Рис. 1.5. Линии напряжённости

Графически (рис. 1.5) электрическое поле удобно изображать посредствам силовых линий. **Силовыми линиями** или линиями напряжённости электрического поля называются такие линии, касательные к которым в каждой их точке совпадают с вектором напряжённости поля.

Линии напряжённости электрического поля никогда не пересекаются, они начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных зарядах. На рис. 1.6 в качестве примера приведена структура поля диполя, представляющего собой два разноименных, одинаковых по модулю зарядов, отстоящих друг от друга на расстоянии ℓ.

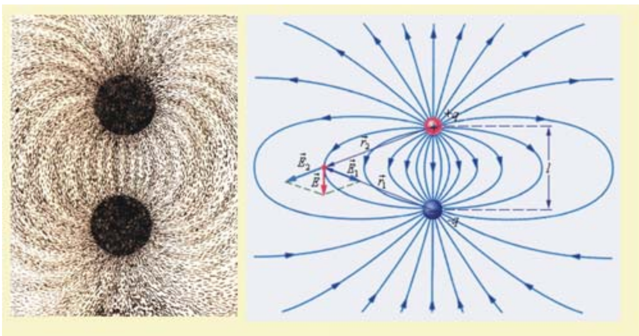


Рис. 1.6. Электрическое поле диполя

1.6. Теорема Остроградского-Гаусса

Теорема Остроградского-Гаусса была установлена русским математиком и механиком Михаилом Васильевичем Остроградским в виде некоторой общей математической теоремы, применительно к полю векторных величин, в частности, к векторному полю скоростей движущейся жидкости. Немецкий математик Карл Фридрих Гаусс применил её для электростатических полей. Теорема весьма упрощает процесс анализа электростатических полей ансамбля зарядов и заряженных тел.

Структуру векторного поля составляют векторные, или как их называют в физике, силовые линии – кривые в пространстве, касательная в каждой точке которых совпадает по направлению с определенным в этой точке пространства вектором поля.

Следует отметить, что в отличие от скалярных полей (например, поля температур) структура векторных полей гораздо более сложная. Это связано с характером поведения векторных линий в различных точках пространства. Так, могут существовать точки пространства, в которых векторные линии могут начинаться или заканчиваться. Если какая либо точка пространства является началом векторных линий, то говорят, что в этой точке пространства находится **источник векторного поля**. Точка же пространства, в которой заканчиваются векторные линии, называется **стоком векторного поля**.

Очевидно, что для электрического поля источниками и стоками являются, соответственно, положительные и отрицательные заряды. При этом, чем больше векторных линий начинается в данной точке пространства, тем мощнее и интенсивнее находящийся в этой точке пространства источник поля.

Рассмотрим часть пространства (рис. 1.7), занятого электрическим полем, характеризуемым некоторым распределением силовых линий. Для исследования поля важной характеристикой является «густота» силовых линий. Чем гуще силовые линии в данном месте поля, тем более интенсивен источник поля. Для количественных оценок количества силовых линий проходящих через единичную площадку служит **поток вектора напряжённости**, определяемый математически как:

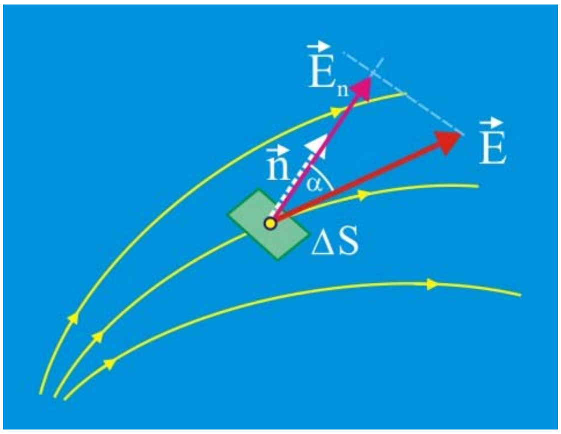


Рис. 1.7. Поток напряжённости

$$\Delta\Phi_E = \vec{E}_n \Delta S = E\cos\alpha\Delta S, \qquad (1.10)$$

где E_n – проекция вектора напряжённости на внешнюю нормаль $\vec{n}$.

Для определения потока вектора напряжённости через поверхность сложной формы (рис. 1.8), её разбивают на множество элементарных площадок, с тем, чтобы каждую из них можно было считать плоской. В этом случае к каждой площадке можно провести нормаль и установить однозначное значение угла α.

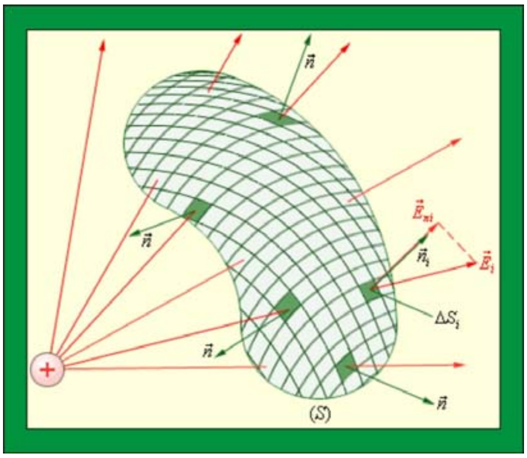


Рис. 1.8. Поток напряжённости через криволинейную поверхность

Поток через поверхность в этом случае определится в виде суммы элементарных потоков

$$\Phi_E = \sum_{i=1}^{i=n} E_{ni}\Delta S_i \,;$$

При достаточно большом количестве элементарных площадок, составляющих заданную криволинейную поверхность, поток определится в виде криволинейного интеграла

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS \,; \qquad (1.11)$$

Найдём поток напряжённости поля электрического заряда q, через замкнутую поверхность, в качестве которой для начала возьмём сферическую поверхность радиуса R (рис. 1.9). Заряд равноудалён от всех точек поверхности сферы, поэтому напряжённость поля по всей поверхности одинакова

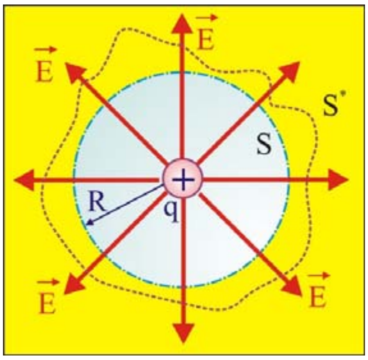


Рис. 1.9. Поток через произвольную поверхность

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{R^2};$$

Определим поток напряжённости через сферу

$$\Phi_E = \oint_S E\cos\alpha dS \,;$$

Вектор напряжённости во всех точках, принадлежащих сфере будет перпендикулярен её поверхности, т.е. будет совпадать с направлением внешней нормали, поэтому

$$\cos\alpha = \cos 0^{\circ} = 1\,;$$

Поток через сферическую поверхность в этом случае определится как:

$$\Phi_E = ES = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}\,;$$

Окружим далее заряд q оболочкой произвольной формы площадью S^*. В независимости от формы и размеров новой оболочки количество силовых линий пронизывающих её будет прежним, следовательно, величина потока останется неизменной.

Если внутри замкнутой поверхности будет содержаться n электрических зарядов, то их потоки необходимо просуммировать алгебраически

$$\Phi_E = \sum_{i=1}^{i=n}\frac{q_i}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{i=n} q_i \,; \qquad (1.12)$$

Полученное уравнение является математической записью теоремы Остроградского – Гаусса, которая звучит так:

Полный поток вектора напряжённости электростатического поля через замкнутую поверхность произвольной формы численно равен алгебраической сумме свободных электрических зарядов, заключённых внутри этой поверхности, поделенной на произведение электрической постоянной на диэлектрическую проницаемость среды $\varepsilon\varepsilon_0$.

1.7. Применение теоремы Остроградского – Гаусса

Использование теоремы Остроградского – Гаусса для вычисления напряжённостей электростатических полей особенно привлекательно в случаях когда заданное распределение зарядов обладает какой-либо геометрической симметрией, а общую структуру поля можно предсказать.

Рассмотрим методику применения теоремы на примере вычисления напряжённости поля, создаваемого заряженным протяжённым цилиндром радиусом R и длиной ℓ. Поле цилиндра симметрично относительно оси симметрии (рис. 1.10), векторы напряжённости направлен по радиусу, в этой связи целесообразно выбрать замкнутую поверхность S в виде соосного цилиндра радиусом r и длиной ℓ, с закрытыми торцами.

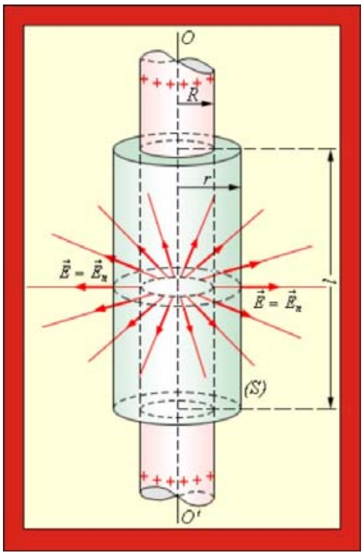


Рис. 1.10. Напряжённость поля заряженного цилиндра

При $r \geq R$ силовые линии пронизывать основания цилиндра не будут, поэтому поток через них будет нулевым. Теорема Остроградского – Гаусса в этом случае запишется так

$$\Phi = ES = E \cdot 2\pi r\ell = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\tau\ell}{\varepsilon\varepsilon_0};$$

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r},$$

где τ – линейная плотность заряда. Следует обратить внимание, что напряжённость поля не зависит от радиуса заряженного цилиндра, поэтому уравнение применимо и для тонкой заряженной нити.

Определим напряжённость поля, создаваемого равномерно заряженной плоскостью (рис. 1.11) с поверхностной плотностью заряда σ. Исходя из соображений симметрии, в данном случае в качестве гауссовой поверхности целесообразно выбрать цилиндр, закрытый с торцов, с осью, перпендикулярной заряженной плоскости. Векторы напряжённости будут перпендикулярны плоскости, поток напряжённости через боковую поверхность будет нулевым. Теорема Остроградского – Гаусса в этом случае приводит к уравнению:

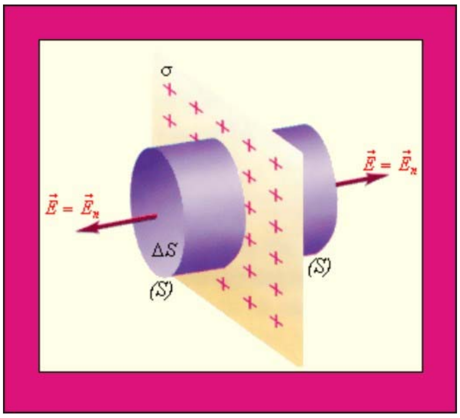


Рис. 1.11. Напряжённость равномерно заряженной плоскости

$$\Phi_E = 2E\Delta S = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon\varepsilon_0}; \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0};$$

1.8. Энергия электрического поля

Работа при перемещении заряда

В соответствие с законом сохранения, энергия не может беспричинно появляться и бесследно исчезать. Энергия может только трансформироваться из одного вида в другой. Ещё в V в. до с.л. Фалес милетский обратил внимание на то, что янтарная палочка, натёртая сухой кожей, способна притягивать всякую диэлектрическую мелочь. Т.е. просто палочка не может, а электризованная может совершать механическую работу.

Рис. 1.12. Электрический разряд

При разряде лейденской банки или конденсатора между электродами проскакивает искра, которая сопровождается целым рядом явлений:

- Образование акустических волн в виде треска и щелков (молния генерирует даже громы);
- Возникновение электромагнитного излучения в световом диапазоне;
- Выделение тепла;
- Химические реакции, в частности, образование озона O_3;

Так как электростатическое поле обладает энергией, значит оно способно совершать работу.

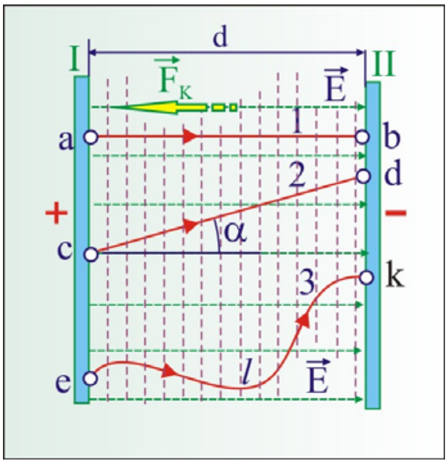


Рис. 1.13. Вычисление работы

Рассмотрим перемещение в электростатическом поле отрицательного заряда q между разноимённо заряженными пластинами A и B, т.е. внутри плоского конденсатора.

$$\delta A = \vec{F}_K d\vec{r};$$

$$A_{II\to I} = \int_{r_{II}}^{r_I} F_K \cos\alpha dr;$$

При перемещении заряда по траектории ba, заряд будет двигаться вдоль линии напряжённости поля, поэтому $\cos\alpha = 1$

$$A_{b\to a} = F_K(r_I - r_{II}) = F_K d;$$

Если заряд перемещать между пластинами по траектории dc, то

$$A_{d\to c} = F_K dc \cdot \cos\alpha = F_K d = qEd; \qquad (1.13)$$

Перемещение по криволинейной траектории даст такой же результат. Представим криволинейную траекторию в виде множества отрезков, чтобы каждый из них считать прямой линией, при этом $\cos\alpha$ для каждого отрезка будет различным, как положительным, так и отрицательным, что определит знаки элементарных работ δA. Алгебраическое суммирование элементарных работ приведет к ранее полученному результату. Полученные результаты удивительным образом напоминают ситуацию с работой силы тяжести, которая по замкнутой траектории всегда равна нулю. Аналогичным важным свойством обладает и электростатическое поле

$$A = q\oint_{\ell} \vec{E}d\vec{\ell} = 0\,; \tag{1.14}$$

Рассмотрим далее неподвижный точечный заряд Q, расположенный в воздухе ($\varepsilon = 1$) и создающий в окрестном пространстве электрическое поле напряжённостью

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3}\vec{r}$$

В поле перемещается пробный заряд q из начального положения 1 в конечное положение 2 вдоль произвольной криволинейной траектории, например I (рис. 1.14). Модуль силы Кулона, возникающей при взаимодействии зарядов, запишется следующим образом

$$, F_K = Eq = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\,.$$

Найдём далее работу, совершаемую силой Кулона на элементарном перемещении заряда $d\vec{r}$

$$\delta A = \vec{F}_K d\vec{r}\,.$$

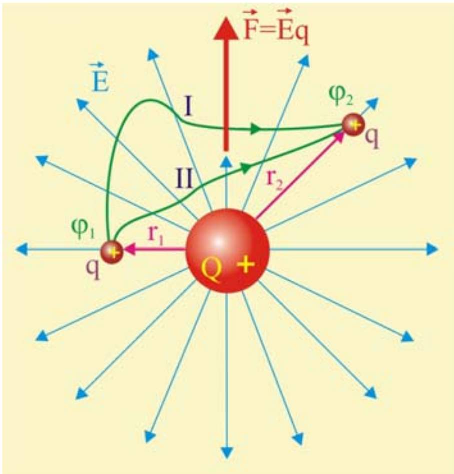


Рис. 1.14. Произвольные траектории

Как видно из уравнения, элементарная работа при перемещении точечного заряда в электрическом поле представляется скалярным произведением двух векторных величин, т.е. величина и знак работы зависит от взаимного направления $\vec{F}_K$ и $d\vec{r}$. Работа на конечном перемещении определится в виде интеграла

$$A_{1\to 2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{qQ\vec{r}}{r^3}d\vec{r} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2}\,.$$

Интеграл работы в общем случае зависит от положения начальной и конечной точек, а так же от формы траектории, по которой перемещается заряд q. Однако, как показано выше, для электрических полей неподвижных зарядов работа не зависит от формы траектории. В этом легко убедится, если из конечной точки 2 вернуть заряд в точку 1 по траектории, отличной от первоначальной. При перемещении заряда по любой замкнутой траектории, когда $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$ итоговая работа будет равна нулю, т.е. алгебраическая сумма работ, совершённых электрическими силами на замкнутом пути будет равна нулю

$$A_{1\to 2} + A_{2\to 1} = A_{1\to 2} - A_{2\to 1}\,.$$

Проинтегрируем уравнение работы

$$A_{1\to 2} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Электрическое поле неподвижных зарядов, таким образом, как и гравитационное поле, обладает свойством потенциальности, т.е. работа, про-

изводимая такими полями, не зависит от вида траектории, а определяется только положениями начальной и конечной точек перемещения.

Свойство потенциальности обусловлено тем обстоятельством, что в электростатических полях проявляются консервативные силы, дающие возможность каждую точку поля охарактеризовать с энергетических позиций. Действительно, совершаемая работа должна соответствовать определённому изменению энергии перемещаемого заряда. Подобное наблюдается в механике и определяется теоремой об изменении кинетической энергии

$$A_{1\to 2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = K_2 - K_1 .$$

Работа, совершаемая в электростатическом поле, совершается за счёт уменьшения потенциальной энергии движущегося заряда

$$A_{1\to 2} = \Pi_2 - \Pi_1, \quad \delta A = -d\Pi .$$

Как и в механике, абсолютное значение потенциальной энергии не обладает значимым физическим смыслом, более актуальным является изменение энергии, в связи, с чем необходимо представлять, что при бесконечном удалении зарядов друг от друга потенциальная энергия их взаимодействия будет стремиться к нулю, чем можно воспользоваться, подставив значение $r_2 \to \infty$ в уравнение работы

$$A_{1\to\infty} = \Pi_2 - \Pi_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r_1}\right) = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_1} = \Pi_1 . \qquad (1.15)$$

Потенциал электростатического поля

Для характеристики электрических полей оказалось более полезным рассматривать не силу Кулона в каждой точке поля, а отношение силы Кулона к пробному заряду, т.е. Величину напряжённости поля $\vec{E}$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_K}{q_0};$$

Полученные выше уравнения работы показывают, что так же как и напряжённость, работа пропорциональна величине заряда. В этой связи целесообразно рассмотреть отношение работы к пробному заряду, что даст новую характеристику поля **– потенциал**

$$\varphi = \frac{A}{q_0}; \qquad (1.16)$$

Различие между напряжённостью и потенциалом заключается в том, что вектор напряжённости характеризует конкретную точку поля, так же как и сила Кулона, а вот говорить о работе имеет смысл только в том случае, когда известно из какой точки поля началось движение и в какой точке оно закончилось.

Влияние поля на заряд пропорционально разности потенциальных энергий, измеряемой совершенной работой. Это означает, что отношение потенциальной энергии к величине заряда будет характерной величиной, которое можно рассматривать как энергетическую характеристику поля, как его **способность совершать работу** для каждой точки пространства, занятого электрическим полем. Таким образом,

$$\varphi = \frac{\Pi}{q_2} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}. \qquad (1.17)$$

В общем случае потенциал электрического поля в данной точке определяется уравнением

$$\varphi = \frac{\Pi}{q_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Сравнение уравнений (1.16) и (1.17) позволяет прийти к важному выводу: **при перемещении заряда из одной точки поля в другую будет производиться работа только в том случае, если потенциалы этих точек не одинаковы, если $\varphi_1 \neq \varphi_2$.**

В системе SI единицей потенциала является вольт

$$[\varphi] = \frac{[\Pi]}{[q]} = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{Кл}} = \text{В}.$$

Работу электрического поля $A_{1\to2}$ при перемещении заряда q из точки 1 в точку 2 можно определить как разность потенциалов φ_1 и φ_2 поля в этих точках

$$A_{1\to2} = q(\varphi_1 - \varphi_2), \quad \varphi_1 - \varphi_2 = -\int_{(1)}^{(2)} \vec{E} d\vec{s} \qquad (1.18)$$

При решении некоторых задач электростатики использование потенциала даёт ряд преимуществ по сравнению с напряжённостью. Для задания потенциала данной точки поля требуется всего одна величина, вместо трёх проекций вектора напряжённости, кроме того, величина разности потенциалов может быть достаточно просто измерена опытным путём.

Поверхность, во всех точках которой потенциал электрического поля имеет одинаковые значения, называется эквипотенциальной поверхностью или поверхностью равного потенциала.

Силовые линии электрического поля всегда перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям. На рис. 1.15. приведены силовые линии и эквипотенциальные поверхности двух разноимённых зарядов.

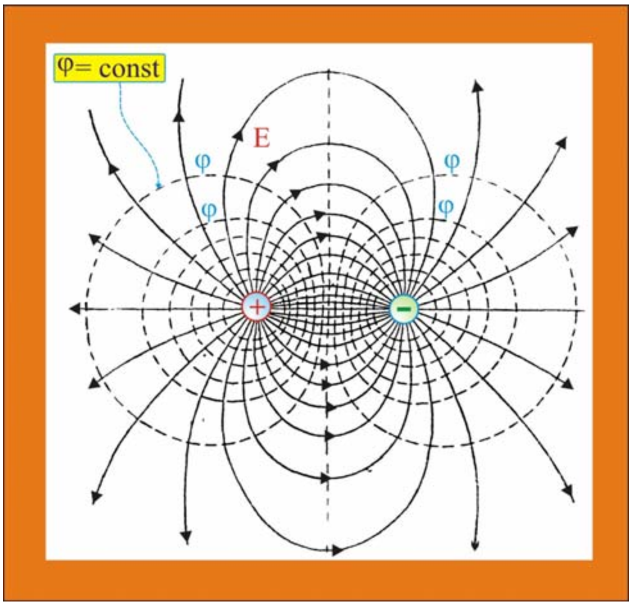


Рис. 1.15. Эквипотенциальные поверхности

1.9. Электрическая ёмкость

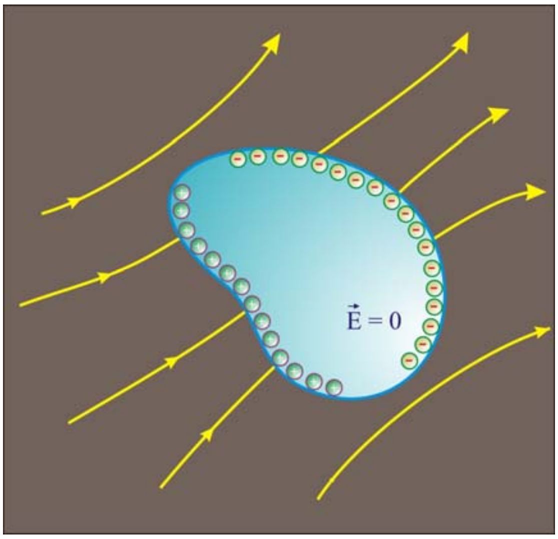


Рис. 1.16. Электризация проводника

Если нейтральный проводник поместить в электрическое поле, то через короткое время за счёт индукции произойдёт разделение зарядов проводника, которые разместятся на его поверхности (рис. 1.16), **напряжённость поля внутри проводника будет равна нулю**, а поверхность будет представлять собой эквипотенциальную поверхность.

Электрический потенциал на поверхности проводника пропорционален его заряду

$$Q = C\varphi. \tag{1.19}$$

Коэффициентом пропорциональности между зарядом и потенциалом проводника служит коэффициент **C**, именуемый **электроёмкостью**

$$C = \frac{Q}{\varphi}, \ [\text{Кл/В} = \text{Ф}]. \tag{1.20}$$

Электрическая ёмкость проводника или системы проводников – физическая величина, характеризующая способность накапливать заряды. Понятие ёмкости сложилось исторически в те времена, когда электрический заряд представлялся неосязаемой жидкостью, содержащейся в проводнике в большем или меньшем количестве.

Электрическая ёмкость уединённого проводника **C** рана заряду, который надо сообщить проводнику, чтобы его потенциал изменился на 1 вольт.

Электрическая ёмкость измеряется в фарадах [Ф], 1фарад – ёмкость такого уединённого проводника, при которой увеличение заряда проводника на 1 кулон увеличивает потенциал на 1 вольт. Такой ёмкостью обладает сфера радиусом $R \cong 9{\cdot}10^9$ м (радиус Земли равен $R_З \cong 6{,}4{\cdot}10^6$ м).

При решении практических задач используются следующие единицы электроёмкости:

- 1 микрофарада (мкФ): 1мкФ = $1{\cdot}10^{-6}$ Ф;
- 1 нанофарада (нФ): 1нФ = $1{\cdot}10^{-9}$ Ф;
- 1 пикофарада (пФ): 1 пФ = $1{\cdot}10^{-12}$ Ф.

Конденсатор – электрическая ёмкость, состоящая из двух проводников (обкладок), разделённых диэлектрическим слоем, толщина которого меньше линейных размеров обкладок

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} \equiv \frac{Q}{U}, \tag{1.21}$$

где Q – заряд конденсатора, $\Delta\varphi$ – разность потенциалов между обкладками (напряжение на конденсаторе U).

Плоский конденсатор с площадью обкладок S, расстоянием между ними d обладает электрической ёмкостью

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}. \tag{1.22}$$

Для получения требуемой электрической ёмкости или рабочего напряжения конденсаторы соединяют либо последовательно, либо параллельно.

При параллельном соединении, которое применяется для получения больших ёмкостей разность потенциалов на всех конденсаторах, входящих в состав батареи одинакова, а общий заряд батареи равен сумме зарядов конденсаторов

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3,$$

или с учётом формулы (1.21),

$$\frac{C_\Sigma}{U} = \frac{C_1}{U} + \frac{C_2}{U} + \frac{C_3}{U},$$

откуда:

$$C_\Sigma = C_1 + C_2 + C_3.$$

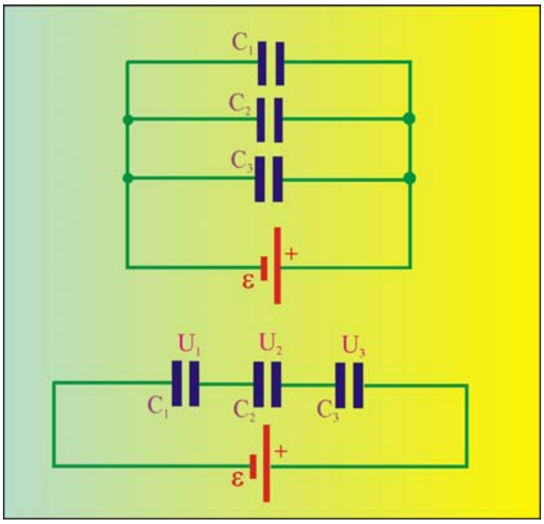


Рис. 1.17. Соединение конденсаторов

При параллельном соединении конденсаторов электроёмкость батареи равна сумме электроёмкостей

$$C_\Sigma = \sum_{i=1}^{i=n} C_i. \tag{1.23}$$

При последовательном соединении конденсаторов заряд на всех электроёмкостях одинаков, а общее напряжение равно сумме напряжений, т.е.

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_\Sigma,$$

$$U_\Sigma = U_1 + U_2 + U_3,$$

или, с учётом уравнения (1.21)

$$\frac{Q_\Sigma}{C_\Sigma} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3}, \;\Rightarrow\; \frac{1}{C_\Sigma} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

При последовательном соединении конденсаторов электроёмкость батареи в общем случае равна

$$\frac{1}{C_\Sigma} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{C_i}. \tag{1.24}$$

Энергия заряженного проводника

Рассмотрим вначале уединённый проводник, которому сообщили заряд q. Вокруг проводника возникнет электрическое поле, при этом потенциал проводника станет равным

$$\varphi = \frac{q}{C}; \quad \Rightarrow \quad q = C\varphi; \quad C = \frac{q}{\varphi};$$

Для увеличения заряда проводника необходимо из бесконечности перенести на него заряд dq, совершив при этом работу

$$dA = (\varphi - \varphi_\infty)dq; \quad \varphi_\infty \to 0; \quad \Rightarrow \quad dA = \varphi dq = \frac{1}{C}qdq\,;$$

При увеличении заряда проводника на dq совершается внешними силами работа dA, следовательно, энергия проводника увеличивается на dW

$$dW = dA = \frac{1}{C}qdq\,;$$

$$W = \int_0^W dW = \frac{1}{C}\int_0^q qdq = \frac{q^2}{2C}\,;$$

Так как $q = C\varphi$, то

$$W = \frac{C^2\varphi^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2}\,; \qquad (1.25)$$

Так как внутри проводника поле отсутствует, то будем далее считать, что оно локализовано в некоторой области пространства, окружающего заряженный проводник, с различной плотностью энергии в зависимости от величины напряжённости, в зависимости от расстояния от проводника.

Энергия конденсатора

Будем и далее считать конденсатор состоящим из двух параллельных пластин с диэлектриком между ними. Процесс зарядки конденсатора можно представить как процесс переноса порций заряда dq с одной пластины на другую, в результате чего одна пластина будет приобретать положительный заряд, а вторая отрицательный заряд, между пластинами станет нарастать разность потенциалов

$$\Delta\varphi = U = \frac{q}{C}; \quad \Rightarrow \quad W = \frac{CU^2}{2}\,; \qquad (1.26)$$

Запишем уравнения напряжённости поля между пластинами и ёмкости плоского конденсатора

$$E = \frac{U}{d}, \quad C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

где U – напряжение (разность потенциалов) между пластинами, d – расстояние между пластинами, S – площадь пластины.

Подставим значения E и C в уравнение энергии

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}E^2 d^2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}V,$$

где V – объём пространства между пластинами.

Объёмная плотность энергии плоского конденсатора определится уравнением

$$\varpi = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}, \quad \left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}\right]; \qquad (1.27)$$

Уравнение (1.27) справедливо для любых стационарных однородных электрических полей.

2. Постоянный электрический ток

2.1. Основные характеристики

Как отмечалось ранее, проводники являются таковыми по причине наличия в них большого числа носителей заряда, способных относительно легко перемещаться в пределах рассматриваемого образца.

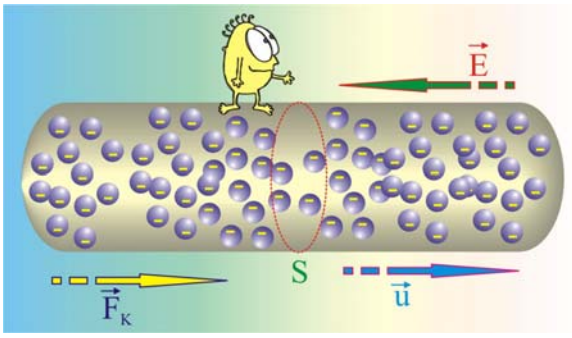


Рис. 2.1. Направленное движение носителей электрического заряда

Металлы, как правило, являются хорошими проводниками тепла и электрического тока именно благодаря свободным электронам. Если металлический проводник (рис.2.1) поместить в однородное электрическое поле напряжённостью $\vec{E}$, то на каждый свободный электрон ($e \cong 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $m_e \cong 1 \cdot 10^{-30}$ кг), в классическом представлении, будет действовать элементарная сила Кулона. Как и всякий материальный объект, электрон начнёт двигаться в направлении, противоположном направлению вектора напряжённости поля (элементарный заряд электрона принято считать отрицательным).

Если бы в распоряжении исследователей был маленький человечек, то он бы обнаружил, что через сечение проводника S, за которым он приставлен наблюдать, в одном направлении движутся электроны, что собственно и означает возникновение электрического тока. Направлением тока условились считать направление движения положительных зарядов.

Электрический ток представляется как направленное движение носителей зарядов, электронов или ионов.

Выделим в проводнике физически малый объём (рис. 2.2) внутри которого направленно движутся со средней скоростью $\vec{u}$ носители заряда.

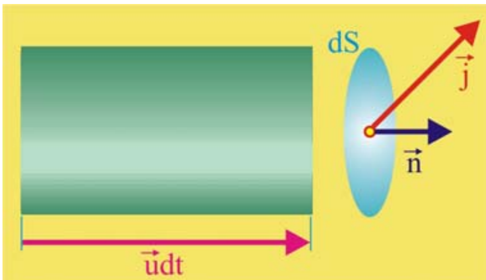


Рис. 2.2. Элементарный объём проводника

В металлах электроны, будучи свободными частицами, в соответствие с законами термодинамики находятся в состоянии непрерывного хаотического теплового движения, причём средняя скорость $<v>$ теплового движения определяется как

$$<v> = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}},$$

где $k_B \cong 1{,}4\cdot10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, m_e – масса электрона. В отличие от спонтанно направленной скорости теплового движения скорость под действием силы Кулона $\vec{u}$ будет направленной, её называют **средней дрейфовой скоростью**.

Пусть в рассматриваемом металлическом проводнике в единице его объёма содержится n электронов. Выделим далее элементарную площадку dS, перпендикулярную вектору дрейфовой скорости, являющуюся основанием цилиндра с протяжённостью udt. Все носители заряда, содержащиеся внутри этого цилиндра, через площадку dS за время dt перенесут заряд

$$dq = neudSdt\,.$$

Пронормируем уравнение относительно площади и времени

$$\frac{dq}{dSdt} = j = neu\,,$$

где j – плотность тока, т.е. сила тока i = dq/dt, отнесённая к площади. Плотность тока величина векторная, что определяется направленными свойствами дрейфовой скорости

$$\vec{j} = ne\vec{u}\,. \qquad (2.1)$$

Модуль плотности тока определяет величину заряда, переносимого электрическим полем в единицу времени через единицу площади. Направление вектора $\vec{j}$ совпадает с направлением дрейфовой скорости носителей заряда.

Используя понятие плотности тока, заряд, переносимый через площадку dS можно определить следующим образом

$$dq = j\,dS\,dt\,,$$

а силу тока, как

$$i = \frac{dq}{dt},\left[\frac{\text{Кл}}{\text{с}} = \text{А}\right]. \qquad (2.2)$$

Сила тока является величиной скалярной, т.к. представляет собой частное от деления двух не векторных величин.

О силе тока в 1 ампер говорят тогда, когда через поперечное сечение проводника в течение одной секунды перемещается заряд в 1 кулон.

На практике пользуются как большими 1 ампера величинами, килоамперами – (1 кА = 10^3 А), мегаамперами – (1 МА = 10^6 А), так и меньшими: миллиамперами –(1 мА = 10^{-3} А) и микроамерами (1мкА = 10^{-6} А). Размерность плотности тока получается из анализа очевидного соотношения

$$j = \frac{di}{dS},\ \left[\frac{\text{А}}{\text{м}^2}\right].$$

2.2. Проявления электрического тока

Магнитное действие тока

Если медный проводник расположить параллельно магнитной стрелке, ориентированной по магнитному полю Земли, то присутствие проводника не повлияет на ориентацию стрелки.

Однако, стоит пропустить по проводнику ток силой i, стрелка – изменит свою ориентацию, она повернётся вокруг своей оси, что свидетельствует о наличии вращающего механического момента.

Впервые такой опыт провёл в 1820 г. Эрстед, копенгагенский профессор физики.

Магнитное действие тока положено в основу работы магнитоэлектрических приборов для количественного измерения величины силы тока.

Химическое действие тока

Химическое действие электрического тока можно наблюдать, пропуская его через водный раствор медного купороса $CuSO_4$, в качестве электродов лучше всего использовать угольные стержни, но можно и из другого проводника, например, тривиальные гвозди. Соединив электроды с аккумуляторной батареей, и выждав некоторое время (несколько минут), можно обнаружить на отрицательном угольном электроде хорошо заметный невооружённым взглядом налёт блестящего слоя меди. На положительном электроде станет выделяться остаток SO_4, но он не обнаруживается, потому что в присутствии воды превращается в серную кислоту и молекулярный кислород

$$2SO_4 + H_2O = 2H_2SO_4 + O_2,$$

т.е. в растворе появится серная кислота, а на положительном электроде будет выделяться газообразный кислород. При силе тока через раствор более 5 А положительный электрод будет покрыт мелкими пузырьками, которые коагулируя укрупняются и под действием силы Архимеда всплывают на поверхность раствора.

Тепловое действие тока

Тут никаких специальных опытов ставить не требуется. Достаточно потрогать корпус любого работающего бытового устройства, чтобы стало ясно, при прохождении по проводникам электрического тока выделяется тепло. Пропуская через проводник ток, его можно нагреть до плавления металла и даже испарить, что собственно используется во всякого рода предохранителях, рабочий элемент которых выполняется и легкоплавких сплавов, с тем, чтобы при внезапном скачке силы тока расплавилась предохранительная вставка, а не основные проводники.

2.3. Закон Ома для участка цепи. Сопротивление

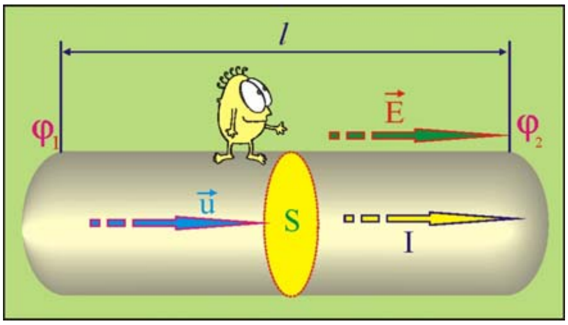


Рис. 2.3. Цилиндрический проводник с током

Для протекания в проводнике постоянного тока I необходимо поддерживать постоянную напряжённость электрического поля. Так как напряжённость поля равна градиенту потенциала, взятого с обратным знаком

$$\vec{E} = -q\left(\vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right),$$

то в данном случае

$$E = -\frac{d\varphi}{d\ell} = -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\ell} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\ell} = \frac{U}{\ell};$$

Георг Симон Ом в 1825 г. опубликовал работу, в которой установил экспериментально зависимость между силой тока I и напряжением на концах проводника U (закон Ома для участка цепи)

$$I = \frac{U}{R} = GU; \tag{2.1}$$

$$R = \frac{\rho\ell}{S}, \tag{2.2}$$

где R – электрическое сопротивление, измеряемое в Омах, G – проводимость материала проводника, ρ – удельное сопротивление, измеряемое в Ом·м, S – площадь поперечного сечения проводника, *l* – его длина.

Подставим в уравнение закона Ома значение сопротивления

$$I = \frac{U}{R} = \frac{US}{\rho\ell};$$

Поделим обе части уравнения на S

$$\frac{I}{S} = j = \frac{1}{\rho}\frac{U}{\ell} = \gamma E; \tag{2.3}$$

где γ – удельная проводимость, измеряемая в Ом/м.

Плотность тока $\vec{j}$, как видно из уравнения (2.3) является векторной величиной, потому что $\vec{E}$ – величина векторная, поэтому в общем случае закон Ома в дифференциальной форме запишется следующим образом

$$\vec{j} = \gamma\vec{E}; \tag{2.4}$$

Сопротивление зависит от внешних условий, особенно от температуры проводника. Экспериментально установлено, что

$$R(t) = R_0(1 + \alpha t);$$

$$\alpha = \frac{1}{273{,}15} \cong 0{,}004\frac{1}{^\circ C};$$

2.4. Закон Ома для замкнутой цепи

В заряженном проводнике ток невозможен, потому что концентрация зарядов на противоположных концах проводника происходит достаточно быстро, после чего движение зарядов прекращается. Если соединить разноимённо заряженные тела, то разность потенциалов между концами соединённых проводников быстро уменьшится и движение носителей заряда прекратится. Будет иметь место кратковременный импульс тока

Для поддержания постоянного движения зарядов к концу проводника необходимо прикладывать сторонние силы, подводить энергию извне. Создаваемое, таким образом, поле в проводнике будет совершать работу, перемещая заряды.

Природа внешних сил может быть различной. Так, например, в электрофорной машине разделение зарядов происходит за счёт совершения механической работы. Во всех гальванических элементах, включая аккумуляторы, энергия имеет химическое происхождение. В электрогенераторах разделением зарядов «занимается» магнитное поле.

В большинстве практических случаях носителями заряда являются отрицательно заряженные электроны, поэтому полем, создаваемым внешними силами они будут двигаться в сторону противоположную направлению вектора напряжённости

$$E_e = \frac{F_e}{q_0},$$

где E_e – напряжённость поля сторонних сил, F_e – сила, действующая на единичный положительный заряд ($q_0 = +1$).

При наличии приложенных к проводнику сторонних сил, закон Ома в дифференциальной форме (2.4) примет вид

$$\vec{j} = \gamma\left(\vec{E} + E_e\right); \qquad (2.5)$$

Рассмотрим далее замкнутую цепь (рис. 2.4) на участке 1 – 2 которой включён сторонний источник, гальванический элемент. Выделим в цепи малый элемент тока *dl* где сечение проводника S постоянно, вектор напряжённости поля направлен перпендикулярно поперечному сечению.

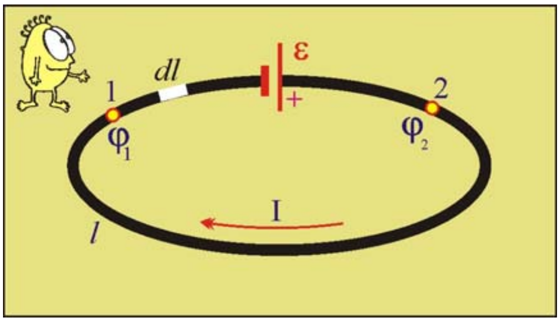


Рис.2.4. Замкнутая электрическая цепь

Запишем закон Ома в дифференциальной форме

$$j = \gamma\left(E + E_e\right);$$

Перепишем уравнение следующим образом

$$\frac{I}{S} = \gamma\left(-\frac{d\varphi}{d\ell} + E_e\right);$$

Введём в уравнение сопротивление выделенного участка проводника умножив обе части уравнения на

$$\rho d\ell = \frac{d\ell}{\gamma};$$

$$I\frac{\rho d\ell}{S} = -d\varphi + E_e d\ell;$$

Проинтегрируем уравнение по участку проводника 1 –2

$$I\int_1^2 \frac{\rho d\ell}{S} = -\int_1^2 d\varphi + \int_1^2 E_e d\ell;$$

$$I\int_1^2 \frac{\rho d\ell}{S} = \varphi_1 - \varphi_2 + \int_1^2 E_e d\ell;$$

Интеграл

$$\int_1^2 \frac{\rho d\ell}{S} = R_{1-2},$$

представляет собой сопротивление рассматриваемого участка, а

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U_{1-2},$$

разность потенциалов на выделенном участке проводника.

Введём обозначение

$$\int_1^2 E_e d\ell = \varepsilon.$$

Если рассмотреть всю цепь, т.е. совместить точки 1 и 2, то $\varphi_1 = \varphi_2$, $U_{1\text{-}2} = 0$, закон Ома для такой цепи запишется в виде

$$IR_\Sigma = \varepsilon; \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\varepsilon}{R_\Sigma}; \tag{2.6}$$

В реальных электрических цепях наряду внешних сопротивлений обязательно присутствует внутреннее сопротивление источника ЭДС r

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}; \tag{2.7}$$

Максимальное значение силы тока в цепи будет иметь место при $R \to 0$

$$I_{max} = \frac{\varepsilon}{r}; \quad U = 0,$$

такой режим называется режимом короткого замыкания источника ЭДС.

В режиме холостого хода, когда цепь разомкнута

$$U_{max} = \varepsilon;$$

2.5. Соединение сопротивлений

В электрических схемах используется последовательное и параллельное соединение сопротивлений, а так же их комбинация. При последовательном соединении (рис. 2.5) через все сопротивления в соответствии с законом сохранения заряда протекает ток одинаковой силы

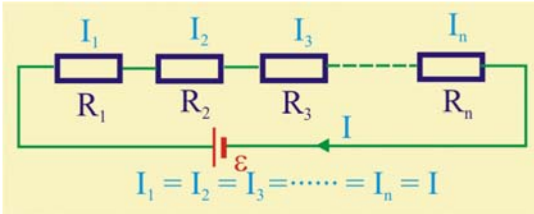


Рис. 2.5. Последовательное соединение сопротивлений

$$I_1 = I_2 = I_3 = \cdots = I_n = I,$$

а падение на каждом сопротивлении будет индивидуальным

$$U = IR_1 + IR_2 + IR_3 + \cdots + IR_n,$$

$$U = I(R_1 + R_2 + R_3 + \cdots R_n).$$

С другой стороны, на основании закона Ома – $U = IR_\Sigma$, откуда следует, что

$$R = \sum_{i=1}^{i=n} R_i. \qquad (2.8)$$

При последовательном соединении сопротивлений полное сопротивление равно сумме отдельных сопротивлений, составляющих схему, а падение напряжения на каждом сопротивлении пропорционально его величине, так что

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n.$$

Параллельное соединение сопротивлений (рис. 2.6) характеризуется тем, что на каждом сопротивлении падение напряжения будет одинаковым

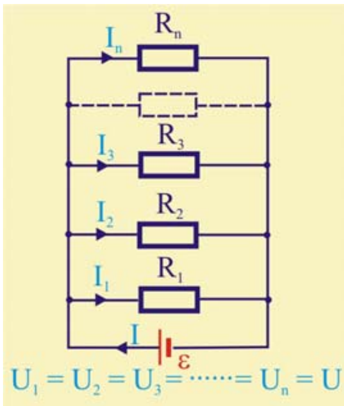


Рис. 2.6. Параллельное соединение сопротивлений

$$U = U_1 = U_2 = U_3 = \cdots = U_n.$$

По закону сохранения заряда при любом способе ветвления цепи заряд разделится по отдельным ветвям сообразно их электрическим сопротивлениям, но сумма зарядов, пришедших к точке ветвления должно быть равно сумме зарядов, покинувших её, другими словами

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_n,$$

$$I = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}\right).$$

С другой стороны, по закону Ома

$$I = \frac{U}{R_\Sigma}, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R_\Sigma} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{R_i}. \qquad (2.9)$$

В случае соединения в параллель двух сопротивлений

$$R_\Sigma = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}.$$

2.6. Разветвлённые цепи. Правила Кирхгофа

Уже в 1825 г. Марианини показал, что в разветвляющихся цепях ток распределяется по всем проводникам, независимо из какого они материала сделаны, металлические или жидкие. Вольта, в своё время, полагал, что если включить параллельно несколько проводников, один из которых металлический, то ток пойдёт именно по металлическому проводнику.

На основе экспериментальных данных и законов Ома, Густав Роберт Кирхгоф (1824 – 1887), выпускник Кенигсбергского университета, будучи заведующим кафедрой математической физики в Берлинском университете, получил ряд правил, которые позволяли проводить анализ сложных электрических цепей.

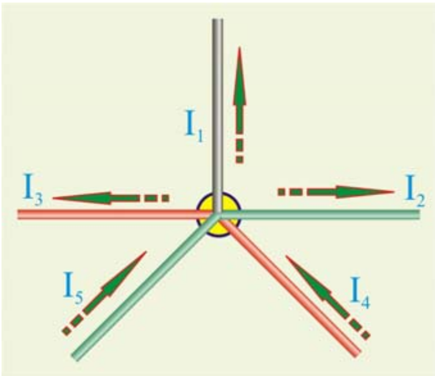


Рис. 2.7. Первое правило Кирхгофа

Первое правило Кирхгофа (правило узлов) является, по сути своей, законом сохранения заряда в сочетании с условием, что заряды не рождаются и не исчезают в проводнике. Это правило относится к узлам электрических цепей (рис. 2.7), т.е. точкам цепи, в которых сходится не менее трёх проводников. Если, принять за положительные направления подходящих к узлу токов, а отходящих – за отрицательные, то алгебраическая сумма токов в любом узле должна быть равна нулю, потому что заряды не могут скапливаться в узле

$$\sum_{i=1}^{i=n} I_i = 0, \quad I_5 + I_4 - I_3 - I_2 - I_1 = 0, \tag{2.10}$$

другими словами, **количество зарядов подходящих к узлу в единицу времени, равно количеству зарядов уходящих от данной точки за то же время**.

Второе правило Кирхгофа является обобщением закона Ома и относится к замкнутым контурам разветвлённой цепи.

В любом замкнутом контуре электрической цепи алгебраическая сумма произведений токов на сопротивления соответствующих участков контура равна алгебраической сумме ЭДС в этом контуре:

$$\sum_{i=1}^{i=n} I_i R_i = \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i \, . \tag{2.11}$$

Правила Кирхгофа чаще всего используются для определения величин сил токов в участках сложной цепи. Когда сопротивления и параметры источников тока заданы.

Покажем методику применения правил на примере расчёта цепи, изображённой на рис. 2.8. Так как уравнения, составленные по правилам Кирхгофа, являются обычными алгебраическими уравнениями, то их число должно быть равно числу неизвестных величин. Если анализируемая цепь содержит m узлов и n участков (ветвей), то по первому правилу можно составить $(m-1)$ независимых уравнений, а используя второе правило, ещё $(n-m+1)$ независимых уравнений.

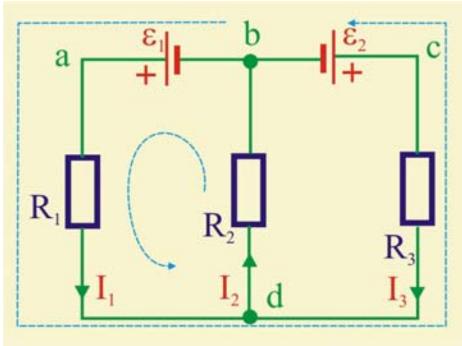


Рис. 2.8. Применение правил Кирхгофа

Действие 1. Выберем направление токов произвольным образом, соблюдая «правило» втекания и вытекания, узел не может быть источником или стоком зарядов. Если при выборе направления тока вы ошибётесь, то значение силы этого тока получится отрицательным. А вот направления действия источников тока не произвольны, они диктуются способом включения полюсов.

Действие 2. Запишем уравнение токов, соответствующее первому правилу Кирхгофа для узла b

$$I_2 - I_1 - I_3 = 0\,.$$

Действие 3. Запишем уравнения, соответствующие второму правилу Кирхгофа, но предварительно выберем два независимых контура. В данном случае имеется три возможных варианта: левый контур $\{badb\}$, правый контур $\{bcdb\}$ и контур вокруг всей цепи $\{badcb\}$. Так как найти надо всего три значение силы тока, то ограничимся двумя контурами. Направление обхода значения не имеет, токи и ЭДС считаются положительными, если они совпадают с направлением обхода.

Обойдем, контур $\{badb\}$ против часовой стрелки, уравнение (5.70) примет вид

$$I_1R_1 + I_2R_2 = \varepsilon_1\,.$$

второй обход совершим по большому кольцу $\{badcb\}$

$$I_1R_1 - I_3R_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2\,.$$

Действие 4. Образуем систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} I_2 - I_1 - I_3 = 0, \\ I_1R_1 + I_2R_2 = \varepsilon_1, \\ I_1R_1 - I_3R_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2. \end{cases}$$

Эта система достаточно простая, её решать можно, выразив силу тока, например I_3 из третьего уравнения системы

$$I_3 = \frac{I_1R_1 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2}{R_3}\,.$$

А далее, реализуем второе уравнение, определив из него ток I_2

$$I_2 = \frac{\varepsilon_1}{R_2} - I_1\frac{R_1}{R_2}\,.$$

Подставим полученные значения токов I_3 и I_2 в уравнение узлов

$$\frac{\varepsilon_1}{R_2} - I_1\frac{R_1}{R_2} - I_1 - \frac{I_1R_1 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2}{R_3} = 0.$$

Это уравнение содержит уже один неизвестный ток, т.е. оно решается вполне

$$I_1 = \frac{\varepsilon_1(R_2 + R_3) - \varepsilon_2 R_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}.$$

Зная силу тока I_1, можно определить I_2

$$I_2 = \frac{\varepsilon_1 R_3 + \varepsilon_2 R_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}.$$

Аналогично определяется и третья неизвестная сила тока.

Использование правил Кирхгофа может привести к достаточно сложным алгебраическим уравнениям. Ситуация упрощается если цепь содержит некие симметричные элементы, в этом случае могут существовать узлы с одинаковыми потенциалами и ветви цепи с равными токами, это существенно упрощает уравнения. Классическим примером такой ситуации является задача об определении сил токов в кубической фигуре, составленной из одинаковых сопротивлений (рис. 2.9).

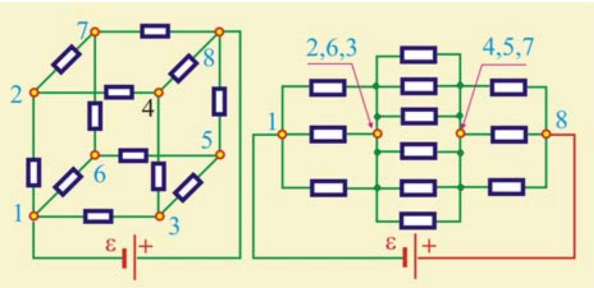


Рис. 2.9. Узлы равного потенциала

В силу симметрии цепи потенциалы точек 2,3,6 , так же как и точек 4,5,7 будут одинаковы, их можно соединять, так как это не изменит в плане распределения токов, но схема существенно упростится. Комбинация параллельно и последовательно соединённых сопротивлений при выполнении расчётов не вызывает затруднений.

Рассмотренные выше цепи включали в свой состав идеальные источники тока, внутреннее сопротивление которых равно нулю. Если источник тока реальный, то внутреннее сопротивление должно включаться в уравнения второго правила Кирхгофа. Покажем это на следующем примере. Пусть два источника с одинаковыми ЭДС ε и внутренними сопротивлениями r включаются в цепь двумя способами – параллельно и последовательно. Требуется определить, при каком соединении сила тока в нагрузке будет больше, если нагрузочное сопротивление R одинаково (рис. 2.10)

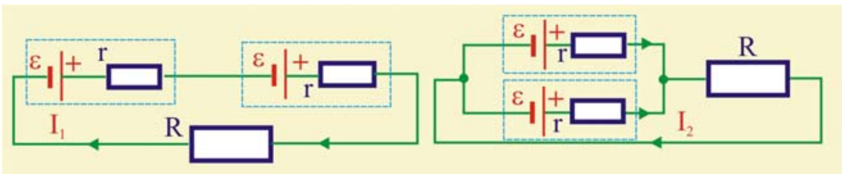


Рис. 5.25. Два способа включения источников тока

Для последовательного и параллельного соединения сопротивлений правила Кирхгофа дают:

$$I_1 = \frac{2\varepsilon}{R + 2r}. \quad I_2 = \frac{\varepsilon}{R + \frac{r}{2}}.$$

2.7. Закон Джоуля – Ленца

Если на концах неподвижного проводника имеется разность потенциалов $U = (\varphi_2 - \varphi_1)$, то электрический заряд Δq, перемещаясь из точки 2 с большим потенциалом, в точку 1, с меньшим потенциалом теряет часть своей энергии на преодоление сопротивления

$$dW = dq \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) = dq \cdot U .$$

Заряд можно выразить через силу тока и время

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad \Rightarrow \quad dq = Idt ,$$

потери энергии с учётом этого запишется так

$$dW = IUdt .$$

Вполне резонен вопрос: «Куда девается эта энергия?». В кинетическую энергию она явно не переходит, т.к. никаких движений в макроскопическом варианте не возникает. В неподвижном проводнике движущиеся носители заряда, в соответствие с классической теорией электропроводности, сталкиваются с ионами металла и, отдавая им энергию, повышают тем самым температуру проводника. Это было замечено и экспериментально, что всякий проводник, по которому течёт ток, имеет температуру выше окружающей среды.

Другими словами, носители заряда, получая энергию от электрического поля, часть её расходуют на нагревание проводника, таким образом, работа, производимая при перемещении заряда, имеет вполне определённый тепловой эквивалент

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} IUdt .$$

Если сила тока и разность потенциалом во времени не меняются, то уравнение количества тепла упрощается

$$\Delta Q = IU\Delta t = I^2 R\Delta t = \frac{U^2}{R}\Delta t . \tag{2.12}$$

Уравнение (2.12) выражает собой закон Джоуля – Ленца. Этот закон установлен был в 1841г. Дж. Джоулем и в 1842 г. независимо, Эмилем Христофоровичем Ленцем, профессором Петербургского университета.

Закону можно придать иное математическое выражение, если ввести в рассмотрение параметры сопротивления и плотность тока для проводника конечной длинны

$$\delta Q = I^2 \rho_R \frac{d\ell}{s} dt = \rho_R j^2 s d\ell dt ,$$

$$Q = \rho_R j^2 V dt , \tag{2.13}$$

где V – объём проводника, ρ_R – удельное сопротивление.

Рассмотрим пример применения закона Джоуля – Ленца при замыкании обкладок конденсатора ёмкостью С, заряженного до разности потенциалов U на сопротивление R. Определим количество выделившегося при этом тепла.

Запишем формулу количества тепла, выделяющееся в проводнике, в следующем виде

$$Q = \int_0^{t\infty} IUdt = \int_0^{\infty} i^2(t)Rdt .$$

Подставим зависимость силы тока от времени

$$i(t) = i_m e^{-\frac{2t}{RC}} ,$$

$$Q = \frac{U^2}{R}\int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{RC}}dt = \frac{U^2}{R}\frac{RC}{2} = \frac{CU^2}{2} .$$

Можно видеть, что вся электрическая энергия, запасённая в конденсаторе, переходит в тепло. Тепловая мощность (энергия, выделяемая в единицу времени) при этом определится как

$$N = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = IU = I^2R = \frac{U^2}{R} . \qquad (2.14)$$

Определим далее мощность, выделяемую в единице объёма проводника, т.е. плотность теплового потока в проводнике длиной *l* и площадью поперечного сечения S. Разность потенциалов на концах проводника в уравнении можно выразить через напряжённость поля $U = E\ell$, а его сопротивление – через удельное сопротивление

$$R = \frac{\rho\ell}{S} = \frac{\ell}{\lambda S} ,$$

откуда следует, что

$$N = \frac{U^2}{R} = E^2\ell^2\frac{\lambda S}{\ell} = V\lambda E^2 .$$

Плотность тепловой мощности из уравнения N запишется следующим образом

$$\varpi = \frac{N}{V} = \lambda E^2 = \vec{j}\cdot\vec{E} . \qquad (2.15)$$

3. Магнитное поле

3.1. Магнитное поле постоянных токов

Магнитные поля обладают рядом свойств, подтвержденных многочисленными экспериментами:

- Движущиеся ускоренно электрические заряды создают в окружающем пространстве магнитное поле;
- На движущиеся заряды со стороны магнитного поля действует сила, перпендикулярная направлению движения;
- Силовые линии магнитного поля непрерывны и имеют вихревой характер, не имеют, в отличие от силовых линий электрического поля, начала и конца;
- До настоящего времени в природе не обнаружены изолированные магнитные заряды.

Силовую характеристику магнитного поля в силу исторически сложившейся традиции именуют индукцией магнитного поля.

Индукция магнитного поля векторная величина $\vec{B}$, значение которой устанавливается, как правило, по поведению магнитной стрелки или миниатюрной пробной катушки с током (рис. 3.1).

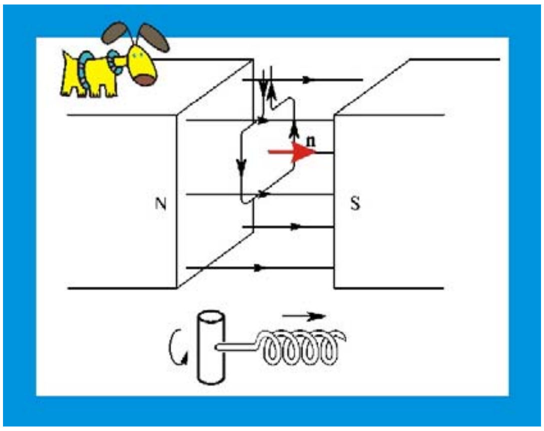


Рис. 3.1. Рамка с током в магнитном поле

Рамка должна быть как можно меньшего размера, чтобы реагировать на магнитное поле в малом объёме. Ток, пропускаемый по измерительному устройству должен создавать собственное магнитное поле не искажающее измеряемое.

Направление вектора магнитной индукции $\vec{B}$ совпадает с направлением нормали $\vec{n}$ к плоскости рамки. Направление нормали выбирается по правилу правого винта. Если винт вращать в направлении тока, то поступательное перемещение винта укажет направление нормали и вектора магнитной индукции.

При отклонении положения рамки на угол α от установившегося положения на её вертикальные стороны будет действовать пара сил, которые обеспечивают возникновение механического момента относительно оси вращения рамки Z

$$M_Z\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2\right) \approx IS\sin\alpha\,;$$

Момент будет иметь максимальное значение при $\sin\alpha = 1$, т.е. при $\alpha = 90^o$, т.е. когда плоскость рамки расположена перпендикулярно направлению вектора магнитной индукции.

Магнитное поле характеризуют отношением максимального значения момента к произведению силы тока в рамке и её площади

$$B = \frac{M_{max}}{IS}; \qquad (3.1)$$

Уравнение (3.1) позволяет установить размерность магнитной индукции. За единицу магнитной индукции принята индукция магнитного поля, в котором на контур с силой тока в 1 А действует максимальный вращающий момент 1 Н·м, такая единица называется Тесла (Тл)

$$1\text{Тл} = \frac{1\text{Н}\cdot\text{м}}{1\text{А}\cdot 1\text{м}^2} = 1\frac{\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}} = 1\frac{\text{кг}}{\text{А}\cdot\text{с}^2};$$

Направление магнитных силовых линий в каждой точке пространства, занятого магнитным полем, совпадает с направление вектора магнитной индукции. Силовые линии магнитного поля визуализируют мелкими железными опилками, которые намагничиваясь, начинают ориентироваться вдоль силовых линий (рис. 3.2 – 3.5)

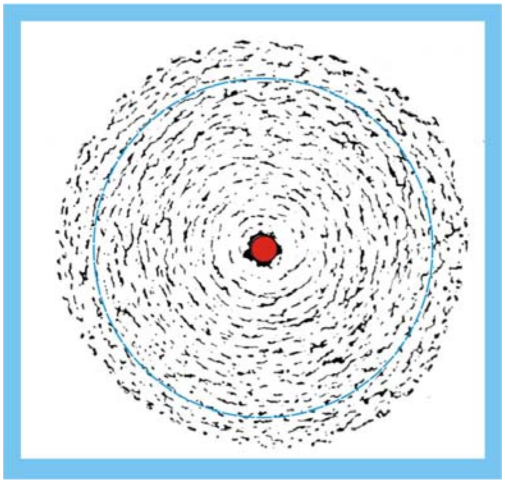


Рис. 3.2. Прямолинейный проводник с током

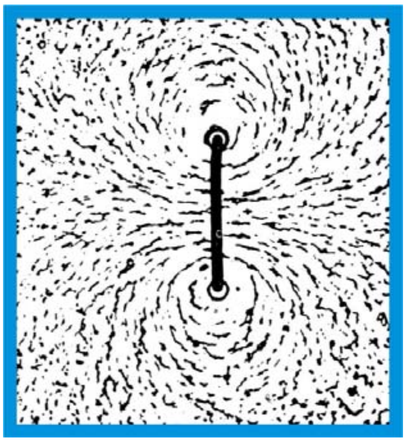


Рис. 3.3. Круговой виток проводника с током

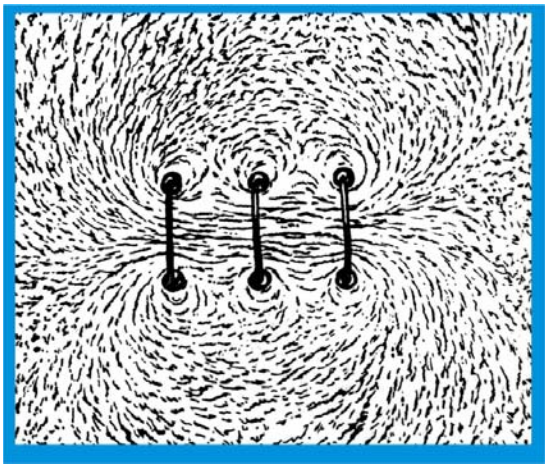


Рис. 3.4. Три витка с током

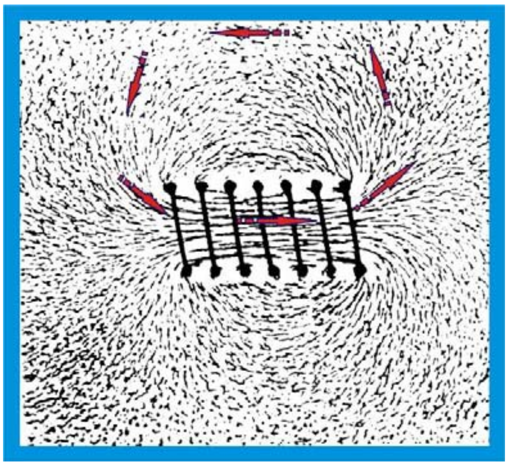


Рис. 3.5. Катушка с током

3.2. Движение электрона в магнитном поле

На основании обобщения многочисленных экспериментальных фактов был получен закон, определяющий количественно величину силы (силы Лоренца), действующей на заряд, движущийся в магнитном поле

$$\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B}), \tag{3.2}$$

где q – электрический заряд, $\vec{v}$ – вектор скорости заряда, $\vec{B}$ – вектор магнитной индукции. Уравнение силы Лоренца можно записать в скалярной форме

$$F_L = qvB\sin(\vec{v};\vec{B}). \tag{3.3}$$

Уравнение (3.2) тоже позволяет определить размерность магнитной индукции, разрешив уравнение относительно B

$$B = \frac{F_L}{qv}, \quad [B] = \frac{1Н \cdot 1с}{1Кл \cdot 1м} = \frac{Н}{А \cdot с} = Тл.$$

Единица индукции магнитного поля Тесла достаточно большая величина, в лабораторных условиях путём специальных усилий удаётся получить поле с B ≅ 8 – 10 Тл.

Из уравнения (3.2) можно видеть, что сила Лоренца всегда направлена перпендикулярно скорости движения частицы, то она не совершает работы, это говорит о неизменности кинетической энергии частицы при её движении в магнитном поле. Сила Лоренца меняет лишь направление вектора скорости, сообщая частице нормальное ускорение. При движении частицы в комбинации электрического и магнитного полей, с их стороны будет проявляться суммарная сила

$$\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B}) = q[\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})]. \tag{3.4}$$

Рассмотри более подробно некоторые механические аспекты движения заряженной частицы в магнитном поле. Пусть электрон с зарядом e влетает в магнитное поле (рис. 3.6) перпендикулярно вектору индукции, т.е. $\vec{v} \perp \vec{B}$, что приведет, в конечном счете, к движению по окружности фиксированного радиуса R. В этом случае

$$F_L = evB, \quad \sin(\vec{v};\vec{B}) = 1.$$

Для случая такого движения электрона, каковой станет находиться на стационарной круговой орбите, можно записать второй закон Ньютона исходя из равенства модулей силы Лоренца и силы, вызванной нормальным ускорением частицы

$$\frac{m_e v^2}{R} = evB.$$

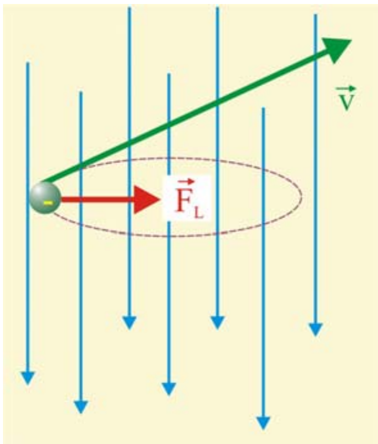


Рис. 3.6. Движение электрона в однородном магнитном поле

Угловая скорость и период обращения электрона, при этом, определятся как

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{eB}{m_e}. \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m_e}{eB}.$$

3.3. Закон Био – Савара – Лапласа

На практике невозможно выделить отдельный участок тока и непосредственно измерить созданное им магнитное поле. Измеряется магнитная индукция, созданная одновременно всеми элементами тока. Закон Био – Савара – Лапласа позволяет, вычислив магнитное поле элементарного тока, получить расчетным путём магнитную индукцию проводника произвольной формы.

Закон формулируется так:

Элемент проводника *Δl*, по которому протекает ток силой *I*, создаёт в вакууме магнитное поле, индукция *ΔB* которого в некоторой точке обратно пропорциональна квадрату расстояния r от элемента тока то точки наблюдения.

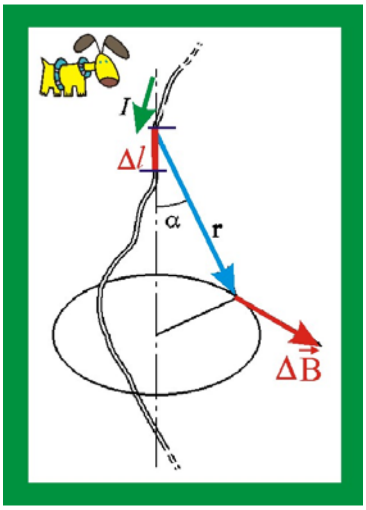


Рис. 3.7. Определение ΔB

В системе СИ закон записывается уравнением

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta\ell\sin\left(\Delta\vec{\ell};\vec{r}\right)}{r^2}, \qquad (3.5)$$

где μ_0 – магнитная постоянная. Вектор $\Delta\vec{B}$ перпендикулярен плоскости, в которой располагаются элемент тока $\Delta\vec{\ell}$ и радиус-вектор $\vec{r}$.

Направление вектора $\Delta\vec{B}$ определяется правилом правого винта, оно совпадает с направлением вращения головки при его поступательном движении по направлению тока в проводнике.

Применяя правило векторного умножения закон Био – Савара – Лапласа можно переписать в виде:

$$\Delta\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\left(\Delta\vec{\ell}\times\vec{r}\right)}{r^3}; \qquad (3.6)$$

Поле кругового тока

Вычислим, используя закон Био – Савара – Лапласа поле кругового витка радиусом R с током I. Векторы $\Delta\vec{B}$ всех элементарных токов *Δl* направлены перпендикулярно плоскости рисунка (рис. 3.8) от наблюдателя.

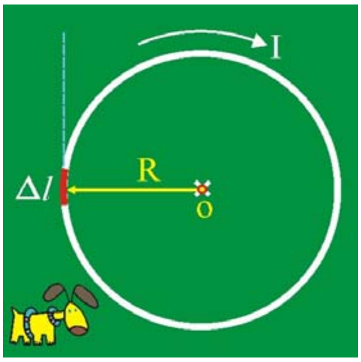


Рис. 3.8. Поле кругового тока

Суммарный вектор индукции кругового тока будет совпадать с осью симметрии витка, и направлен тоже за плоскость рисунка, модуль вектора индукции $\vec{B}$ равен сумме всех ΔB.

Любой элемент тока расположен от центра на одинаковом расстоянии R = r, а их направления с направлениями в точку наблюдения составляют угол $\alpha = 90^o$, $\sin\alpha = 1$.

Используя уравнение закона, получим:

$$B=\sum_{i=1}^{i=n}\Delta B_i=\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\sum_{i=1}^{i=n}\Delta\ell_i\,;\quad \sum_{i=1}^{i=n}\Delta\ell_i=2\pi R;\quad\Rightarrow\quad B=\frac{\mu_0 I}{2R};$$

Поле прямолинейного проводника с током

Качественная картина магнитного поля в окрестностях прямолинейного проводника приведена на рис. 3.2, сделаем количественные оценки магнитного поля. Выберем в окрестностях проводника (рис. 3.9) произвольную точку A в которой будем определять посредствам закона Био – Савара – Лапласа напряжённость dB от элемента *dl*

$$dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\sin\alpha\, d\ell}{r^2}.$$

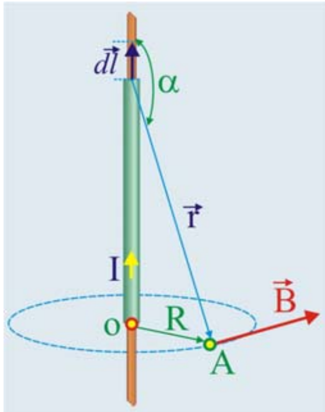


Рис. 3.9. Прямолинейный проводник с током

Если всю длину проводника разбить на бесконечное множество элементарных участков, то обнаружится, что направление векторов элементарных индукций будет совпадать с направлением касательных к окружностям, проведенным в соответствующих точках пространства, в плоскостях, ортогональных проводнику. Это даёт основание для получения суммарного значения индукции проинтегрировать уравнение dB

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\alpha\, d\ell}{r^2}.$$

Выразим значение r и sinα через переменную величину *l*

$$r=\sqrt{R^2+\ell^2},$$

$$\sin\alpha=\frac{R}{\sqrt{R^2+\ell^2}}.$$

Подставим полученные значения r и sinα в подынтегральное выражение уравнения

$$B=\frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\ell}{\sqrt{\left(R^2+\ell^2\right)^3}},$$

$$B=\frac{\mu_0 IR}{4\pi}\frac{\ell}{R^2\sqrt{R^2+\ell^2}}\Bigg|_{\ell=-\infty}^{\ell=\infty}=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

Существенно отметить, что полученное уравнение сходно с уравнением напряжённости электрического поля заряженного проводника

$$E=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 R}.$$

Однако, вектор напряжённости электрического $\vec{E}$ поля направлен радиально, т.е он перпендикуляреn вектору индукции $\vec{B}$ в одноимённой точке.

Поле проводника произвольной формы

Рассмотрим проводник произвольной формы по которому течёт постоянный ток величиной I (рис.3.10). Выделим прямолинейный участок проводника элементарной длиной $d\vec{\ell}$. За время dt через этот участок протекает электрический заряд величиной

$$q = e \cdot n_e \cdot s \cdot d\ell ,$$

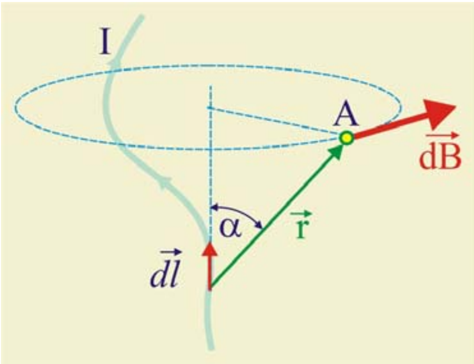


Рис. 3.10. Магнитное поле элемента тока

где n_e – концентрация электронов, s – поперечное сечение проводника, e – заряд электрона.

Подставим уравнение заряда в уравнение:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q(\vec{v} \times \vec{r})}{4\pi r^3};$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e n_e s d\ell(\vec{v} \times \vec{r})}{r^3}.$$

Величину тока в проводнике можно представить следующим образом

$$I = e n_e s v ,$$

что даёт основания записать уравнение $d\vec{B}$ в виде

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell(d\vec{\ell} \times \vec{r})}{r^3},$$

Модуль элементарного вектора индукции определится, при этом, как

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell \sin(d\vec{\ell} \times \vec{r})}{r^2}.$$

Уравнение совпало с экспериментами Био и Савара, которое было сформулировано в виде закона Лапласом. Этот закон, закон Био – Савара – Лапласа определяет величину магнитной индукции в любой точке поля, создаваемого током постоянной величины, протекающим через проводник произвольной формы. Применительно к вектору магнитной индукции справедлив принцип суперпозиции, т.е. сложения элементарных индукций от различных участков проводника заданной длины. Покажем применение закона на проводниках различной формы.

3.4. Магнитный поток

Представим себе плоскую площадку площадью S (рис. 3.11), расположенную в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ произвольным образом.

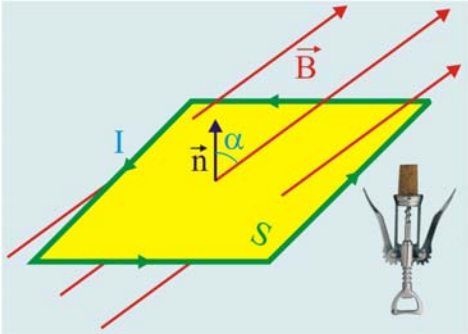


Рис. 3.11. Магнитный поток

Магнитным потоком или потоком вектора магнитной индукции через площадку S называется величина

$$\Phi_B = BS\cos\alpha = B_n S, \qquad (3.6)$$

где α – угол между вектором индукции и внешней нормалью к рассматриваемой площадке, B_n – проекция вектора индукции на направление нормали.

Магнитный поток является скалярной величиной, численно равный полному количеству линий магнитной индукции, пронизывающих данную поверхность.

Так как в уравнение магнитного потока входит $\cos\alpha$, то поток может быть положительным, отрицательным или нулевым, в зависимости от величины угла между вектором индукции и внешней нормалью.

Чаще всего понятие магнитного потока используется при рассмотрении замкнутых проводящих контуров с электрическим током, которые ограничивают рассматриваемые поверхности. Положительное направление нормали $\vec{n}$ связывают с направлением токов, применяя правило правостороннего буравчика. Если вращать буравчик, штопор, винт (как больше нравится) в направлении течения тока, то поступательное движение образующей укажет направление нормали. Из этого обстоятельства, в частности, следует, что если магнитное поле создаётся током замкнутого контура, то поток собственного магнитного поля через ограничивающую контуром поверхность всегда положителен

В случае неоднородного поля или не плоской поверхности (рис. 3.12) её разбивают на множество элементарных площадок dS так, чтобы в их пределах поверхности можно было считать плоскими, а поле однородным. Поток через элементарную площадку определится как

$$d\Phi_B = B_n dS,$$

а суммарный магнитный поток запишется в виде интеграла

$$\Phi_B = \int_S B_n dS.$$

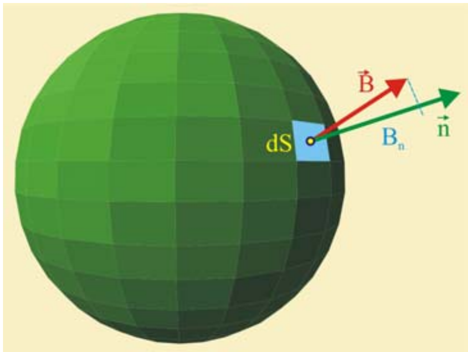


Рис. 3.12. Магнитный поток через выпуклую поверхность

Если магнитную индукцию выражать в теслах, а площадь в квадратных метрах, то получится единица потока

$$[\Phi_m] = \text{Тл} \cdot \text{м}^2 = \text{Вб (вебер)}.$$

3.5. Закон Ампера

Ампер и его многочисленные последователи опытным путём установили, что на проводники с током действуют механические силы, вызванные наличием магнитного поля. Это действие можно описать количественно. Если поперечное сечение проводника S, а его длина в направлении тока l, то электрический заряд, сосредоточенный в элементарном объёме $dV = Sdl$, будет определяться количеством сосредоточенных в нём носителей заряда, в частности – электронов

$$dN = ndV = nSd\ell,$$

суммарный электрический заряд которых определится как

$$dQ = qdN = qnSd\ell,$$

где q – заряд носителя, n – концентрация носителей. Силу, действующую остов кристаллической решётки в рассматриваемом элементе проводника, можно определить из условий равновесия электрических и магнитных сил

$$quB = qE, \Rightarrow E = Bu,$$

где u – скорость движения зарядов в проводнике.

Выразим дрейфовую скорость носителей заряда через плотность тока, текущего по проводнику

$$u = \frac{j}{qn}, \quad E = \frac{Bj}{qn}.$$

Искомую элементарную силу, таким образом можно представить следующим образом

$$dF_A = EdQ = \frac{B}{qn} j \cdot qnSd\ell = IBd\ell.$$

В векторной форме сила, действующая на элементарную длину проводника $d\vec{\ell}$, по которому течёт ток величиной I, определится векторным соотношением

$$d\vec{F}_A = I\left(d\ell \times \vec{B}\right).$$

В случае прямолинейного проводника магнитная индукция во всех точках пространства вдоль всей его длины l магнитная индукция будет постоянной

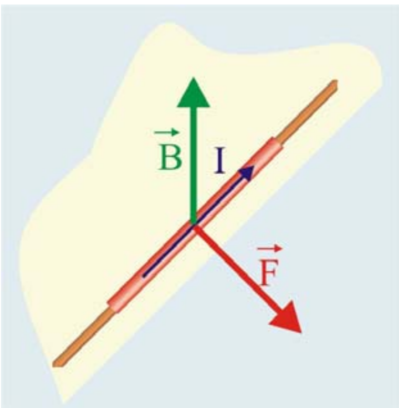


Рис. 3.13. Действие магнитного поля на проводник с током

$$\vec{F}_A = I\left(\vec{\ell} \times \vec{B}\right),$$

или, в соответствие с определением векторного произведения

$$F_A = I\ell B \sin\left(\vec{\ell};\vec{B}\right). \quad (3.7)$$

Вектор действующей силы будет перпендикулярен плоскости, в которой располагаются векторы $\vec{\ell}$ и $\vec{B}$ (рис. 3.13). Уравнение (3.7) является математическим выражением закона Ампера.

Закон Ампера применим для вычисления

взаимодействия двух проводников с током.

Пусть по двум длинным прямолинейным проводникам (рис. 3.14) протекают в одном направлению токи величиной I_1 и I_2. Проводник с током I_1 в области расположения другого проводника создаёт магнитное поле с индукцией

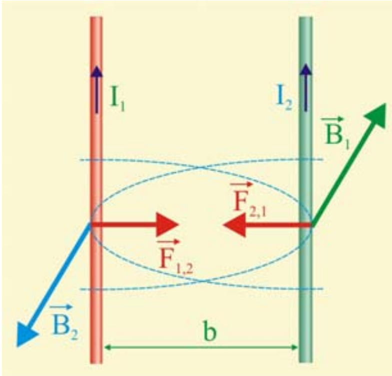


Рис. 3.14. Взаимодействие двух проводников с током

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi b}.$$

При этом, элемент второго проводника на своей длине Δl будет испытывать силу величиной

$$F_{2,1} = B_1 I_2 \Delta\ell.$$

Совмещая два последних уравнения, получим

$$F_{2,1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b}\Delta\ell. \qquad (3.8)$$

Поскольку величины токов одинаковы, то для сил взаимодействия справедливо соотношение

$$\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{2,1} = 0,$$

Сила взаимодействия двух прямолинейных бесконечно длинных параллельных проводников, на их протяжённости Δl пропорциональна произведению величин этих токов и обратно пропорциональна расстоянию между проводниками. Уравнение (3.8) является основанием для определения единицы электрического тока. В системе СИ величина тока в один ампер возникает в длинных тонких проводниках, расположенных на расстоянии 1м, если между ними возникает сила $F = 2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины.

3.6. Механическая работа в магнитном поле

На всякий проводник с током, помещённый в магнитное поле, действует сила Ампера

$$d\vec{F}_A = I\left(d\ell \times \vec{B}\right), \quad F_A = I\ell B \sin\left(\vec{\ell};\vec{B}\right).$$

Очевидно в этой связи предположить, что при перемещении проводника в магнитном поле станет совершаться механическая работа. Рассмотрим прямолинейный проводник длиной l, который может без трения перемещаться по контактным дорожкам, подключённым к источнику тока (рис. 3.15). Вся конструкция помещена в однородное магнитное поле перпендикулярное плоскости чертежа в сторону наблюдателя. Если проводник из положения 1 передвинуть параллельно в положение 2, т.е. на расстояние dx, то работу силы Ампера, с учётом того, что $\left(\vec{\ell};\vec{B}\right) = \pi/2$ можно представить уравнением

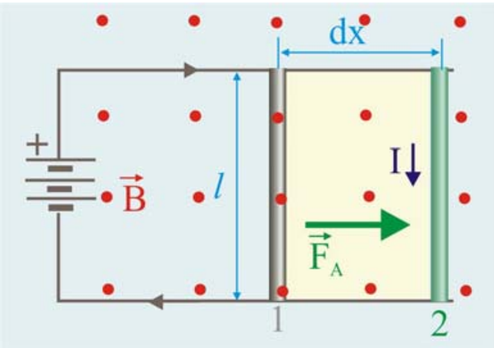


Рис. 3.15. Механическая работа

$$\delta A = F_A dx = IB\ell dx,$$

или

$$\delta A = IBdS,$$

где $dS = l dx$ – площадь магнитного поля пересекаемая проводником, по которому протекает ток величиной I.

При вращении проводника вокруг оси, проходящей через один из его концов перпендикулярно образующей (рис. 3.16), элементарная площадь при повороте на малый угол $d\alpha$ определится как

$$dS = \ell d\alpha d\ell,$$

где l расстояние от элемента длины проводника до оси вращения. Сила Ампера, действующая на элемент длины, при его перемещении на угол $d\alpha$ определится как

$$F_{An} = Id\ell B_n,$$

где B_n – составляющая напряжённости, нормальная к dS. Работа в этом случае запишется уравнением

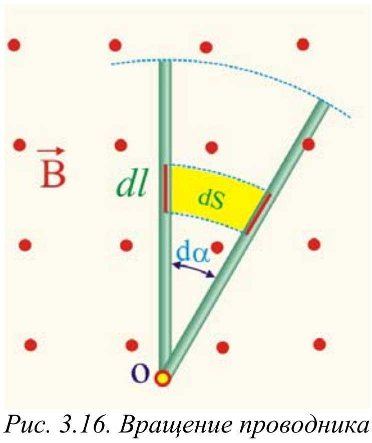


Рис. 3.16. Вращение проводника

$$\delta A = Id\ell B_n \ell d\alpha = IB_n dS,$$

что совпадает с уравнением, которое было получено для случая прямолинейного движения проводника с током в магнитном поле. Как известно из механики, любое плоское движение можно свести в поступательному и вращательному, что делает уравнения справедливыми для любого типа плоского движения.

3.7. Контур с током в магнитном поле

Важное прикладное значение имеет анализ механических сил, действующих на внесённый в магнитное поле замкнутый контур с током. Во многих технических устройствах осуществляется преобразование энергии магнитного поля в кинетическую энергию вращения.

Рассмотрим контур в виде прямоугольной рамки, по которой течёт постоянный ток величиной I, рамка помещена в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ (рис. 3.17). Силы Ампера, действующие на стороны *a*, в соответствие с законом Ампера будут стремиться растянуть или сжать рамку в вертикальных направлениях. Силы, действующие на стороны *b*, стремятся вращать рамку вокруг вертикальной оси z, т.к. по сути это типичная пара сил с моментом $M_z(F_1, F_2)$. Если магнитный момент контура $p_m = IS$ считать постоянным, то элементарная механическая работа, производимая силами Ампера при повороте контура на угол $d\alpha$, определится как

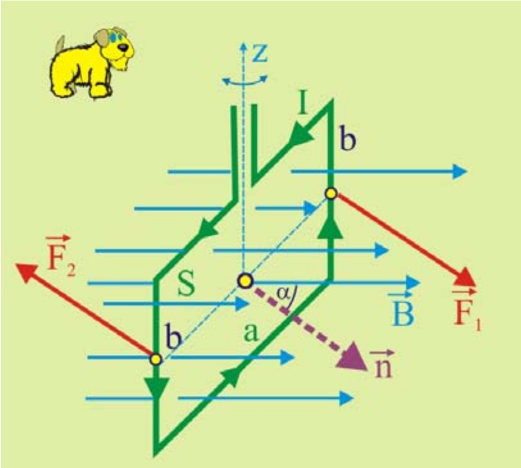


Рис. 3.17. Контур с током в магнитном поле

$$\delta A = M_z(\vec{F}_1, \vec{F}_2)d\alpha .$$

Поскольку магнитный поток, проходящий через площадь контура S равен

$$\Phi_B = SB\cos\alpha ,$$

то его изменение при повороте контура на угол $d\alpha$ запишется следующим образом

$$d\Phi_B = SB\sin\alpha d\alpha .$$

Используя уравнение

$$\delta A = IBdS,$$

уравнение элементарной работы можно переписать так

$$M_z(\vec{F}_1, \vec{F}_2)d\alpha = ISB\sin\alpha d\alpha ,$$

откуда

$$M_z(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = ISB\sin\alpha = p_m B\sin\alpha ,$$

или в векторной форме

$$\vec{M}_z(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = (\vec{p}_m \times \vec{B}).$$

4. Электромагнитное поле

4.1. Электромагнитная индукция

Майкл Фарадей, ознакомившись с работами Ампера и его последователей, пришёл к идее обратимости процессов при взаимодействии магнитного поля и электрического тока. В 1831 г. он увлёкся идеей получения электрического тока посредствам магнитного поля.

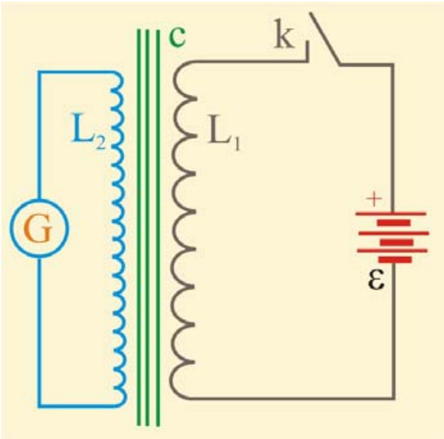


Рис. 4.1. Первые опыты М. Фарадея

Первые эксперименты были просты и оригинальны (рис. 4.1). На стальной сердечник были намотаны две катушки L_1 и L_2, причём первая катушка была подключена к источнику ЭДС ε. В цепь второй катушки был включён гальванометр.

Подключая и отключая катушку L_1 к источнику тока, экспериментаторы обнаружили броски стрелки. Стало ясно что во втором контуре, замкнутом на гальванометр ЭДС возникает только в моменты времени, когда магнитная индукция исходного поля либо возрастает, либо уменьшается.

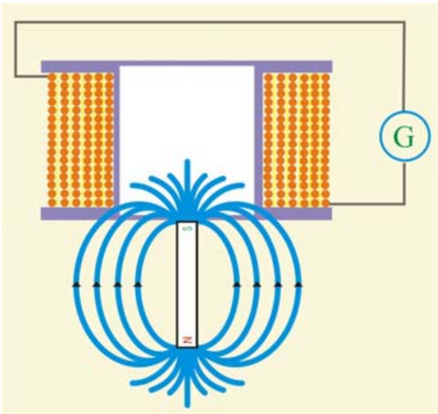


Рис. 4.2. Опыт с магнитом

Проверка обнаруженной закономерности была проверена при вдвигании и выдвигании постоянного магнита внутрь многовитковой катушки, замкнутой на гальванометр (рис. 4.2). Перемещение магнита сопровождалось возбуждением тока в катушке, который получил название **индукционного**.

Зафиксированные экспериментально факты индуцирования ЭДС Фарадей объяснил исходя из следующих предпосылок.

Если магнитное поле изображать посредствам линий индукции, то одной из характеристик будет густота линий.

Пусть некоторый замкнутый контур, для простоты изображения круговой (рис. 4.3), движется в магнитном поле, переходя в пространство с большей густотой линий магнитной индукции. Как было показано ранее, магнитное поле имеет вихревой характер, т.е. линии магнитной индукции замкнуты, они не имеют начал и концов.

Линии индукции сцеплены с контуром, поэтому пересечение этих линий должно сопровождаться пересечением плоскости контура этих линий. Если проводник находится в покое, то переменный характер должно иметь магнитное поле.

В этой связи Фарадей заключил, **что индукционный ток возникает в проводнике только в том случае, если проводник или какая либо его часть пересекает линии магнитной индукции**.

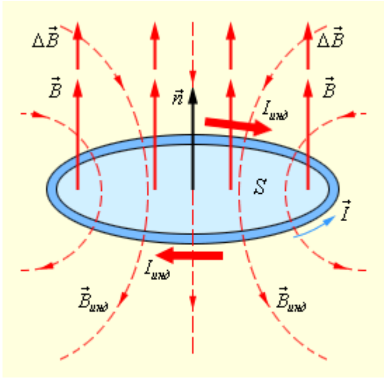


Рис.4 .3. Замкнутый контур в магнитном поле

Эмилий Христофорович Ленц применяя к явлению электромагнитной индукции закон сохранения энергии сформулировал следующее правило в соответствие с которым возникающий в проводнике индукционный ток $I_{инд}$ приводит к возникновению магнитного поля $\vec{B}_{инд}$, направленного в противоположную сторону исходному полю. Другими словами, **индукционный ток во всех случаях направлен таким образом, что его действие противоположно действию причины, вызвавшей этот ток.**

Правило (закон) Ленца применимо к случаям, когда проводник неподвижен, а изменяется внешнее магнитное поле. Правило Ленца подтверждает лишний раз справедливость закона сохранения энергии. Если предположить, что вторичное индуцированное поле имело бы направление совпадающее с исходным полем, то не существовало бы причин неограниченного возрастание индукционного тока во время всех изменений исходного поля. А на самом деле такового не наблюдается.

Возникновение индукционных токов сопровождается совершением дополнительной работы внешними силами, а силы, вызванные индукционным током препятствуют движению.

Приведенные выше рассуждения и экспериментальные данные были обобщены в виде закона электромагнитной индукции Майкла Фарадея

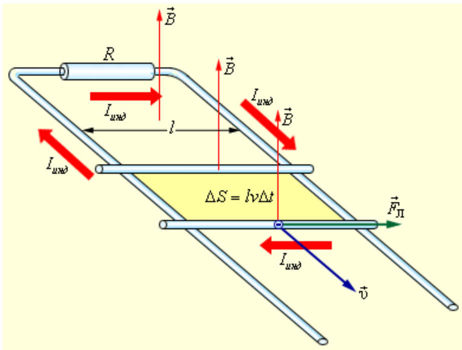


Рис. 4.4. Возникновение ЭДС индукции

Пусть прямолинейный проводник длиной l перемещается с постоянной скоростью $\vec{v}$ в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$. За время Δt проводник перемещается пересекая поле на площади

$$\Delta S = \ell v \Delta t,$$

при этом изменение магнитного потока составляет

$$\Delta\Phi_B = B\Delta S.$$

Рассмотрим бесконечно малое перемещение проводника за время dt, когда магнитный поток изменяется на величину $d\Phi_B$, при этом будет совершаться работа, величина которой с учётом правила Ленца запишется следующим образом

$$\delta A = -I_{инд} d\Phi_m.$$

Поскольку в уравнение работы входит величина индукционного тока, то очевидно, что она связана с перемещением носителей зарядов. Движение зарядов может возникать только при возникновении внутри проводника электрического поля. Для рассматриваемого случая справедливо соотношение

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \qquad (4.1)$$

Уравнение представляет собой математическое выражение закона электромагнитной индукции Майкла Фарадея.

Рассмотрим причины возникновения ЭДС индукции на микроуровне с позиций классической теории электропроводности металлов. На свободные электроны, хаотически движущиеся в межкристаллическом пространстве при наличии магнитного поля, действует сила Лоренца

$$F_L = evB.$$

Под действием силы Лоренца произойдёт перемещение зарядов, так что на концах проводника возникнет некоторая разность потенциалов $\Delta\varphi$. При этом возникшее электрическое поле $\vec{E}$ будет препятствовать передвижению зарядов.

Их перемещение прекратится когда сила со стороны индуцированного электрического поля $\vec{F}_E = e\vec{E}$ уравняет силу Лоренца, т.е.

$$eE = evB, \quad \Rightarrow \quad E = vB.$$

С другой стороны $\Delta\varphi = El$, откуда $E = \Delta\varphi/l$, что позволяет записать уравнение

$$\Delta\varphi = vB\ell.$$

Представим скорость как $v = dx/dt$

$$\Delta\varphi = \frac{dx}{dt}B\ell.$$

Сделаем в последнем уравнении ещё одну замену: $dx \cdot l = dS$, тогда

$$\Delta\varphi = \frac{BdS}{dt} = \frac{d\Phi_m}{dt}. \qquad (4.2)$$

Сравнивая уравнения (4.1) и (4.2), можно видеть, что разность потенциалов на концах разомкнутого проводника равняется по модулю ЭДС электромагнитной индукции.

В уравнение ЭДС электромагнитной индукции не вошли конкретные механические параметры движения, потому что всё определяется только скоростью изменения магнитного потока, причём способ этого изменения не имеет принципиального значения.

Можно перемещать контур, можно его деформировать, меняя площадь, а можно просто увеличивать или уменьшать величину магнитной индукции, во всех случаях в контуре будет возникать ЭДС индукции.

4.2. Самоиндукция

Как было установлено выше, явление электромагнитной индукции наблюдается во всех случаях изменения магнитного потока через контур.

В частности ЭДС индукции может генерироваться в самом контуре при изменении в нём величины тока, что приводит к появлению дополнительных токов.

Это явление получило название самоиндукции, а дополнительно возникающие токи называются **экстратоками или токами самоиндукции.**

Исследовать явление самоиндукции можно на установке, принципиальная схема которой приведена на рис. 45.

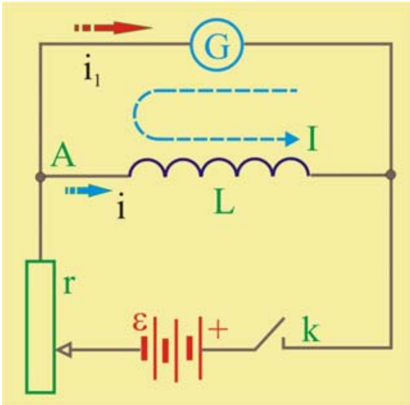


Рис. 4.5. Самоиндукция

Катушка L с большим числом витков, через реостат r и переключатель k подсоединяются к источнику ЭДС ε. Дополнительно к катушке подключён гальванометр G. При закороченном переключателе в точке A ток будет ветвится, причём ток величиной i будет протекать через катушку, а ток i_1 через гальванометр. Если затем переключатель разомкнуть, то при исчезновении в катушке магнитного потока возникнет экстраток размыкания I.

По правилу Ленца экстраток будет препятствовать уменьшению магнитного потока, т.е. будет направлен в сторону убывающего тока, а вот через гальванометр экстраток пройдёт в направлении противоположном первоначальному, что приведёт к броску стрелки гальванометра в обратном направлении. Если катушку снабдить железным сердечником, то величина экстратока увеличивается. Вместо гальванометра в этом случае можно включить лампочку накаливания, при возникновении тока самоиндукции лампочка будет ярко вспыхивать.

Экспериментально было установлено, что магнитный поток ψ_B, сцепленный с катушкой пропорционален величине протекающего по ней тока

$$\psi_B = Li,$$

коэффициент пропорциональности L называется **индуктивностью контура**. Размерность индуктивности определяется уравнением

$$L = \frac{d\psi_B}{i}, \quad [L] = \frac{\text{Вб}}{\text{А}} = \text{Гн}(\text{генри}).$$

Получим, используя закон Майкла Фарадея, уравнение ЭДС самоиндукции ε_{si} для катушки

$$\varepsilon_{si} = -\frac{d\psi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(Li) = -\left(L\frac{di}{dt} + \frac{dL}{dt}i\right).$$

В общем случае индуктивность, наряду с геометрией катушки в средах может зависеть от силы тока, т.е. $L = f(i)$, это можно учесть при дифференцировании

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{di}\frac{di}{dt}.$$

ЭДС самоиндукции с учётом последнего соотношения представится следующим уравнением

$$\varepsilon_{si} = -\left(L + \frac{dL}{di}\right)\frac{di}{dt}.$$

Если индуктивность не зависит от величины тока, уравнение упрощается

$$\varepsilon_{si} = -L\frac{di}{dt}. \tag{4.3}$$

ЭДС самоиндукции пропорциональна скорости изменения величины тока.

Индуктивность соленоида в виде прямолинейной цилиндрической катушки длиной ℓ, площадью поперечного сечения S с количеством витков N определяется уравнением:

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{\ell}. \tag{4.4}$$

Разрешая последнее уравнение относительно магнитной постоянной, получим её размерность

$$\mu_0 = \frac{L\ell}{N^2 S}, \Rightarrow [\mu_0] = \frac{\text{Гн} \cdot \text{м}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Гн}}{\text{м}}.$$

Опытным путём установлено, что индуктивность любого контура наряду с его геометрическими характеристиками зависит от физических свойств среды, в которой контур находится. Так, например, если внутрь соленоида вставить железный сердечник, то при прочих равных условиях экстратоки в цепи возрастают многократно, что говорит об увеличении индуктивности.

Если индуктивность контура в воздухе равна L_0, а в некоторой среде – L, то изменение индуктивности можно охарактеризовать отношением

$$\frac{L}{L_0} = \mu, \tag{4.5}$$

где μ – магнитная проницаемость следы, характеризующая магнитные свойства вещества, в котором находится рассматриваемый контур. Взаимосвязь магнитной индукции с напряжённостью поля в этом случае представится следующим образом

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}. \tag{4.6}$$

Из уравнения (4.6) видно, что единица магнитной проницаемости среды 1 Гн/м имеет место когда напряжённость магнитного поля в 1 А/м создаёт магнитную индукцию 1 Тл.

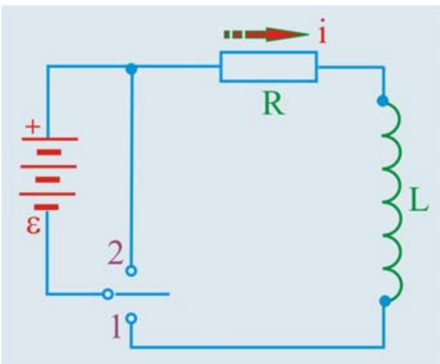


Рис. 4.6. Токи замыкания и размыкания

Рассмотрим процессы, протекающие в цепи, содержащей индуктивность L.

При подаче питания на схему, изображённую на рис 4.6, в цепи величина тока будет увеличиваться от нулевого значения до номинала в течение некоторого промежутка времени вследствие явления самоиндукции. Возникающие экстратоки в соответствие с правилом Ленца всегда направлены противоположно, т.е. они препятствуют вызывающей их причине. Они препятствуют увеличению тока в цепи.

При подключении коммутатора в положение 1 экстратоки станут препятствовать увеличению тока в цепи, а в положении 2, наоборот, экстратоки будут замедлять уменьшение основного тока. Будем считать для простоты анализа, что включённое в цепь сопротивление R характеризует сопротивление цепи, внутреннее сопротивление источника и активное сопротивление катушки L. Закон Ома в этом случае примет вид

$$\varepsilon + \varepsilon_{si} = iR,$$

где ε – ЭДС источника, ε_{si} – ЭДС самоиндукции, i – мгновенное значение величины тока, который является функцией времени. Подставим в закон Ома уравнение ЭДС самоиндукции

$$L\frac{di}{dt} + iR = \varepsilon.$$

Разделим в уравнении переменные

$$Ldi = (\varepsilon - iR)dt, \quad \frac{Li}{(\varepsilon - iR)} = dt,$$

и проинтегрируем, считая L постоянной величиной

$$L\int\frac{di}{\varepsilon - iR} = \int dt,$$

$$\frac{L}{R}\ln(\varepsilon - iR) = t + \text{const}.$$

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения можно представить в виде

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} - \text{const}\cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Постоянную интегрирования определим из начальных условий. При t =0 в момент подачи питания ток в цепи равен нулю i(t) = 0. Подставляя нулевое значение тока в уравнение, получим

$$\text{const} = \frac{\varepsilon}{R}.$$

Решение уравнения i(t), при этом, примет окончательный вид

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{\frac{L}{R}t}\right).$$

4.3. Энергия магнитного поля

Уместно провести некоторые аналогии с механикой. Напомним, что в механике наличие сил, как правило, свидетельствует о возможности совершения работы, которая количественно эквивалентна изменению энергетического состояния рассматриваемой системы. При рассмотрении особенностей взаимодействия магнитного поля с проводниками тоже обнаружились силы, способные совершать работу, из чего следует, что магнитное поле обладает энергией.

Возвратимся далее к уравнению закона Ома для цепи с катушкой

$$L\frac{di}{dt} + iR = \varepsilon .$$

Умножим правую и левую его часть на произведение idt

$$\varepsilon idt = i^2Rdt + iLdi .$$

Левая часть уравнения характеризует работу, производимую источником тока за время dt

$$\delta A = \varepsilon idt ;$$

Первое слагаемое правой части уравнения

$$\delta A_T = \delta Q = i^2Rdt$$

тоже выражает работу, трансформируемую в нагревание проводника, естественно, что по правилам размерности, второе слагаемое

$$\delta A_{si} = Lidi ,$$

должно иметь размерность энергии или работы, т.е. измеряться в джоулях. Действительно, величина δA_{si} количественно характеризует работу, производимую источником тока против ЭДС самоиндукции, о чём свидетельствует наличие в этом произведении индуктивности катушки.

Логично предположить, что совершаемую против ЭДС самоиндукции работу можно рассматривать как электромагнитную энергию, концентрируемую в катушке. Если ток в цепи возрастает от нуля до некоторого значения I, то полная энергия, накапливаемая магнитным полем за время dt, определится в виде интеграла

$$W_m = L\int_0^I idi = \frac{LI^2}{2} . \tag{4.7}$$

Уравнение (4.7) по структуре и физическому смыслу удивительным образом напоминает уравнение энергии электрического поля в конденсаторе

$$W_e = \frac{CU^2}{2} , \quad K = \frac{mv^2}{2}$$

и уравнение кинетической энергии из механики, что не является случайным.

Обратим внимание на тот факт, что все перечисленные виды энергий пропорциональны квадрату величины, определяющей содержание и развитие процесса: величина электрического тока, разность электрических потенциалов и скорость.

Магнитную энергию катушки можно связать с её геометрией. Покажем это на примере соленоида. Индуктивность соленоида равна:

$$L = \mu\mu_0 n^2 V,$$

где n – приведённое к длине число витков, V – объём катушки. Магнитная индукция катушки:

$$B = \mu\mu_0 nI.$$

Выражая из последнего уравнения величину n и подставляя в зависимость для индуктивности, получим

$$L = \frac{B^2}{\mu\mu_0 I^2} V.$$

Подставим значение индуктивности в уравнение магнитной энергии

$$W_m = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} V. \qquad (4.8)$$

Для плотности магнитной энергии в этом случае можно записать уравнения

$$\varpi_m = \frac{W_m}{V} = \frac{\vec{B}^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\vec{B}\cdot\vec{H}}{2}. \qquad (4.9)$$

4.4. О взаимосвязи электрического и магнитного полей

Запишем закон электромагнитной индукции Майкла Фарадея

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_B}{dt};$$

Закон Фарадея совместно с правилом Ленца является своеобразным **законом сохранения энергии**, он устанавливает количественные параметры преобразования энергии магнитного поля в электрическую энергию. Напомним, что в классической механике одной из математических его интерпретаций являлось уравнение связи кинетической и потенциальной энергий

$$\frac{mv^2}{2} = mgh;$$

Возникновение электродвижущей силы индукции обусловлено проявлением сторонних сил, которые могут иметь различную физическую сущность.

Так, например, в неподвижном контуре ЭДС индукции обусловлена вихревым характером электрического поля, возникающего при изменении магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром.

Главной причиной возникновения ЭДС индукции является изменение магнитного потока, которое может вызываться несколькими причинами:

$$\Phi_B = BS\cos\alpha = B_n S,$$

- Изменением величины магнитной индукции B;
- Изменением площади поверхности контура;
- Изменением положения контура относительно направления силовых линий поля.

В простейшем электрогенераторе изменение потока происходит вследствие движения ротора в виде постоянного магнита (рис. 4.7). Неподвижные катушки АВС (контуры) при вращении магнита пронизывает магнитное поле в изменяющейся индукцией, вследствие чего на клеммах катушек возникает ЭДС индукции.

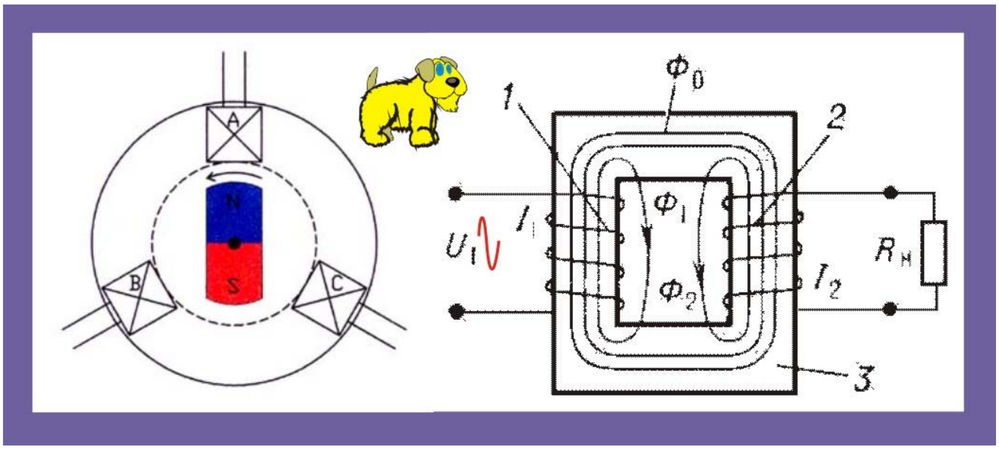


Рис. 4.7. Вращающийся магнит и трансформатор

Генерация ЭДС индукции за счёт изменения магнитного поля реализуется в трансформаторе. На первичную обмотку 1 подаётся переменное напряжение U_1, переменный ток I_1 создаёт изменяющийся во времени, как правило по гармоническому закону, магнитный поток Φ_0, приводящий к появлению вихревого электрического поля. В обмотке 2 наводится ЭДС и течёт ток I_2.

Следует отметить, что ЭДС индукции может возникать в проводнике, движущемся в постоянном магнитном поле (рис. 4.8). Вихревое поле в этом случае не возникает, однако при перемещении проводника со скоростью v, такую же скорость имеют и свободные носители заряда, на которые действует сила Лоренца

$$F_L = evB\sin\alpha .$$

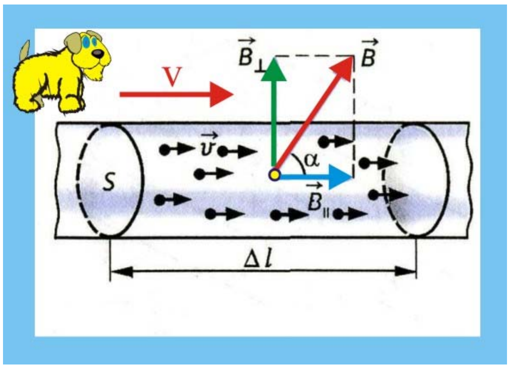


Рис.4.8. Сила Лоренца – сторонняя сила

Другими словами в данном случае сила Лоренца выступает в роли сторонней силы, способной производить работу. Рассмотрим проводящую рамку abcd, движущуюся с постоянной скоростью v, причём сторона рамки ab пересекает силовые линии однородного магнитного поля $\vec{B}$, создаваемого постоянным магнитом.

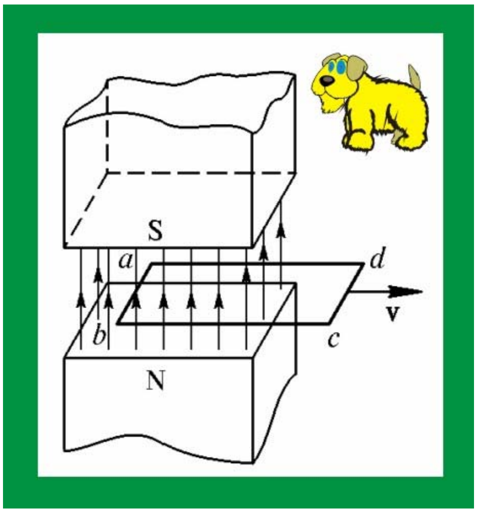


Рис.4.9.Возникновение ЭДС индукции

При выходе рамки из межполюсного пространства магнитный поток через рамку будет убывать, если ab = ℓ, то

$$\Delta\Phi = -B\ell v\Delta t .$$

Поделив обе части уравнения Δt придём к закону электромагнитной индукции

$$\varepsilon_i = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = Bv\ell ;$$

Вычислим далее ЭДС индукции как работу сторонних сил при перемещении по контуру abcd единичного заряда. Проанализируем силы, действующие на проводник ab (рис. 4.10) при его равномерном перемещении в магнитном поле. При движении в проводнике заряды движутся с некоторой скоростью $\vec{u}$ (дрейфовая скорость). Относительно неподвижной системе отсчёта заряды будут перемещаться со скоростью

$$\vec{v}_a = \vec{v} + \vec{u} ,$$

на каждый из них будет действовать сила товарища Лоренца

$$F_L = evB$$

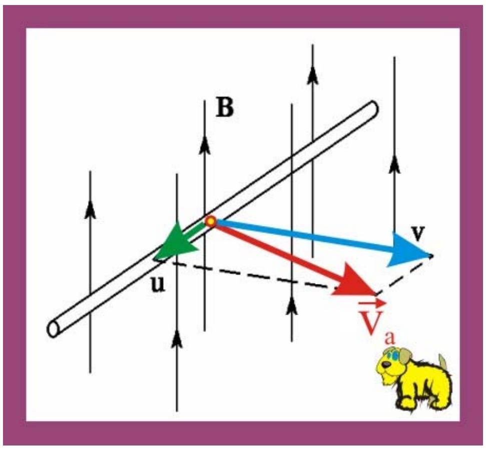


Рис. 4.10. Абсолютная скорость электронов

Сила Лоренца перпендикулярна $\vec{v}_a$, её можно разложить на две составляющие, составляющая перпендикулярная проводнику будучи просуммированной по всем свободным носителям даст, действующую на проводник силу Ампера. Составляющая, направленная вдоль проводника, заставит носители заряда двигаться по проводнику, т.е. обеспечит возникновение индукционного тока.

Поскольку заряды приходят в движение, значит на них действует сила Кулона, т.е. каждый носитель находится под действием комплексной силы

$$F = e\left[\vec{E} + \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)\right];$$

Относительный характер электрического и магнитного полей можно наблюдать и на примере единичного заряда. Предположим, что относительно ПСК заряд покоится, поэтому в этой подвижной системе координат поле будет только электрическим, так же как и в НСК. Но если ПСК начнёт двигаться равномерно и прямолинейно, то движущийся заряд в НСК уже будет рассматриваться как электрический ток и появится магнитное поле.

Пусть система отсчёта движется относительно заряда со скоростью $\vec{v}$, создаваемое им магнитное поле определится уравнением:

$$\vec{B}^* = -\frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3};$$

Этот же заряд создаёт электрическое поле напряжённостью

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}; \quad \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\vec{E} 4\pi\varepsilon_0}{q},$$

тогда

$$\vec{B}^* = -\varepsilon_0 \mu_0 \left(\vec{v} \times \vec{E}\right); \tag{4.10}$$

Если в некоторой системе отсчёта существует электрическое поле $\vec{E}$, то в другой системе отсчёта, движущейся относительно первой, то будет существовать ещё и магнитное поле $\vec{B}$, определяемое уравнением (4.10).

Из относительного характера электрического и магнитного полей следует, что при исследовании электромагнитных явлений необходимо эти поля рассматривать совместно, как единое электромагнитное поле. Поскольку в зависимости от выбора системы координат одно и тоже поле может восприниматься как электрическое, так и как магнитное, то следует ожидать, что между полями существует определённая симметрия.

Изменение магнитного поля порождает вихревое электрическое поле, точно так же как и изменение электрического поля порождает поле магнитное.

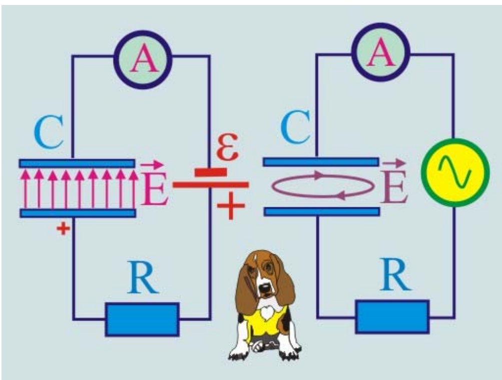


Рис. 4.11. Воздушный конденсатор в цепи

Если простейший воздушный конденсатор в виде двух параллельных пластин включить в цепь постоянного тока, то цепь разорвётся. В течение короткого времени пластины конденсатора за счёт источника ЭДС ε зарядятся до определённой разности потенциалов и никакого тока в цепи амперметр не зафиксирует, потому что воздушный промежуток обладает большим сопротивлением.

Если же в цепь включить генератор переменного тока, то картина резко поменяется. В цепи возникнет ток, только потому, что переменное электрическое поле между обкладками будет вихревым и возникнет поле магнитное.

Будем считать, что во время зарядки конденсатора в течение малого промежутка времени через воздушный промежуток течёт ток

$$I = \frac{dq}{dt};$$

Если в соответствие с теоремой о циркуляции рассмотреть круговой контур длиной ℓ, охватывающий проводник, и разбить его на множество участков равной длины $\Delta\ell$, то можно записать

$$\sum_{i=1}^{i=n} B_i \Delta\ell = \mu_0 I;$$

Если охватывающий проводник контур перемещать вдоль проводника и поместить его между пластинами, то по идее движения зарядов там нет, в привычном понимании тока там нет, но магнитное поле в пространстве между пластинами исчезнуть не может, что противоречит уравнению теоремы о циркуляции. Значит, уравнение теоремы должно содержать ещё некий член, который придал бы физический смыл уравнению в пространстве между пластинами.

Пусть на поверхности пластин присутствует заряд плотностью σ. В этом случае силу тока можно представить следующим образом

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{Sd\sigma}{dt};$$

С другой стороны в соответствие с теоремой Остроградского Гаусса

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}; \quad dE = \frac{d\sigma}{\varepsilon_0}; \quad d\sigma = dE\varepsilon_0; \quad I = S\varepsilon_0 \frac{dE}{dt};$$

Уравнение теоремы о циркуляции перепишется следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{i=n} B_i \Delta\ell = \mu_0 \varepsilon_0 S \frac{dE}{dt};$$

Последнее уравнение в правой части содержит поток напряжённости электрического поля

$$d\Phi_E = dES; \quad \sum_{i=1}^{i=n} B_i \Delta\ell = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt};$$

Таким образом, теорема о циркуляции для всей цепи с конденсатором запишется следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{i=n} B_i \Delta\ell = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \mu_0 \left(I + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right);$$

Согласно теории размерностей, в скобках присутствует сумма токов, причём I представляет собой обычный ток проводимости, а второе слагаемое

$$\varepsilon_0 \frac{dE}{dt} = I_{См};$$

называется **током смещения**, который является источником магнитного поля в пространстве между пластинами. Название не вполне отвечает сути, они появилось в те времена, когда электромагнитные явления пытались описать методами, наработанными в классической механике.

Ток смещения можно отождествлять с традиционным током только в плане его способности создавать магнитное поле. В остальном он не похож на традиционный ток, например, при его протекании не выделяется джоулева тепла.

4.5. Уравнения Максвелла, Герца, Хевисайда

Все факты проявления электрических и магнитных полей можно обобщить в виде нескольких рассмотренных ранее утверждений.

Утверждение 1. Статическое электрическое поле создаётся электрическими зарядами, причём силовые линии электрического поля начинаются и заканчиваются на электрических зарядах. Этому утверждению соответствует теорема Остроградского – Гаусса

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV,$$

где $d\vec{S}$ – трансформированная в вектор элементарная площадь, путём нё умножения скалярно на единичный вектор внешней нормали, т.е. $d\vec{S} = dS\cdot\vec{n}$, ρ – объёмная плотность зарядов. Левая часть уравнения представляет собой поток вектора напряжённости электрического поля Φ_E через произвольную замкнутую поверхность S, ограничивающая объём V.

Утверждение 2. В природе до настоящего времени не обнаружены изолированные магнитные заряды (монополи). Математическим содержанием этого утверждения так же является теорема Остроградского – Гаусса, правая часть которой равна нулю

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0.$$

Утверждение 3. Электростатическое поле потенциально, т.е. в нём нет замкнутых силовых линий, а работа поля по замкнутому перемещению всегда равна нулю. Не замкнутость силовых линий математически можно выразить нулевой циркуляцией поля по произвольному контуру

$$\oint_\ell \vec{E}d\vec{\ell} = 0.$$

Утверждение 4. Вихревое магнитное поле создаётся электрическими токами. Это утверждение математически выражается теоремой о циркуляции вектора индукции магнитного поля

$$\oint_\ell \vec{B}d\overline{\ell} = \mu_0\int_S \vec{j}d\vec{S},$$

где $\vec{j}$ – вектор плотности тока. Нетрудно видеть, что четвёртое утверждение, ко всему прочему, основано на законе Био – Савара – Лапласа.

Дополним эти утверждения выражением для комплексной силы Лоренца, которая действует на движущиеся заряды со стороны электрических и магнитных полей:

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right).$$

Все четыре условия, по сути, были сформулированы без учёта особенностей, возникающих при явлении электромагнитной индукции. А суть вот в чём.

Ели проводящий контур, например круговой, поместить в изменяющийся магнитный поток, то в нём возникает ЭДС индукции, что означает перемещение в нём электрических зарядов. Всякая ЭДС приводит к появлению сил, перемещающих по проводнику заряды. С другой стороны, перемещение зарядов свидетельствует о наличии электрического поля, причём циркуляция этого поля по периметру витка по определению и равна ЭДС индукции, т.е.

$$\oint_{\ell} \vec{E} d\vec{\ell} = \varepsilon_i .$$

Как известно из математики, если циркуляция некого векторного поля не равна нулю, то это поле не является потенциальным, а обладает вихревыми свойствами, подобно магнитному полю.

Интересно выяснить в этой связи роль проводящего контура. Контур в данном случае является своеобразным индикатором возникшего индукционного тока. Чтобы учесть изложенные выше новые обстоятельства, необходимо сформулированные ранее утверждения дополнить законом электромагнитной индукции Майкла Фарадея

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B} d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} .$$

Подставим далее значение ЭДС индукции из уравнения в утверждение №3

$$\oint_{\ell} \vec{E} d\vec{\ell} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} .$$

Последнее уравнение, содержащее закон электромагнитной индукции, даёт основание уточнить третье утверждение следующим образом.

Утверждение 3*. Изменение магнитного поля приводит к возникновению вихревого электрического поля.

Ещё одним примером необычного проявления свойства электрического поля является колебательный контур (рис. 4.12). Поставив переключатель в положение *1*, зарядим конденсатор, а затем переключатель К перебросим в положение *2*. Конденсатор начнёт разряжаться через сопротивление R и индуктивность L.

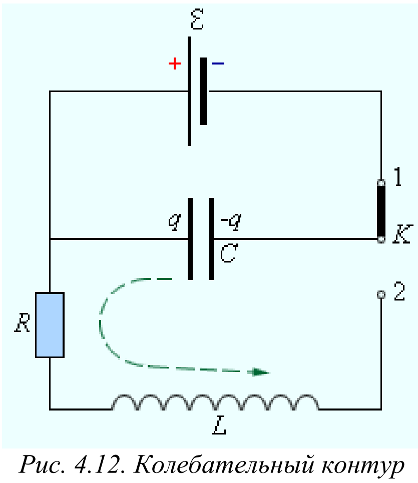


Рис. 4.12. Колебательный контур

В образованном замкнутом контуре возникнет индукционный ток, причём конденсатор станет неоднократно перезаряжаться. В этом случае электрическая энергия, запасаемая в конденсаторе, будет неоднократно преобразовываться в энергию магнитного поля катушки

$$\frac{CU^2}{2} \Leftrightarrow \frac{LI^2}{2};$$

Этот колебательный процесс, по большому счёту противоречит нашему четвёртому утверждению. Конденсатор, в простейшем варианте, представляющий собой две проводящие пластины, разделённые диэлектриком не предрасположен проводить электрический ток, тем не менее, ток всё же протекает, обеспечивая его перезарядку.

Впервые подобным процессом заинтересовался Максвелл, который задался целью модифицировать уравнение четвёртого утверждения применительно к рассматриваемым случаям.

Было экспериментально установлено и теоретически обосновано, что всякое переменное магнитное поле вызывает вихревое электрическое поле. Анализируя эти факты, Максвелл пришёл к выводу, что **возможен и обратный процесс, т.е. всякое изменение электрического поля должно вызывать появление вихревого магнитного поля**.

Это было сильное утверждение, потому что оно при дальнейшем экстраполировании приводило к довольно необычным выводам. Магнитное поле, как известно, является основным признаком всякого тока, из этого следовало, что переменное электрическое поле должно приводить к возникновению некого тока.

Максвелл отождествил переменное электрическое поле с понятием «ток смещения», который не является следствием движения носителей зарядов. Термин во многом с исторической подоплёкой, потому что в некоторых средах, например в вакууме, вообще никаких зарядов нет, смещаться нечему, а вот в диэлектрических средах эффект смещения зарядов имеет место.

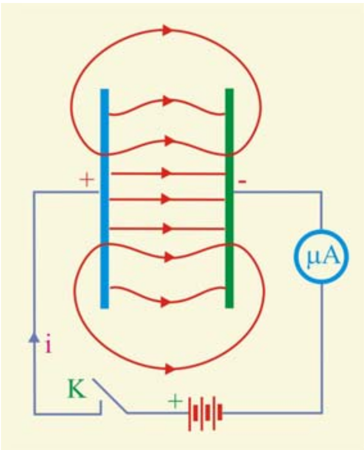


Рис. 4.13. Зарядка конденсатора

Разберёмся с этим необычным током на примере зарядки обычного конденсатора (рис. 4.13). Включим в цепь конденсатора и источника внешней ЭДС микроамперметр с центральным начальным положением стрелки для регистрации возникающего тока.

Контур, по большому счету разомкнут, потому что содержит конденсатор, постоянный ток, как известно, не пропускающий. При длительном подключении батареи к конденсатору микроамперметр тока не фиксирует, а в первые моменты включения конденсатор заряжается, в металлических проводниках возникает зарядный ток.

Если полюса батареи поменять местами, то конденсатор перезарядится и в процессе перезарядки снова возникнет ток, но уже обратного направления. Если конденсатор подключить к сети переменного тока с частотой $f = 50\ с^{-1}$, а микроамперметр заменить лапой накаливания, то она станет вспыхивать с частотой, равной $\nu = 100\ с^{-1}$, что человеческий глаз различить не сможет, и будет казаться, что лампочка просто горит.

Эти и подобные им эксперименты показывают, что переменный электрический ток, т.е. переменное электрическое поле, может прекрасно существовать и в незамкнутых контурах. Как совершенно гениально предположил Максвелл, токи проводимости в проводящем разомкнутом контуре замыкаются токами смещения в диэлектрике, при этом электрическое поле в конденсаторе в произвольный момент времени создаёт магнитное поле, такое же, как если бы пространство между обкладками было проводящим. Возникающее магнитное поле такое же, как и в проводнике, т.е. такое же, как и в замкнутом контуре.

Уравнения Максвелла записываются обычно в двух формах: **интегральной и дифференциальной форме**.

Интегральные уравнения выражают соотношения для проведенных мысленно в магнитном поле неподвижных контуров и поверхностей.

Дифференциальная форма уравнений устанавливает взаимосвязь между характеристиками поля и плотностями электрических зарядов и токов в каждой точке пространства занятого полем.

Уравнения в интегральной форме были, по сути, сформулированы выше, путём констатации экспериментально и теоретически очевидных фактов:

$$\left.\begin{aligned}
&(\mathrm{I}) \quad \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV;\\
&(\mathrm{II}) \quad \oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0;\\
&(\mathrm{III}) \quad \oint_\ell \vec{E}d\vec{\ell} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}d\vec{S};\\
&(\mathrm{IV}) \quad \oint_\ell \vec{B}d\vec{\ell} = \mu_0\oint_S\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)d\vec{S}.
\end{aligned}\right\}$$

Первое уравнение системы не является абсолютно новым, в его основу положена теорема Остроградского – Гаусса для электрических полей в средах. Электрическое поле в диэлектрической среде, создаётся зарядами двух типов: **свободными и связанными.**

Связанными называются заряды, входящие в состав структурных элементов вещества диэлектрика, т.е. молекул, атомов и ионов. Свободными считаются заряды, способные перемещаться под действием электрического поля на макроскопические расстояния, а так же избыточные заряды, сообщённые диэлектрику извне.

Электрическое поле в диэлектрике, таким образом, представляет собой суперпозицию двух полей, генерируемых связанными и свободными зарядами. Теорема Остроградского – Гаусса в этом случае записывается следующим образом

$$\oint_S \vec{E}d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(Q^{своб} + Q^{связ}\right).$$

Уместно напомнить, в этой связи, что уравнение теоремы учитывает только заряды, содержащиеся внутри мысленно проведенного контура, так сказать, только охваченные заряды. Поле связанных зарядов зависит от степени поляризации диэлектрика, т.е. от суммарного дипольного момента всех молекул, заключённых в рассматриваемом объёме ΔV, ограниченном поверхностью S

$$\vec{P}_m = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{i=N}\vec{p}_{mi}\ .$$

Напряжённость поля, создаваемого связанными зарядами, определится как

$$\vec{E}^{связ} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\oint_S \vec{p}_m d\vec{S}\,.$$

Знак минус характеризует факт уменьшения потенциальной энергии диполя при его повороте в электрическом поле. Уравнение позволяет выразить величину связанного заряда следующим образом

$$Q^{связ} = -\oint_S \vec{p}_m d\vec{S}.$$

Перепишем теорему Остроградского – Гаусса следующим образом

$$\oint_S \vec{E} d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon}\left(Q^{своб} - \oint_S \vec{p}_m d\vec{S} \right),$$

или

$$Q^{своб} = \varepsilon_0 \oint_S \vec{E} d\vec{s} + \oint_S \vec{p}_m d\vec{S}.$$

Поскольку интегралы берутся по одной и той же замкнутой поверхности, то их можно преобразовать к виду

$$Q^{своб} = \oint_S \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{p}_m \right) d\vec{S}.$$

Уравнение можно привести к обычной форме записи теоремы Остроградского – Гаусса, если ввести обозначение

$$\left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{p}_m \right) = \vec{D},$$

тогда

$$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = Q^{своб}.$$

Таким образом, мы снова пришли к понятию вектора электрического смещения или, как его иногда называют, вектором электрической индукции. Уравнение определяет поток вектора смещения, пронизывающий поверхность S, т.е.

$$\Phi_D = \oint_S \vec{D} d\vec{s} = Q^{своб}.$$

Если поверхность S неподвижна и недеформируемая, то изменение потока будет сопряжено с зависимостью вектора электрического смещения от времени. Продифференцируем по времени уравнение

$$\frac{dQ^{своб}}{dt} = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_S \vec{D} d\vec{s},$$

или

$$\frac{dQ^{своб}}{dt} = \oint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}.$$

Размерность левой части последнего уравнения [Кл/с], т.е. соответствует размерности силы тока. Естественно в этой связи предположить, что величина $\left[\partial \vec{D} / \partial t \right]$ должна иметь размерность [А/м^2], т.е. плотности тока j. Другими словами, можно обоснованно ввести понятие плотности тока смещения.

Плотность тока смещения, таким образом, равна скорости изменения вектора смещения. Отметим, что подынтегральное выражение содержит в общем случае две переменных величины t и S, но в данном конкретном случае, площадь исследуемого контура полагается неизменной, что позволяет ток смещения представить в виде:

$$i_C = \int_S \vec{j}_C d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Для чего же потребовалась Максвеллу гипотеза о токе смещения? В своей работе «Динамическая теория электромагнитного поля» он написал: «… В диэлектрике, находящемся под действием электродвижущей силы, мы можем представлять, что электричество в каждой молекуле так смещено, что одна сторона молекулы делается положительно наэлектризованной, а другая – отрицательно наэлектризованной, однако электричество остаётся полностью связанным с молекулами и не переходит от одной молекулы к другой. Эффект этого воздействия на всю массу диэлектрика выражается в общем смещении электричества в определённом направлении. Это смещение не вполне равноценно току, потому что когда оно достигает определённой степени, то остаётся неизменным, но оно есть начало тока и его изменения образуют токи в положительном или отрицательном направлениях, сообразно тому, уменьшается или увеличивается смещение …».

Введя понятие тока смещения, Максвелл совершенно не тривиально подошёл к понятию замкнутости электрических цепей. Как отмечалось ранее, возникновение постоянного электрического тока возможно только в замкнутой цепи, потому, что там понятие тока связывается с переносом зарядов. Иное дело в цепях переменного тока, по Максвеллу замкнутость цепи совсем не обязательна.

Так, например, при зарядке и разрядке конденсатора через сопротивление электрический ток силой i протекает по соединительным проводам, при этом вокруг них создаётся магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, причём оно не заканчивается на обкладках конденсатора, образуя своеобразную оболочку.

В то время, как электрическое поле распадается, провода окружены кольцевыми линиями магнитной индукции. Соединительная цепь будет иметь магнитную «шубу», доходящую до пластин. Пространство между пластинами заполнено всегда диэлектрическим веществом, которое, как известно ток не проводит в виду малого количества свободных зарядов, способных к перемещению под действием электрического поля.

Джеймс Клерк Максвелл взял на себя смелость утверждать, что «магнитная оболочка» не имеет концов, а образует полое кольцо из кольцевых линий магнитной индукции.

Ток смещения представляет собой, по сути, изменяющееся во времени электрическое поле в любой среде, вплоть до пустого пространства. В максвелловском представлении в природе существуют только замкнутые токи, причём это могут быть как токи проводимости, так и токи смещения. Электрические токи, исходя, из представлений Максвелла, не могут иметь начала и конца. **Там где заканчивается ток проводимости, неминуемо должен начинаться ток смещения**.

Второе уравнение. Максвелл записал это уравнение как факт отсутствия в природе уединённых магнитных зарядов. **Магнитный поток через замкнутую неподвижную поверхность, мысленно проведенную в электромагнитном поле равен нулю.**

Третье уравнение. Максвелл этим уравнением обобщил закон электромагнитной индукции Майкла Фарадея применительно к замкнутому неподвижному проводящему контуру, находящемуся в переменном магнитном поле. Проанализировав известное уравнение

$$\oint_L \vec{E}d\vec{\ell} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\oint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s},$$

Максвелл обратил внимание на то, что в него не входят параметры материала проводника. Он решил распространить это уравнение на любой контур, мысленно проведенный в переменном магнитном поле. Одной из особенностей третьего уравнения является то, что электрическое поле, в отличие от кулоновского полагается не потенциальным. Циркуляция вектора $\vec{E}$ зависит от способа проведения контура в поле.

Главный же физический смысл третьего уравнения заключается в том, что оно устанавливает взаимосвязь переменного магнитного поля с индуцированным электрическим полем, причём наличие проводников совершенно не обязательно. Применительно к первому уравнению обычно приводят следующую смысловую формулировку: **«Циркуляция вектора напряжённости электрического поля по произвольному контуру, мысленно проведенному в электромагнитном поле, равна, взятой с обратным знаком скорости изменения магнитного потока через поверхность, натянутую на этот контур».**

Четвёртое уравнение. С учётом тока смещения Максвелл записал **закон полного тока** следующим образом:

$$\int_L \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0} d\vec{\ell} = \oint_L \vec{H}d\vec{\ell} = i_{\text{макро}} + i_C,$$

где $i_{\text{макро}}$ – макро ток, вызванный перемещением свободных носителей заряда под действием электрического поля, i_C– ток смещения, некоторые свойства которого оговорены выше. Это уравнение показывает, что циркуляция вектора напряжённости магнитного поля $\vec{H}$ по произвольному неподвижному контуру L, мысленно проведенному в электрическом поле, равна алгебраической сумме макро тока и тока смещения сквозь поверхность, причём

$$i_{\text{макро}} = \oint_S \vec{j}d\vec{S},$$

где j – плотность тока проводимости.

Дифференциальная форма уравнений представляет собой систему четырёх дифференциальных уравнений в частных производных

$$\left.\begin{aligned}
&\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};\\
&\text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t};\\
&\text{div}\vec{D} = \rho;\\
&\text{div}\vec{B} = 0.
\end{aligned}\right\}$$

Уравнения Максвелла сыграли огромную роль не только в электродинамике, но и во всей современной физике. К окончанию XIX века уже было установлена непрерывность пространства, было ясно, что в каждой точке любая физическая величина имеет вполне определённое значение, причём переход от точки к точке носит непрерывный и плавный характер. Понятие эфира постепенно вытеснялся прагматичным понятием поля.

Образом поля в различных отделах физики, в принципе, начали пользоваться со второй половины XIX века. Например, при объяснении явлений электрического и магнитного свойства. Настоятельная необходимость введения понятия поля появилась после того, как датский физик Ханс Кристиан Эрстед (1777 – 1851 гг.), можно сказать, случайно в 1820 г., поместил магнитную стрелку около проводника с током и обнаружил, к своему великому удивлению, что стрелка перестала реагировать на магнитное поле Земли, а «переключилась» на проводник.

В этом же году Ампер разработал теорию связи электричества и магнетизма, используя понятие поля. В 1840 г. Майкл Фарадей в своих лекциях говорит о попытках «открыть прямую связь между светом и электричеством».

Такую связь Фарадей установил, наблюдая на опыте вращение плоскости поляризации в магнитном поле. Фарадей (1791 – 1867 гг.) на основе экспериментальных исследований сформулировал идеи поля как новой формы материи, введя понятие силовых линий.

Эстафету формирования законов электромагнитного поля продолжил Джеймс Клерк Максвелл, записав идеи Фарадея в виде записанных выше уравнений, которые были доведены до современной формы записи Герцем на основе векторного анализа Хевисайда.

Революционное значение уравнений Максвелла состояло в том, что **они предсказывали существование электромагнитных волн,** которые были обнаружены опытным путём в 1888 г. Генрихом Герцем. Анализируя уравнения, Максвелл обнаружил, что взаимосвязанные изменения электрических и магнитных полей, в конечном счете, должны были приводить к появлению волны в абсолютно пустом пространстве.

Эта идея была настолько нетрадиционна, что противников у неё было гораздо больше, нежели сторонников, как среди учёных академического толка, так и среди инженеров. Дело в том, что понятие волн в то время обязательно связывалось с наличием среды, в которой волны распространяются.

Житейские наблюдения говорили о том же: волны на поверхности жидкости, волны на полях, засеянных злаками, упругие волны в газах, жидкостях и твёрдых телах и т.д.

Когда же со средой возникали трудности и недоразумения её, как отмечено выше, заполняли разного рода эфирами, обладающими свойствами, необходимыми для существования данной теории. А волна в пустом пространстве, помимо всех прочих странностей, ещё и не должна затухать, тут явно попахивало нарушением законов сохранения в механическом их толковании.

Работая над своими уравнениями Максвелл не подозревал, что в Королевском научном обществе хранится с 1832 г. запечатанный конверт, который велено открыть и сделать достоянием общества через 106 лет (!?).

Текст послания, составленного загадочным Майклом Фарадеем и зачитанным только в 1938 г. потряс до возможного предела сдержанных английских учёных и их зарубежных коллег.

Фарадей завещал: « Я пришёл к заключению, что на распространение магнитного воздействия требуется время, которое, очевидно, окажется весьма незначительным. Я полагаю, что электромагнитная индукция распространяется точно таким же образом. Я полагаю, что распространение магнитных сил от магнитного полюса похоже на колебания взволнованной водной поверхности. По аналогии я считаю возможным применить теорию колебаний к распространению электромагнитной индукции. В настоящее время, насколько это мне известно, никто из учёных не имеет подобных взглядов».

Конверт был запечатан Майклом Фарадеем, когда Максвеллу был всего год от роду. Сейчас трудно представить себе причины, по которым Фарадей не опубликовал столь гениальную догадку.

Толи боязнь быть не понятым, а возможно осознание преждевременности своей идеи. Ясно одно, со сроками созревания научной мысли Фарадей явно просчитался. Потребовалось существенно менее 100 лет, чтобы удалось увидеть в электричестве и магнетизме объединяющее начало, и, как следствие этого, появление особого рода волн.

Несмотря на то, что мы постоянно упоминали Максвелла, приведенная нами форма записи уравнений принадлежит не ему. Практически все учебники повторяют уравнения, записанные Генрихом Герцем. Максвелл все свои теоретические взгляды на электромагнитные явления обобщил в виде системы из **двадцати уравнений**, а Герц, в процессе их осмысления, **воспользовавшись неопубликованными работами Оливера Хевисайда**, нашёл способ свести теорию всего к четырём уравнениям.

С позиций профессионалов, формально, полученная система уравнений достаточно проста, однако в процессе её применения открывался всё больший и больший их внутренний смысл.

Генрих Герц, которому выпала историческая роль доказательства справедливости уравнений в одной из своих публикаций записал:

«Нельзя изучать эту удивительную теорию, не испытывая по временам такого чувства, будто математические формулы живут собственной жизнью, обладают собственным разумом – кажется, что эти формулы умнее нас, умнее даже самого автора, как будто они дают нам больше, чем в своё время в них было заложено».

Работая в команде Гельмгольца, Герц имел все возможности проявить себя. К великому сожалению, судьба определила Герцу светлую голову и никудышнее здоровье. Он родился, как в прочем и многие гении (Ньютон, Кеплер, Декарт и др.) очень слабым. Врачи без оптимизма оценивали его дальнейшие перспективы пребывания на этом Свете. Болезни буквально преследовали Герца от самого рождения и до безвременной кончины в возрасте всего 37 лет.

Чтобы окончательно убедить себя в невозможности распространяться какой бы то ни было субстанции в пустоте, Гельмгольц поручает Генриху Герцу спланировать и провести серию экспериментов. Начинающему двадцатилетнему учёному с ещё не окрепшими научными взглядами и представлениями была поручена миссия экспериментального опровержения юного выскочки.

Авторитет Гельмгольца был настолько велик, что у Герца по началу и в мыслях даже не было объективно во всём разобраться. Однако, чем больше Герц ставил эксперименты, тем радикальнее опровергалась теория дальнодействия и находила подтверждение там, где совпадала с представлениями англичанина.

А признавать универсальность максвелловской теории ой как не хотелось. Во-первых, потому что теория родом из Англии, которая, как известно для немцев совсем даже не указ. Во-вторых, если признать правоту Максвелла, то нужно было, мягко говоря, переоценить значимость великих немецких электродинамиков, таких как Нейман, Вебер, сам Геймгольц и др.

Высказывание Герца о «самостоятельной жизни уравнений» начали подтверждаться сразу после первых попыток их применения. О самостоятельности уравнений говорили немногие учёные, в основном их поминали совсем недобрыми словами, ввиду непонимания многих, связанных с ними нюансов. Один из основных нюансов, который был особо неудобоварим авторитетами, был связан с наличием в уравнениях неких «загадочных констант» с неясным физическим смыслом.

Беспокойство классиков было оправданным. Дело в том, что появление в уравнениях физики новых постоянных величин, как правило, носило революционно-фундаментальный характер. Так произошло и на этот раз, константа оказалась более чем фундаментальной.

Выяснилось, что **в уравнениях «зашифрована» скорость света**, которая к моменту появления уравнений была уже измерена экспериментально. Дело в том, что комбинация достаточно хорошо известных постоянных величин, входящих в систему уравнений

$$\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}} \cong \sqrt{\frac{1}{9\cdot10^{-12}\cdot12{,}56\cdot10^{-7}}} \cong 2{,}99874109\cdot10^{8}\,\frac{\text{м}}{\text{с}},$$

совпала с высокой степенью точности с измеренным значением скорости света. Совпадение было настолько разительным, что его трудно было отнести к случайному, если даже очень сильно захотеть.

До этого даже мысли ни у кого из учёных не возникало, что световые волны имеют какое-то отношение к электродинамике. Оптика, хоть и волновая, никак не связывалась с электромагнитными забавами Максвелла Герца и Хевисайда.

Проведя анализ уравнений с позиций закона сохранения энергии, Максвелл пришёл к совершенно фантастическому по тем временам выводу. **Уравнения не удовлетворяли закону сохранения энергии.**

Процесс преобразования переменного электрического поля в магнитное поле должен сопровождаться образованием волн, которые и уносят часть энергии, первоначально запасённой в рассматриваемом контуре.

Мало того, по Максвеллу, для распространения этих волновых процессов совершенно не требовалась среда, **они могли путешествовать в пустоте**.

Сейчас можно только представить, как эта идея подействовала на учёный мир, полагавший, кстати, не без оснований, что распространения волны обязательно должно быть связано с теми или иными деформациями среды. В этом плане уравнения Максвелла были просто опасны для всего, что было написано по электродинамике до того, так как они не оставляли камня на камне в электродинамических замках, построенных многими поколениями талантливых учёных.

Но очевидно именно в этом и состоит суть прогресса, когда на смену, казалось бы, безупречным причёсанным временем теориям, приходят, кажущиеся по началу несуразными, новые воззрения и напористо занимают своё место под Солнцем. Так случилось и с системой уравнений Максвелла.

Максвелл, по остроумному выражению Роберта Милликена: «…Облек плебейски обнажённые представления Фарадея в аристократические одежды математики».

Два человека, следуя идеям и принципам Максвелла, после его смерти пытались разработать такую же всеобъемлющую теорию гравитационного поля. Этими людьми были Хевисайд (1850 – 1920 гг.) и Эйнштейн (1979 – 1955 гг.), они пытались объединить электромагнетизм и гравитацию в виде единой теории поля.

Как известно, Эйнштейну это не удалось. По отношению к загадочному и малоизвестному широким массам Хевисайду такого, с полной уверенностью, сказать нельзя.

После его смерти в 1925 г. рукописи, посвящённые этой задаче, были таинственным образом похищены и не обнаружены до настоящего времени.

Но, в оставшихся неопубликованных рукописях, была найдена знаменитая формула $E = mc^2$, которая была записана за 15 лет до Эйнштейна!?

Значит, размышлял-таки Хевисайд о возможности непосредственного преобразования массы в энергию, о взаимосвязи инертных и электромагнитных свойств Мира в материальном и полевом состоянии. Очень странная история, однако!

Задачи

1. Закон Кулона

1. Определить суммарный заряд электронов в меди массой m = 1 кг.

Решение

1. Количество атомов в заданной массе меди $^{63}_{29}Cu$:

$$\frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_A}; \quad \Rightarrow \quad N = \frac{mN_A}{\mu},$$

где m = 1 кг – масса меди, $N_A \approx 6\cdot10^{23}$ – число Авогадро, $\mu \approx 63\cdot10^{-3}$ кг/моль – молярная масса меди

$$N \approx \frac{1\cdot 6\cdot 10^{23}}{63\cdot 10^{-3}} \approx 9\cdot 10^{24};$$

2. Вокруг каждого ядра меди находится n = 29 электронов, каждый из которых обладает зарядом $e \approx 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, общий заряд заданной массы меди:

$$Q = enN \approx 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 29\cdot 9\cdot 10^{24} \approx 4{,}42\cdot 10^{7}\,\text{Кл};$$

---

2. Какой заряд имел бы объём железа V = 1 см^3 , если бы удалось удалить из него миллионную долю всех содержащихся в нём электронов?

Решение

1. Параметры атома железа:

$$^{A}_{Z}X = ^{56}_{26}Fe,$$

т.е. каждый атом железа объединяет n = 26 электронов, молярная масса меди $\mu \approx 56\cdot10^{-3}$ кг/моль. Плотность железа $\rho \approx 8{,}8\cdot10^3$ кг/м^3.

2. Масса в заданном объёме железа:

$$m = \rho V \approx 8{,}8\cdot 10^{3}\cdot 10^{-6} \approx 8{,}8\cdot 10^{-3}\,\text{кг};$$

3. Общее число электронов:

$$N_\Sigma = n\frac{mN_A}{\mu} \approx \frac{8{,}8\cdot 10^{-3}\cdot 6\cdot 10^{23}}{56\cdot 10^{-3}} \approx 9\cdot 10^{22};$$

4. Искомое число удалённых электронов и их заряд:

$$N_x = \frac{N_\Sigma}{10^6} \approx \frac{9\cdot 10^{22}}{10^6} \approx 9\cdot 10^{16}; \quad Q_x = eN_x \approx 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 9\cdot 10^{16} \approx 1{,}44\cdot 10^{-2}\,\text{Кл};$$

5. При удалении N_x электронов заданный объём меди приобрёл бы положительный заряд $Q_+ \approx 1{,}44\cdot10^{-2}$ Кл.

---

3. Металлический шар радиусом r = 0,1 м несёт заряд Q = 314 нКл. Какова поверхностная плотность заряда σ?

Решение

1. Поверхностная плотность заряда:

$$\sigma = \frac{Q}{s} = \frac{Q}{4\pi r^2} \approx \frac{3{,}14 \cdot 10^{-7}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-2}} \approx 2{,}5 \frac{\text{мкКл}}{\text{м}^2};$$

---

4. Определить заряд, переданный шару радиусом r = 4 см, если его поверхностная плотность заряда $\sigma = 5{\cdot}10^{-5}$ Кл/м^2.

Решение

$$\sigma = \frac{Q}{s} = \frac{Q}{4\pi r^2}; \quad Q = 4\pi r^2 \sigma \approx 12{,}56 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-5} \approx 1 \cdot 10^{-6}\,\text{Кл};$$

---

5. С какой силой будут действовать два одинаковых точечных заряда по $q_1 = q_2 = 1\,\text{Кл}$, расположенные на расстоянии r = 1 м в вакууме и в воде?

Решение

1. Сила Шарля Огюста Кулона в вакууме при $\varepsilon = 1$:

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2} \approx k\frac{q^2}{r^2} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{1}{1} \cong 9 \cdot 10^9\,\text{Н};$$

2. Сила взаимодействия зарядов в воде при $\varepsilon \approx 80$:

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q^2}{r^2} \approx \frac{k}{\varepsilon}\frac{q^2}{r^2} \approx \frac{9 \cdot 10^9}{80} \cong 1{,}125 \cdot 10^8\,\text{Н};$$

---

6. Два одинаковых точечных отрицательных заряда находятся в воздухе на расстоянии r = 0,3 м друг от друга и взаимодействуют с силой $F = 2{,}56{\cdot}10^{-5}$ Н. Определить значение этих зарядов и количество избыточных электронов на каждом заряженном теле.

Решение

$$F = k\frac{q^2}{r^2}; \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt{\frac{Fr^2}{k}} \approx \sqrt{\frac{2{,}56 \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}09}{9 \cdot 10^9}} \approx -1{,}6 \cdot 10^{-8}\,\text{Кл};$$

$$N_e = \frac{q}{e} \approx \frac{1{,}6 \cdot 10^{-8}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} \approx 1 \cdot 10^{11};$$

---

7. С какой силой взаимодействуют два точечных заряда q_1 = 5 нКл и 400 нКл, расположенные на расстоянии r = 0,1 м друг от друга?

Решение

1. Модуль силы Кулона:

$$\left|\vec{F}_K\right| = k\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{r^2} \approx 9\cdot 10^9\,\frac{5\cdot 10^{-9}\cdot 4\cdot 10^{-7}}{10^{-2}} \approx 1{,}8\cdot 10^{-3}\,\text{Н};$$

2. Возможны два варианта направления силы, если заряды одноимённые по знаку, то силы будут отталкивающими, если разноимёнными – притягивающими.

---

8. В керосине на некотором расстоянии находятся два точечных заряда $q_1 = 4\cdot 10^{-6}$ Кл и $q_2 = 2\cdot 10^{-5}$ Кл. Определить расстояние между зарядами, если они взаимодействуют с силой $F_K = 4$ Н.

Решение

$$\left|\vec{F}_K\right| = \frac{k}{\varepsilon}\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{r^2};\quad r = \sqrt{\frac{kq_1q_2}{\varepsilon F_k}} \approx \sqrt{\frac{9\cdot 10^9\cdot 4\cdot 10^{-6}\cdot 2\cdot 10^{-5}}{4\cdot 2{,}1}} \approx 0{,}293\ \text{м};$$

---

9. С какой силой взаимодействуют два точечных заряда $q_1 = +20$ нКл и $q_2 = -90$ нКл, находящиеся на расстоянии $r = 81$ см?

Решение

$$\left|\vec{F}_K\right| = \frac{k}{\varepsilon}\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{r^2} \approx \frac{9\cdot 10^9\cdot 2\cdot 10^{-8}\cdot 9\cdot 10^{-8}}{2{,}5\cdot 0{,}656} \approx 9{,}9\cdot 10^{-6}\,\text{Н};$$

---

10. Два заряда взаимодействуют в воде с силой $F_1 = 0{,}5$ мН. С какой силой эти заряды будут взаимодействовать на таком же расстоянии в масле?

Решение

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \frac{k}{\varepsilon_1}\frac{q_1q_2}{r^2};\\ F_2 &= \frac{k}{\varepsilon_2}\frac{q_1q_2}{r^2}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1};\quad F_2 = \frac{F_1\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \approx \frac{5\cdot 10^{-4}\cdot 81}{2{,}5} \approx 1{,}62\cdot 10^{-2}\,\text{Н};$$

---

11. Два заряда, один из которых в $\zeta = 3$ раза больше другого, находясь в вакууме на расстоянии $r = 0{,}3$ м, взаимодействуют с силой $F = 30$ Н. Определить величины зарядов.

Решение

$$\left|\vec{F}_K\right| = k\frac{|q_1|\cdot|3q_1|}{r^2};\quad \Rightarrow\quad q_1 = \sqrt{\frac{Fr^2}{3k}} \approx \sqrt{\frac{30\cdot 9\cdot 10^{-2}}{3\cdot 9\cdot 10^9}} \approx 1\cdot 10^{-5}\,\text{Кл};\quad q_2 \approx 3\cdot 10^{-5}\,\text{Кл};$$

---

12. Два одинаковых маленьких шарика имеют одинаковые положительные заряды $q_1 = q_2 = 3{,}2$ нКл. Какими должны стать заряды, чтобы сила их взаимодействия на том же расстоянии уменьшилась в $\zeta = 4$ раза? Сколько электронов при этом следует добавить или удалить?

Решение

1. Чтобы уменьшить силу взаимодействия между шариками необходимо уменьшить модуль их заряда до величины q_2, т.е. добавить некоторое количество электронов N_e

$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{k}{\varepsilon}\frac{q_1^2}{r^2}; \\ \frac{F}{4} &= \frac{k}{\varepsilon}\frac{q_2^2}{r^2}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad 4 = \frac{q_1^2}{q_2^2}; \quad q_2 = \frac{1}{2}\sqrt{q_1^2} = \frac{q_1}{2} \approx 1{,}6\,\text{нКл};$$

$$N_e = \frac{q_1}{e} \approx \frac{1{,}6 \cdot 10^{-9}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 1 \cdot 10^{10};$$

---

13. Два металлических шарика радиусом $R = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ м каждый несут одинаковый электрический заряд $q_1 = q_2$ и помещены в трансформаторное масло на расстоянии $r = 0{,}5$ м. Определить поверхностную плотность заряда, если шарики взаимодействуют с силой $F = 2{,}2$ мН.

Решение

1. Заряд шариков:

$$\left|\vec{F}_K\right| = \frac{k}{\varepsilon}\frac{q^2}{r^2}; \quad q = \sqrt{\frac{Fr^2\varepsilon}{k}} \approx \sqrt{\frac{2{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}25 \cdot 2{,}5}{9 \cdot 10^9}} \approx 3{,}9 \cdot 10^{-7}\,\text{Кл};$$

2. Поверхностная плотность заряда:

$$\sigma = \frac{q}{s} = \frac{q}{4\pi R^2} \approx \frac{3{,}9 \cdot 10^{-7}}{12{,}56 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} \approx 6 \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2};$$

---

14. Два точечных заряда находятся в парафине на расстоянии $r_1 = 0{,}2$ м. На каком расстоянии они должны находиться эти заряды в воде, чтобы сила взаимодействия между ними осталась прежней?

Решение

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \frac{k}{\varepsilon_1}\frac{q^2}{r_1^2}; \\ F_2 &= \frac{k}{\varepsilon_2}\frac{q^2}{r_2^2}; \end{aligned}\right\} \quad F_1 = F_2; \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon_1 r_1^2} = \frac{1}{\varepsilon_2 r_2^2}; \quad r_2 = r_1\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \approx 0{,}2 \cdot \sqrt{\frac{2{,}1}{81}} \approx 0{,}1\,\text{м};$$

---

15. Два разноименно заряженных шарика находятся в масле на расстоянии $r_1 = 5 \cdot 10^{-2}$ м. Найти диэлектрическую проницаемость масла, если те же шарики взаимодействуют с такой же силой в воздухе на расстоянии $r_2 = 0{,}112$ м.

Решение

1. В данном случае при равенстве модулей сил взаимодействия в воздухе диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon_2 = 1$, поэтому:

$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{k}{\varepsilon_1}\frac{q^2}{r_1^2}; \\ F &= \frac{k}{\varepsilon_2}\frac{q^2}{r_2^2}; \end{aligned}\right\} \quad F_1 = F_2; \quad 1 = \frac{\varepsilon_2 r_2^2}{\varepsilon_1 r_1^2}; \quad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2 r_2^2}{r_1^2} \approx \frac{1 \cdot 1{,}24 \cdot 10^{-2}}{2{,}5 \cdot 10^{-3}} \approx 4{,}96;$$

---

16. На двух одинаковых каплях воды находится по одному избыточному электрону. Определить массу капли, если сила Кулона уравновешивается силой их гравитационного взаимодействия.

Решение

$$G\frac{m^2}{r^2} = k\frac{q^2}{r^2}; \quad Gm^2 = ke^2; \quad m = \sqrt{\frac{ke^2}{G}} \approx \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9 \cdot \left(1{,}6 \cdot 10^{-19}\right)^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}}} \approx 1{,}858 \cdot 10^{-9}\,\text{кг};$$

---

17. Два одинаковых положительно заряженных шара имеют одинаковые массы $m_1 = m_2 = 0{,}23$ кг и находятся на расстоянии, значительно превосходящем их радиусы. Заряд одного из шаров равен $q_1 = 4 \cdot 10^{-11}$ Кл. Найти заряд другого шара q_2, если сила Кулона скомпенсирована силой гравитационного взаимодействия.

Решение

$$G\frac{m^2}{r^2} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}; \quad \Rightarrow \quad q_2 = \frac{Gm^2}{kq_1} \approx \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}29 \cdot 10^{-2}}{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-11}} \approx 9{,}8 \cdot 10^{-12}\,\text{Кл};$$

---

18. Два положительных заряда q и 2q находятся на расстоянии $r = 10^{-2}$ м и взаимодействуют с силой $F_K = 7{,}2 \cdot 10^{-4}$ Н. Каково значение каждого заряда?

Решение

$$F = k\frac{q \cdot 2q}{r^2}; \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt{\frac{Fr^2}{2k}} \approx \sqrt{\frac{7{,}2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 9 \cdot 10^9}} \approx 2 \cdot 10^{-9}\,\text{Кл};$$

$q_1 = 2 \cdot$нКл; $q_2 = 2q_1 = 4$ нКл;

---

19. Три точечных заряда, расположенных на расстояниях r_{12}, r_{13} и r_{23} взаимодействуют в вакууме с силами F_{12}, F_{13} и F_{23} соответственно. Найти через заданные величины выражение для третьего заряда q_3.

Решение

1. Уравнение сил взаимодействия:

$$(1) \quad F_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}; \quad (2) \quad F_{13} = k\frac{q_1 q_3}{r_{13}^2}; \quad (3) \quad F_{23} = k\frac{q_2 q_3}{r_{23}^2};$$

2. Поделим первое уравнение на второе:

$$\frac{F_{12}}{F_{13}} = \frac{q_1 q_2 r_{13}^2}{q_1 q_3 r_{12}^2}; \quad F_{12} q_3 r_{12}^2 = F_{13} q_2 r_{13}^2; \quad \Rightarrow \quad q_2 = \frac{F_{12} q_3 r_{12}^2}{F_{13} r_{13}^2};$$

3. Подставим значение q_2 в третье уравнение:

$$F_{23} = \frac{kq_3 \cdot \dfrac{F_{12}q_3r_{12}^2}{F_{13}r_{13}^2}}{r_{23}^2}; \quad F_{23} = \frac{kq_3^2F_{12}r_{12}^2}{r_{23}^2r_{13}^2F_{13}}; \quad F_{23}F_{13}r_{13}^2r_{23}^2 = kq_3^2F_{12}r_{12}^2;$$

$$q_3 = \frac{r_{13}r_{23}}{r_{12}}\sqrt{\frac{F_{23}F_{13}}{kF_{12}}};$$

---

20. Определить модуль и направление силы, действующей на заряд q_1 = 4 нКл, помещённый посередине между двумя точеными зарядами q_2 = 30 нКл и q_3 = – 50 нКл, если они находятся в вакууме на расстоянии r_{23} = 0,6 м.

Решение

1. Силы, действующие со стороны зарядов q_2 и q_3 на зазяд q_1:

$$F_{12} = k\frac{q_1q_2}{r_{12}^2} \approx \frac{9\cdot 10^9 \cdot 4\cdot 10^{-9} \cdot\cdot 10^{-8}}{0{,}09} \approx 2\cdot 10^{-5}\,\text{Н};$$

$$F_{13} = k\frac{q_1q_3}{r_{13}^2} \approx \frac{9\cdot 10^9 \cdot 4\cdot 10^{-9} \cdot 3\cdot 10^{-8}}{0{,}09} \approx 1{,}2\cdot 10^{-5}\,\text{Н};$$

2. Модуль результирующей силы:

$$|\vec{F}_\Sigma| = F_{12} + F_{13} = 3{,}2\cdot 10^{-5}\,\text{Н}.$$

3. Вектор результирующей силы направлен в сторону заряда q_2.

---

21. В точках A и B, расстояние между которыми r = 0,2 м помещены электрические заряды q_1 = 100 нКл и q_2 = 200 нКл. Определить модуль и направление силы, действующей со стороны этих зарядов на заряд q_3 = – 1 мкКл, помещённый в воздушной среде в середине отрезка АВ.

Решение

1. Модуль силы, действующей на третий заряд, в виду его знака определится в виде разности:

$$\vec{F} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}; \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{F}\right| = F_{13} - F_{12};$$

$$\left|\vec{F}\right| = k\frac{4q_2q_3}{r^2} - k\frac{4q_1q_3}{r^2} = \frac{4kq_3}{r^2}\left(q_2 - q_1\right) \approx \frac{4\cdot 9\cdot 10^9\cdot 1\cdot 10^{-6}}{0{,}04}\cdot 10^{-7} \approx 0{,}09\ \text{Н};$$

2. Вектор результирующей силы будет направлен в сторону заряда q_2.

---

22. Два точечных электрических заряда q_1 =60 нКл и q_2 = 0,24 мкКл находятся в трансформаторном масле ($\varepsilon \approx 2{,}1$) на расстоянии r = 16 см друг от друга. Где между ними следует поместить третий заряд, чтобы под действием электрических сил он находился в состоянии равновесия? Как зависит состояние равновесия третьего заряда от его знака?

Решение

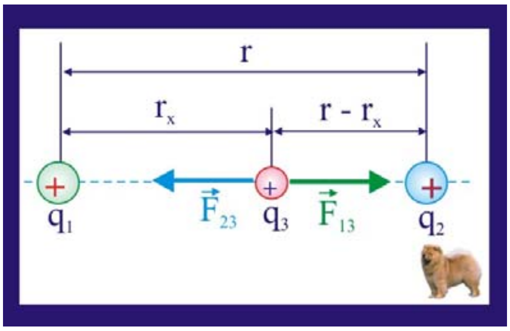


Рис. 22. Равновесие заряда q_3

1. Уравнения действующих на заряд q_3 сил:

$$F_{13} = k\frac{q_1q_3}{r_x^2};\quad F_{23} = k\frac{q_2q_3}{(r-r_x)^2};$$

$$F_{13} = F_{23};$$

$$k\frac{q_1q_3}{r_x^2} = k\frac{q_2q_3}{(r-r_x)^2};$$

$$\frac{q_1}{r_x^2} = \frac{q_2}{(r-r_x)^2};\quad \Rightarrow\quad (r-r_x)^2 = \frac{q_2}{q_1}r_x^2;\quad r_x = \frac{r}{1+\sqrt{\frac{q_2}{q_1}}} \approx \frac{0{,}16}{1+\sqrt{\frac{24\cdot 10^{-8}}{6\cdot 10^{-8}}}} \approx 0{,}053\text{м};$$

2. Равновесие будет устойчивым при наличии посередине положительного заряда, т.к. смещение q_3 приводит к возникновению возвращающей силы.

---

23. Маленький шарик массой m = 0,3 г подвешен на тонкой шёлковой нити и имеет заряд $q_1 = 3\cdot 10^{-7}$ Кл. Каким станет натяжение нити, если снизу к заряду q_1 поднести на расстояние r = 0,3 м другой шарик с одноимённым электрическим зарядом q_2 = 50 нКл?

Решение

1. В отсутствии второго заряженного тела натяжение нити по модулю равно веру шарика:

$$T_1 = mg;$$

2. Наличие второго, одноимённо заряженного шарика, приведёт к уменьшению натяжения нити на величину силы Кулона:

$$T_2 = T_1 - F_K = mg - k\frac{q_1q_2}{r^2} = 3\cdot 10^{-4}\cdot 9{,}8 - 9\cdot 10^9\frac{3\cdot 10^{-7}\cdot 5\cdot 10^{-8}}{0{,}09} \approx 1{,}44\cdot 10^{-3}\text{Н};$$

---

24. На изолирующей нити в воздухе висит шарик массой $m = 9\cdot 10^{-4}$ кг, заряд которого q = 49 нКл. Снизу к нему поднесли другой заряженный шарик на расстоянии r = 0,1 м. Какой величины и знака должен быть поднесённый заряд, чтобы нить не испытывала натяжения?

Решение

1. Натяжение нити будет равным нулю в случае равенства модулей сил тяжести и Кулона:

$$mg = k\frac{qq_x}{r^2};\quad \Rightarrow\quad q_x = \frac{mgr^2}{kq} \approx \frac{9\cdot 10^{-4}\cdot 9{,}8\cdot 0{,}01}{9\cdot 10^9\cdot 49\cdot 10^{-9}} \approx 2\cdot 10^{-7}\text{Кл};$$

2. Заряд q_x должен быть положительным, чтобы вызывать силу отталкивания.

---

25. Маленький шарик массой m = $3{\cdot}10^{-4}$ кг подвешен на тонкой шёлковой нити и имеет заряд q_1 = $3{\cdot}10^{-7}$ Кл. На какое расстояние r_x следует поднести шарик с зарядом q_2 = 50 нКл, чтобы натяжение нити стало: а) вдвое меньше; б) вдвое больше?

Решение

1. Чтобы натяжение уменьшить вдвое подносимый заряд должен быть положительным:

$$\frac{1}{2}mg = k\frac{q_1q_2}{r_x^2}; \quad \Rightarrow \quad r_x = \sqrt{\frac{2kq_1q_2}{mg}} \approx \sqrt{\frac{2\cdot 9\cdot 10^9\cdot 3\cdot 10^{-7}\cdot 5\cdot 10^{-8}}{3\cdot 10^{-4}\cdot 9{,}8}} \approx 3\ \text{см};$$

2. Натяжение нити увеличится вдвое, если поднести отрицательно заряженный шарик:

$$mg = k\frac{q_1q_2}{r_x^2}; \quad \Rightarrow \quad r_x = \sqrt{\frac{kq_1q_2}{mg}} \approx \sqrt{\frac{9\cdot 10^9\cdot 3\cdot 10^{-7}\cdot 5\cdot 10^{-8}}{3\cdot 10^{-4}\cdot 9{,}8}} \approx 2{,}1\ \text{см};$$

---

26. В точках А и В, отстоящих друг от друга на расстоянии L = 2 м, в вакууме находятся одноимённые заряды q_1 =q_2 = 10 нКл каждый. Какая сила действует на заряд q_3 = – 1 нКл, помещённый в точку С, лежащую на расстоянии x = 1 м от основания перпендикуляра, восстановленного из середины отрезка АВ?

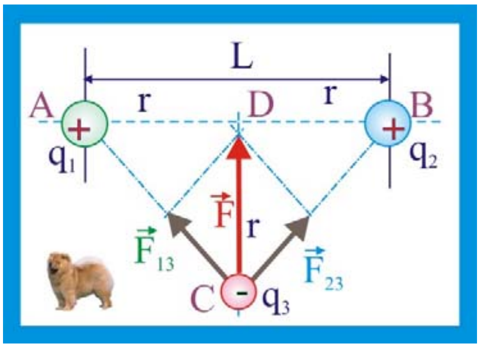


Рис. 26. Результирующая сила

Решение

1. Треугольники ΔACD и ΔCDB равнобедренные и прямоугольные, поэтому:

$$\left|\vec{F}_{13}\right| = \left|\vec{F}_{23}\right|;$$

$$\left|\vec{F}_{13}\right| = k\frac{q_1q_3}{\left(r\sqrt{2}\right)^2} = k\frac{q_1q_3}{2r^2};$$

$$\left|\vec{F}_{13}\right| \approx 9\cdot 10^9\,\frac{1\cdot 10^{-8}\cdot 1\cdot 10^{-9}}{2} \approx 4{,}5\cdot 10^{-8}\,\text{Н};$$

2. Результирующая сила, действующая на заряд q_3:

$$\left|F\right| = \sqrt{(F_{13})^2 + (F_{23})^2} = F_{13}\sqrt{2} \approx 6{,}37\ \text{Н};$$

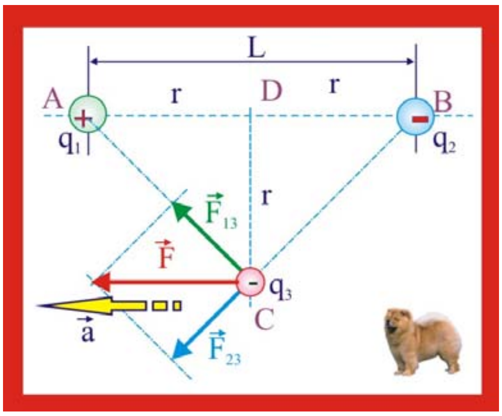


Рис. 27. Ускорение капельки

27. Электрическое поле образовано двумя зарядами q_1 = $5{\cdot}10^{-5}$ Кл и q_2 = – $5{\cdot}10^{-5}$ Кл, расположенными на расстоянии L = 0,1 м друг от друга в точках А и В. Какая сила будет действовать на капельку, находящуюся на расстоянии r = 5 см от основания перпендикуляра, восставленного из середины отрезка АВ? Заряд капельки равен заряду 10 электронов. Какое первоначальное ускорение получит капелька при массе m = $4{\cdot}10^{-8}$ кг?

Решение

1. Треугольники ΔACD и ΔCDB равнобедренные и прямоугольные, поэтому:

$$\left|\vec{F}_{13}\right| = \left|\vec{F}_{23}\right|; \quad r = 0{,}05\ \text{м}; \quad q_3 \approx 10e \approx 1{,}6\cdot 10^{-18}\ \text{Кл};$$

$$\left|\vec{F}_{13}\right| = k\frac{q_1q_3}{\left(r\sqrt{2}\right)^2} = k\frac{q_1q_3}{2r^2};$$

$$\left|\vec{F}_{13}\right| \approx 9\cdot 10^9\,\frac{5\cdot 10^{-4}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-18}}{2\cdot 2{,}5\cdot 10^{-3}} \approx 1{,}44\cdot 10^{-9}\,\text{Н};$$

2. Результирующая сила, действующая на заряд q_3:

$$\left|F\right| = \sqrt{\left(F_{13}\right)^2 + \left(F_{23}\right)^2} = F_{13}\sqrt{2} \approx 2\cdot 10^{-9}\ \text{Н};$$

3. Начальное ускорение капельки:

$$\left|\vec{a}\right| = \frac{\left|\vec{F}\right|}{m} \approx \frac{2\cdot 10^{-9}}{4\cdot 10^{-8}} \approx 5{,}2\cdot 10^{-2}\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

---

28. Заряды +q, –q и q_0 расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной *a*. Какова величина силы действующей на заряд q_0?

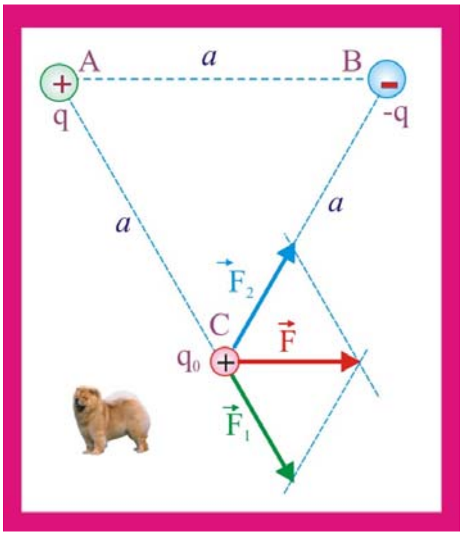


Рис. 28. Равносторонний треугольник

Решение

1. Так как |+q| = |–q| и заряды расположены на одинаковом расстоянии *a* от заряда q_0, то:

$$\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right|;$$

$$\left|\vec{F}_1\right| = k\frac{qq_0}{a^2}; \quad \left|\vec{F}_2\right| = k\frac{qq_0}{a^2};$$

2. Модуль силы, действующей на заряд q_0 с учётом того, что $(\vec{F}_1;\vec{F}_2) = 120^0$:

$$\left|\vec{F}\right| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos 120^0};$$

$$\left|\vec{F}\right| = \sqrt{2F_1^2 - F_1^2} = F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|\cdot|q_0|}{a^2};$$

---

29. Три одинаковых одноимённых заряда величиной +q расположены в вершинах равностороннего треугольника. Какой заряд надо поместить в центре треугольника, чтобы результирующая сила, действующая на каждый заряд, была равна нулю?

Решение

1. Определим условия, при котором на отрицательный заряд – q_x, помещён-

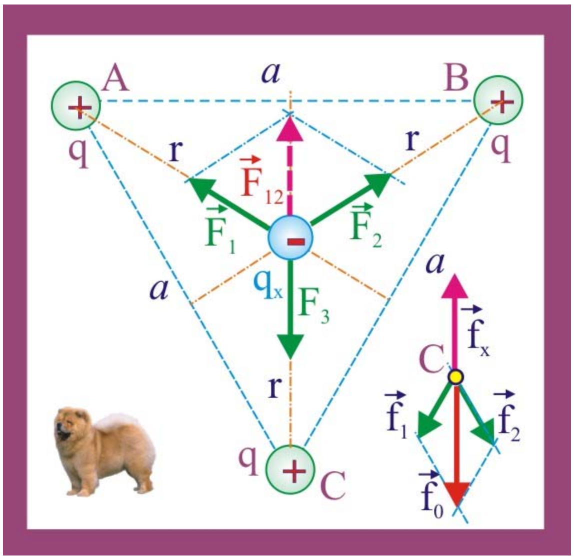


Рис. 29. Центральный заряд

ный в центре равностороннего треугольника на пересечении высот (медиан, биссектрис) сумма сил Кулона со стороны остальных трёх зарядов будет равна нулю: в этом случае векторы действующих на центральный заряд будут составлять угол 120^0, т.е. сумма векторов любого модуля будет равна нулю

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0;$$

2. Величину отрицательного заряда q_x определим из условия равенства нулю суммы сил кулона, действующих на заряды, расположенные в вершинах правильного треугольника. Например, на заряд расположенный в тоске С:

$$\left|\vec{f}_0\right| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + 2f_1f_2\cos 60^0}; \quad \left|\vec{f}_1\right| = \left|\vec{f}_2\right| = \left|f\right|; \quad \left|\vec{f}_0\right| = f\sqrt{3} = k\frac{q^2}{a^2}\sqrt{3};$$

$$\left|\vec{f}_0\right| = \left|f_x\right|; \quad \sqrt{3}k\frac{q^2}{a^2} = k\frac{qq_x}{r^2} = k\frac{qq_x}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = k\frac{3qq_x}{a^2}; \quad \Rightarrow \quad -q_x = \frac{q\sqrt{3}}{3};$$

---

30. В центре квадрата, в вершинах которого находятся заряды +q, помещён отрицательный заряд. Какой должна быть величина этого заряда, чтобы система находилась в равновесии?

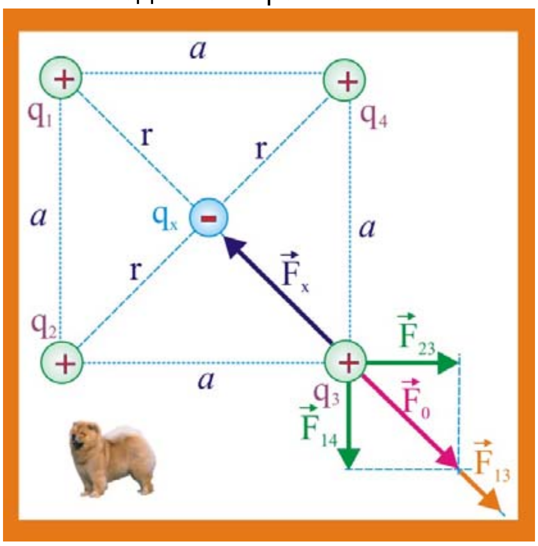


Рис. 30. Заряд в центре квадрата

Решение

1. Условие равновесия заданной системы электрических зарядов на примере заряда q_3, на который действуют четыре силы Кулона, при этом:

$$\left|\vec{F}_{14}\right| = \left|\vec{F}_{23}\right|; \quad 2r = a\sqrt{2}; \quad r = \frac{a\sqrt{2}}{2};$$

$$\left|\vec{F}_0\right| = \sqrt{F_{14}^2 + F_{23}^2} = F\sqrt{2} = \sqrt{2}k\frac{q^2}{a^2};$$

$$\left|\vec{F}_{13}\right| = k\frac{q^2}{(2r)^2} = k\frac{q^2}{\left(a\sqrt{2}\right)^2} = k\frac{q^2}{2a^2};$$

$$\left|\vec{F}_0 + \vec{F}_{13}\right| = \left|\vec{F}_x\right|;$$

$$k\frac{q^2}{a^2}\sqrt{2} + k\frac{q^2}{2a^2} = k\left(\frac{qq_x}{r^2}\right) = k\frac{2qq_x}{a^2};$$

$$\sqrt{2}q + \frac{q}{2} = 2q_x; \quad \Rightarrow \quad -q_x = \frac{1}{2}q\left(\sqrt{2} + 0{,}5\right) \approx 0{,}955q;$$

---

31. Четыре равных по величине заряда находятся в вершинах квадрата. Как будут вести себя заряды, будучи предоставленными, самим себе: сближаться, отдаляться или находится в равновесии?

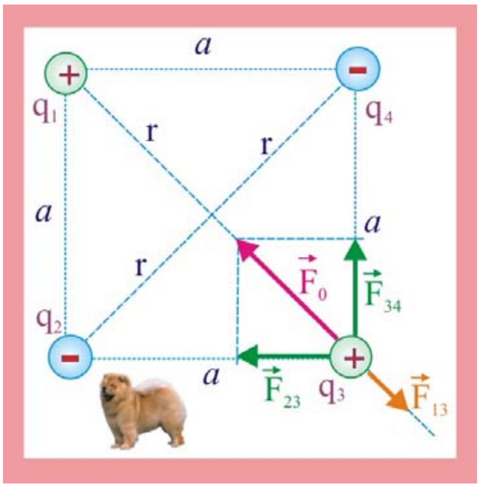


Рис. 31. Поведение зарядов

Решение

1. Выделим один из зарядов, например, q_3 и рассмотрим действующую на него систему сил Кулона $\{\vec{F}_{23};\vec{F}_{34};\vec{F}_{13}\}$:

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_{23} + \vec{F}_{34}; \quad |\vec{F}_{23}| = |\vec{F}_{34}| = |\vec{F}|;$$

$$|\vec{F}_0| = \sqrt{F^2 + F^2} = F\sqrt{2} = k\sqrt{2}\frac{q^2}{a^2};$$

$$|\vec{F}_{13}| = k\frac{q^2}{\left(a\sqrt{2}\right)^2} = k\frac{q^2}{2a^2};$$

$$|\vec{F}_0| > |\vec{F}_{13}| \quad \Rightarrow \quad \text{заряды сближаются;}$$

---

32. К шёлковым нитям длиной ℓ = 0,2 м, точки подвеса которых находятся на одном уровне на расстоянии x = 0,1 м друг от друга, подвешены два маленьких шарика массой m = 50 мг каждый. При сообщении шарикам равных по модулю и противоположных по знаку зарядов, шарики сблизились на расстояние r = 2 см. Определить заряды, сообщённые шарикам.

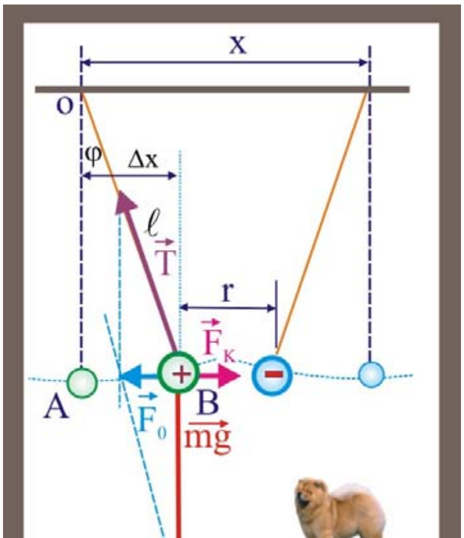


Рис. 32. Шарики на нитях

Решение

1. Притяжение шариков будет происходить под действием силы Кулона, причём условие равновесия заряженных шариков будет иметь место при условии:

$$|\vec{F}_0| = |\vec{F}_K|,$$

где $|\vec{F}_0|$ – равнодействующая силы тяжести $m\vec{g}$ и натяжения нити подвеса $\vec{T}$.

2. Угол отклонения нити от равновесного положения φ определим из прямоугольного треугольника ΔOAB:

$$\varphi = \arcsin\frac{\Delta x}{\ell} \approx \arcsin\frac{0{,}04}{0{,}2} \approx 11{,}5^0;$$

3. Натяжение нити:

$$T\cos\varphi = mg; \quad \Rightarrow \quad T = \frac{mg}{\cos\varphi}.$$

4. Модуль результирующей силы F_0:

$$T\sin\varphi = F_0; \quad \Rightarrow \quad F_0 = mg\,tg\varphi = k\frac{q_x^2}{r^2}; \quad q_x = \sqrt{\frac{mg\,tg\varphi\, r^2}{k}};$$

$$q_x = \sqrt{\frac{5 \cdot 10^{-5} \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{9 \cdot 10^9}} \approx 2{,}1\text{нКл};$$

---

33. Два шарика массой по m = 2,5·10 $^{-4}$ кг подвешены в одной точке на диэлектрических нитях длиной ℓ = 1 м. После того, как шарикам сообщили одинаковые по модулю и знаку заряды они разошлись на r = 0,06 м. Определить модуль зарядов шариков.

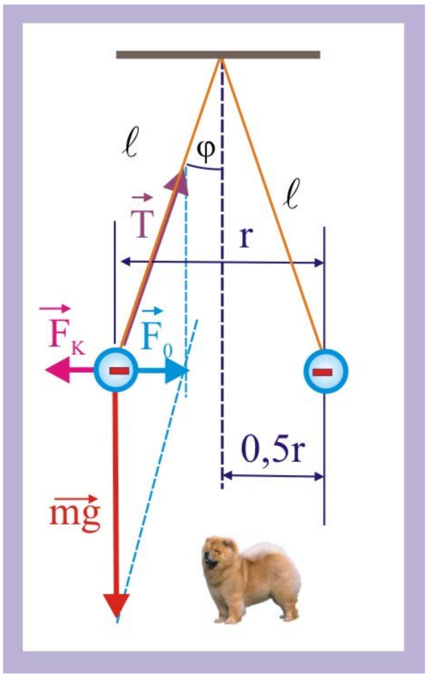


Рис. 33. Расхождение шариков

Решение

1. Отталкивание шариков будет происходить под действием силы Кулона, причём условие равновесия заряженных шариков будет иметь место при условии:

$$\left|\vec{F}_0\right| = \left|\vec{F}_K\right|,$$

где $\left|\vec{F}_0\right|$ – равнодействующая силы тяжести $m\vec{g}$ и натяжения нити подвеса $\vec{T}$.

2. Угол отклонения нити от равновесного положения φ определим из прямоугольного треугольника:

$$\varphi = \arcsin\frac{\Delta}{\ell} \approx \arcsin\frac{0{,}04}{0{,}2} \approx 11{,}5^0;$$

3. Натяжение нити:

$$T\cos\varphi = mg; \quad \Rightarrow \quad T = \frac{mg}{\cos\varphi}.$$

4. Модуль результирующей силы F_0:

$$T\sin\varphi = F_0; \quad \Rightarrow \quad F_0 = mgtg\varphi = k\frac{q_x^2}{r^2}; \quad q_x = \sqrt{\frac{mgtg\varphi r^2}{k}};$$

$$q_x = \sqrt{\frac{2{,}5 \cdot 104 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}015 \cdot 3{,}6 \cdot 10^{-3}}{9 \cdot 10^9}} \approx 3{,}8\text{нКл};;$$

---

34. Два маленьких шарика одинакового радиуса и массы подвешены в одной точке на диэлектрических нитях равной длины ℓ. Когда шарикам сообщили одинаковые одноимённые заряды q, нити разошлись, образовав угол φ = 60^0. Найти массу шарика.

Решение

1. Так как угол расхождения нитей равен φ = 60^0, то расстояние между центрами шариков будет равно длине подвеса: $r = \ell$.

2. Условие равновесия шарика:

$$T\sin\frac{\varphi}{2} = F_0; \quad \Rightarrow \quad F_0 = mgtg\frac{\varphi}{2} = k\frac{q^2}{r^2}; \quad \Rightarrow \quad m = \frac{kq^2}{r^2 gtg\frac{\varphi}{2}};$$

---

35. Два шарика массой по $m = 1{,}5\cdot 10^{-3}$ кг каждый, подвешенные в одной точке на шёлковых нитях, после получения одинаковых по величине отрицательных зарядов разошлись на $r = 0{,}1$ м, так что нити образовали угол $\alpha = 36^0$. Определить количество электронов, полученных каждым шариком.

Решение

1. Условие равновесия шарика после получения заряда:

$$T\sin\frac{\alpha}{2} = F_0; \quad \Rightarrow \quad F_0 = mgtg\frac{\alpha}{2} = k\frac{q^2}{r^2}; \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt{\frac{1}{k}mgtg16^0 r^2};$$

$$-q = \sqrt{\frac{1{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 9{,}8\cdot 0{,}325\cdot 0{,}01}{9\cdot 10^9}} \approx -7{,}2\cdot 10^{-8}\,\text{Кл}.$$

2. Количество электронов, соответствующее полученному значению отрицательного заряда:

$$N_e \approx \frac{q}{e} \approx \frac{7{,}2\cdot 10^{-8}}{1{,}6\cdot 10^{-19}} \approx 4{,}55\cdot 10^{11};$$

---

36. Два одинаковых шарика массой $m = 2\cdot 10^{-5}$ кг каждый подвешены в воздухе на невесомых нерастяжимых нитях длиной $\ell = 0{,}2$ м, закреплённых сверху в одной точке. Один из шариков отводится в сторону и ему сообщается некоторый заряд и шарик отпускается. После соприкосновения с другим шариком нити разошлись, образовав угол $\alpha = 60^0$. Определить заряд сообщённый первому шарику.

Решение

1. Так-так угол расхождения нитей равен 60^0, то:

$$r = \ell; \quad \varphi = \frac{\alpha}{2} = 30^0;$$

2. При соприкосновении шариков заряд поровну распределяется между ними, поэтому условие равновесия разошедшихся шариков будет иметь вид:

$$mgtg\varphi = k\frac{q^2}{4r^2}; \quad q = \sqrt{\frac{mgtg\varphi 4r^2}{k}} \approx \sqrt{\frac{2\cdot 10^5\cdot 9{,}8\cdot 0{,}577\cdot 4\cdot 0{,}04}{9\cdot 10^9}} \approx 4{,}47\cdot 10^{-8}\,\text{Кл}.$$

---

37. Два шарика одинаковой массы и радиуса с одинаковыми зарядами, подвешенные в одной точке на нитях равной длины, опускают в жидкий диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε и плотностью ρ_2. Какова должна быть плотность материала шариков ρ_1, чтобы угол расхождения нитей не изменился при перемещении системы зарядов из воздуха в диэлектрик?

Решение

1. Силы Кулона, действующие в воздухе и диэлектрике:

$$\left.\begin{aligned} F_{K1} &= k\frac{q^2}{r^2}; \\ F_{K2} &= \frac{k}{\varepsilon}\frac{q^2}{r^2}; \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{F_{K1}}{F_{K2}} = \varepsilon;$$

2. В жидком диэлектрике помимо силы тяжести и натяжения нити к шарикам будет приложена сила Архимеда, которая в воздухе много меньше силы тяжести. Условия механического равновесия шарика в этом случае представятся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} F_{01} &= \rho_1 g V \mathrm{tg}\varphi; \\ F_{02} &= (\rho_1 g V - \rho_2 g V)\mathrm{tg}\varphi; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{F_{01}}{F_{02}} = \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_2};$$

3. Поскольку равновесие шариков характеризуется равенством модулей равнодействующей механических сил и силы Кулона, то:

$$\left.\begin{aligned} F_{01} &= F_{K1}; \\ F_{02} &= F_{K2}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_2} = \varepsilon; \quad \rho_1 = \frac{\rho_2 \varepsilon}{\varepsilon + 1};$$

---

38. Два шарика из одного материала одинаковых радиусов подвешены в одной точке на нитях одинаковой длины. Когда шарики заряжают одноимёнными зарядами, нити расходятся на некоторый угол. Какой должна быть диэлектрическая проницаемость диэлектрика, чтобы при погружении в него системы электрических зарядов угол расхождения нитей не изменился? Плотность материала шариков в три раза больше, чем плотность жидкого диэлектрика $\rho_1 = 3\rho_2$.

Решение

1. Силы Кулона, действующие в воздухе и диэлектрике:

$$\left.\begin{aligned} F_{K1} &= k\frac{q^2}{r^2}; \\ F_{K2} &= \frac{k}{\varepsilon}\frac{q^2}{r^2}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{F_{K1}}{F_{K2}} = \varepsilon;$$

2. В жидком диэлектрике помимо силы тяжести и натяжения нити к шарикам будет приложена сила Архимеда, которая в воздухе много меньше силы тяжести. Условия механического равновесия шарика в этом случае представятся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} F_{01} &= \rho_1 g V \mathrm{tg}\varphi; \\ F_{02} &= \left(\rho_1 g V - \frac{\rho_1}{3} g V\right)\mathrm{tg}\varphi; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{F_{01}}{F_{02}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2};$$

3. Поскольку равновесие шариков характеризуется равенством модулей равнодействующей механических сил и силы Кулона, то:

$$\left.\begin{aligned} F_{01} &= F_{K1}; \\ F_{02} &= F_{K2}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{3}{2} = \varepsilon; \quad \varepsilon = 1{,}5;$$

---

39. Две маленькие бусинки массами m_1 и m_2 подвешены на невесомой нити на расстоянии r друг от друга. Каждой бусинке сообщены одинаковые по модулю, но разные по знаку заряды +q и –q. Определить натяжение нити в точке подвеса.

Решение

1. Силы Кулона, приложенные к шарикам, в данном случае будут совпадать по направлению с векторами соответствующих сил тяжести, поэтому модуль

натяжения нити определится в виде суммы:

$$\left|\vec{T}\right| = (m_1 + m_2)g + k\frac{q^2}{r^2};$$

---

40. Два шарика А и В массой m = 0,1 кг имеют одинаковые по величине и противоположные по знаку заряды |q| = 10^{-5} Кл. Шарик А подвешен на изолированной от земли пружине жёсткостью k = 9,8 Н/м над шариком В. В начальном положении сила кулоновского взаимодействия F_K = 4mg. Верхний конец пружины медленно поднимают. На сколько надо переместить точку О, чтобы натяжение нити стало равным нулю?

Решение

1. В начальном состоянии натяжение нити ВС будет равно:

$$T_1 = 4mg - mg = 3mg;$$

2. Чтобы натяжение ВС стало равным нулю, сила кулона должна стать равной по модулю весу шарика

$$F_K = mg;$$

3. Шарик А в этом случае находится под действием трёх сил: силы тяжести $m\vec{g}$, силы Кулона $\left|\vec{F}_K\right| = mg$ и силы упругости $\left|\vec{F}_y\right| = k\Delta x$, условие равновесия которых определяется уравнением:

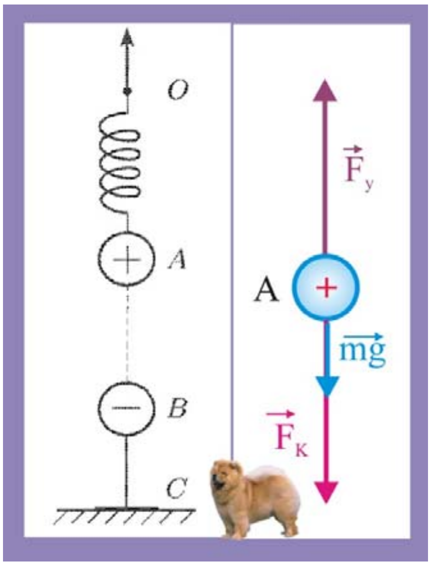


Рис. 40. Заряды и пружина

$$\vec{F}_K + \vec{F}_y + m\vec{g} = 0; \quad F_K + mg = F_y; \quad k_y\Delta x = \frac{2mg}{k_y} \approx \frac{2 \cdot 0{,}1 \cdot 9{,}8}{9{,}8} \approx 0{,}2\ \text{м};$$

---

41. Два одинаковых проводящих шарика с зарядами q_1 = – 1,5·10^{-5} Кл и q_2 = + 2,5·10^{-5} Кл вследствие притяжения соприкоснулись и вновь разошлись на расстояние r = 0,05 м. Определить силу электрического взаимодействия между зарядами после соприкосновения.

Решение

1. Заряд шариков после соприкосновения:

$$q = \frac{|q_2| - |q_1|}{2} = 5 \cdot 10^{-6}\,\text{Кл};$$

2. Сила кулона, после расхождения шариков:

$$F_K = k\frac{q^2}{r^2} \approx 9 \cdot 10^9 \frac{25 \cdot 10^{-12}}{25 \cdot 10^{-4}} \approx 90\ \text{Н};$$

---

42. Небольшие одинакового размера проводящие шарики с зарядом q_1 = 70 нКл и q_2 = 30 нКл приведены в соприкосновение и вновь разведены на расстояние r = 10 см. Определить модуль силы электрического взаимодействия.

Решение

$$q_x = \frac{q_1 + q_2}{2}; \quad F_K = k\frac{q_x^2}{r^2} \approx 9\cdot 10^9\,\frac{25\cdot 10^{-16}}{10^{-3}} \approx 22{,}5\cdot 10^{-3}\,\text{Н};$$

---

43. Два одинаковых металлических шарика заряжены так, что заряд оного из них в пять раз больше другого, т.е. $q_2 = 5\,q_1$. Шарики привели в соприкосновение и раздвинули на прежнее расстояние. Как изменится сила взаимодействия, если шарики были заряжены: одноимённо? разноимённо?

Решение

1. Одноименно заряженные шарики:

$$q_x = \frac{5q + q}{2} = 3q;$$

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= k\frac{q\cdot 5q}{r^2}; \\ F_2 &= k\frac{3q\cdot 3q}{r^2}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{9}{5} = 1{,}8;$$

2. Разноимённо заряженные шарики:

$$q_x = \frac{5q - q}{2} = 2q;$$

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= k\frac{q\cdot 5q}{r^2}; \\ F_2 &= k\frac{2q\cdot 2q}{r^2}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{4}{5} = 0{,}8;$$

---

44. Металлический шарик имеет $N_e = 5\cdot 10^6$ избыточных электронов. Сколько избыточных электронов останется на шарике после его соприкосновения с другим таким же шариком, имеющим заряд $q_2 = +\,3{,}2\cdot 10^{-14}$ Кл?

Решение

1. Первоначальный заряд шарика:

$$-q_1 \approx eN_e \approx 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 5\cdot 10^6 \approx -8\cdot 10^{-13}\,\text{Кл};$$

2. Заряд шарика после соприкосновения:

$$-q_3 = \frac{q_1 - q_2}{2} = 7{,}68\cdot 10^{-13};$$

3. Количество избыточных электронов:

$$\wp_e \approx \frac{q_3}{e} \approx 4{,}8\cdot 10^6\,;$$

---

45. Определить скорость вращения электрона по орбите в атоме водорода, если радиус орбиты $r = 5{,}3\cdot 10^{-11}$ м.

Решение

1. Условие нахождения электрона на стационарной круговой орбите вокруг ядра атома водорода ${}^1_1H$:

$$k\frac{e^2}{r^2} = m_e\frac{v^2}{r}; \quad v \approx \sqrt{\frac{ke^2}{rm_e}} \approx \sqrt{\frac{9\cdot 10^9\cdot 2{,}56\cdot 10^{-38}}{5{,}3\cdot 10^{-11}\cdot 9{,}1 10^{-31}}} \approx 2{,}2\cdot 10^6\,\frac{м}{c};$$

---

46. Вокруг точечного заряда + q_1 по стационарной круговой орбите радиуса r с угловой скоростью ω движется отрицательно заряженная частица. Чему равно отношение заряда частицы к её массе (удельный заряд)?

Решение

1. Условие нахождения частицы на стационарной круговой орбите вокруг ядра атома водорода ${}^1_1H$:

$$k\frac{q_1 q_2}{r^2} = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r; \quad \Rightarrow \quad \frac{q_2}{m} = \frac{\omega^2 r^3}{kq_1};$$

---

47. Маленький шарик, имеющий массу m и положительный заряд +q, помещён в электрическом поле, созданное двумя неподвижными положительными зарядами q_1 и q_2. Расстояния между неподвижными зарядами и шариком заданы. Определить ускорение $\vec{a}$ точке О. Будет ли меняться во времени модуль и направление ускорения?

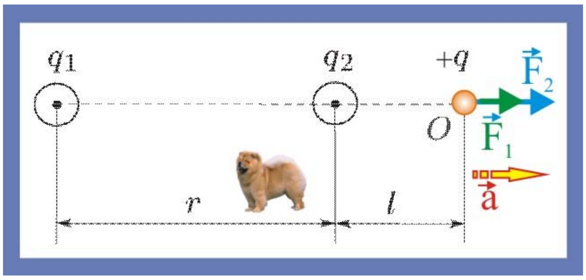


Рис. 47. Ускорение заряженного шарика

Решение

1. Результирующая сила, действующая на положительно заряженный шарик в точке О:

$$F_\Sigma = F_1 + F_1;$$

$$F_\Sigma = k\left[\frac{q_1 q}{(r+\ell)^2} + \frac{q_2 q}{r^2}\right];$$

$$F_\Sigma = kq\left[\frac{q_1}{(r+\ell)^2} + \frac{q_2}{r^2}\right];$$

2. Модуль ускорения шарика:

$$a = \frac{F_\Sigma}{m} = \frac{kq}{m}\left[\frac{q_1}{(r+\ell)^2} + \frac{q_2}{r^2}\right];$$

3. Как видно из полученного уравнения ускорения, его модуль зависит от расстояния ℓ, по мере удаления от точки О расстояние ℓ увеличивается, следовательно модуль ускорения – уменьшается.

---

2. Напряжённость электрического поля

48. На заряд $q = 2\cdot10^{-7}$ Кл, находящийся в некоторой точке электрического поля, действует сила $F = 1{,}5\cdot10^{-2}$ Н. Какова напряжённость поля в этой точке?

Решение

$$\vec{F} = q\vec{E}; \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{E}\right| = \frac{F}{q} \approx \frac{1{,}5\cdot10^{-2}}{2\cdot10^{-7}} \approx 7{,}5\cdot10^{4}\,\frac{В}{м};$$

---

49. С каким ускорением к Земле будет двигаться тело массой $m = 0{,}5$ г с электрическим зарядом $q = 10^{-6}$ Кл в электрическом поле Земли напряжённостью $E \approx 100$ В/м?

Решение

1. Ускорение, обусловленное действием электрического поля:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m} \approx \frac{10^{-6}\cdot100}{5\cdot10^{-4}} \approx 0{,}2\,\frac{м}{с^2};$$

2. Полное ускорение тела в условиях гравитационного и электрического поля:

$$a_{\Sigma} = g + a \approx 10\,\frac{м}{с^2};$$

---

50. На каком расстоянии от поверхности заряженной сферы радиусом $R = 5$ см напряжённость электрического поля в воздухе будет равна $E = 16$ В/м? Поверхностная плотность заряда $\sigma = 8{,}85\cdot10^{-8}$ Кл/м^2. Какая сила будет действовать на заряд $q_2 = 50$ нКл в этой точке поля?

Решение

1. Расстояние, на котором имеет место заданная напряжённость электрического поля:

$$E = k\frac{q_1}{r^2} = k\frac{4\pi R^2\sigma}{r^2}; \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{4\pi k R^2\sigma}{E}};$$

$$r \approx \sqrt{\frac{4\cdot3{,}14\cdot9\cdot10^{9}\cdot2{,}5\cdot10^{-3}\cdot8{,}85\cdot10^{-8}}{16}} \approx 1{,}25\ м;$$

2. Сила, действующая на заряд q_2 на расстоянии r от поверхности сферы:

$$F = q_2E = 5\cdot10^{-8}\cdot16 = 8\cdot10^{-7}\,Кл;$$

---

51. Проводящий шар радиусом R = 0,3 м имеет поверхностную плотность заряда σ = $2\cdot10^{-8}$ Кл/м^2. Найти напряжённость поля в точке, находящейся на расстоянии r = 0,7 м от поверхности шара, находящемся в жидкости с диэлектрической проницаемостью ε = 2.

Решение

$$E = \frac{k}{\varepsilon}\frac{q}{r^2} = \frac{k4\pi R^2\sigma}{\varepsilon r^2} \approx \frac{9\cdot10^9\cdot4\cdot3{,}14\cdot0{,}09\cdot2\cdot10^{-8}}{2\cdot0{,}49} \approx 207{,}8\frac{В}{м};$$

---

52. Проводящему шару, радиус которого R = 0,25 м, сообщается заряд q = $5\cdot10^{-9}$ Кл. Чему равна напряжённость поля в центре шара и в точке, находящейся на расстоянии r = 0,25 м от его поверхности?

Решение

1. Электрические заряды в проводнике расположены на поверхности. Проанализируем электрическое поле в окрестностях металлического проводника при равновесном состоянии зарядов. Если заряды в проводнике находятся в покое, то это свидетельствует об отсутствии тока и перпендикулярности линий напряжённости поля. Если бы линии напряжённости составляли с поверхностью проводника угол отличный от прямого, то возникла бы составляющая вектора напряжённости поля, направленная вдоль поверхности, что должно было бы привести к перемещению зарядов, т.е. к возникновению тока. В случае произвольной поверхности проводника линии напряжённости будут перпендикулярны локальным поверхностям. В этой связи напряжённость электрического поля внутри проводника равна нулю:

$$E_1 = 0;$$

2. Напряжённость заряженного проводящего шара эквивалентна напряжённости точечного заряда, заряда расположенного в центре сферы:

$$E_2 = k\frac{q}{r^2} \approx 9\cdot10^9\frac{5\cdot10^{-9}}{0{,}25} \approx 180\frac{В}{м};$$

---

53. Оценить заряд земного шара, если напряжённость электрического поля у поверхности составляет E $\approx$ 100 В/м?

Решение

$$E = k\frac{q}{R^2}; \quad q = \frac{ER^2}{k} \approx \frac{100\cdot4\cdot10^{13}}{9\cdot10^9} \approx 455\cdot10^3\,Кл;$$

---

54. В некоторой точке поля, созданного точечным зарядом в воздухе, напряжённость E = $9\cdot10^8$ В/м. Какой станет напряжённость в этой точке, если пространство вокруг заряда окружить водой? керосином?

Решение

$$E_1 = \frac{E}{\varepsilon_1} = \frac{9\cdot10^8}{81} \approx 1{,}1\cdot10^7\frac{В}{м}; \quad E_2 = \frac{E}{\varepsilon_2} \approx \frac{9\cdot10^8}{2{,}1} \approx 4{,}28\cdot10^8\frac{В}{м};$$

---

55. В какой среде точечный заряд $q = 4{,}5 \cdot 10^{-7}$ Кл создаёт на расстоянии r = 5 см от себя электрическое поле напряжённостью $E = 2 \cdot 10^4$ В/м?

Решение

$$E = \frac{k}{\varepsilon}\frac{q}{r^2}; \quad \Rightarrow \quad E\varepsilon r^2 = kq; \quad \varepsilon = \frac{kq}{Er^2} \approx \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4{,}5 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 10^4 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3}} \approx 81\,(\text{вода});$$

---

56. В некоторой точке поля на заряд $q = 3 \cdot 10^{-9}$ Кл в воздухе действует сила $F = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ Н. Найти напряжённость поля в этой точке. Определить величину заряда, создающего поле, если он расположен на расстоянии r = 0,3 м.

Решение

1. Напряжённость поля:

$$F = qE; \quad E = \frac{F}{q} = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-5}}{3 \cdot 10^{-9}} \cong 5\,\frac{\text{кВ}}{\text{м}};$$

2. Величина заряда:

$$E = k\frac{q_x}{r^2}; \quad q_x = \frac{Er^2}{k} \approx \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 0{,}09}{9 \cdot 10^9} \approx 50\ \text{нКл};$$

---

57. В точке А напряжённость поля, создаваемого точечным положительным зарядом E_1 = 36 В/м, а в точке В E_2 = 9 В/м. Определить напряжённость поля в точке С, находящейся в середине отрезка АВ.

Решение

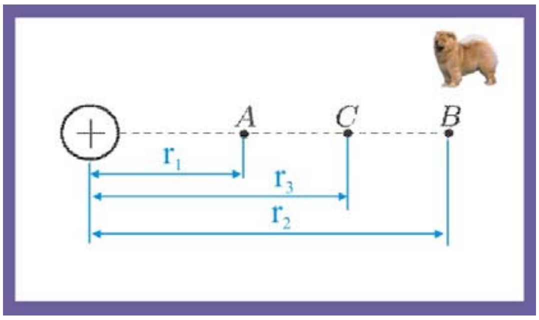


Рис. 57. Напряжённость поля

1. Напряжённость поля в заданных точках:

$$E_1 = \frac{kq}{r_1^2}; \quad E_2 = \frac{kq}{r_2^2};$$

$$E_3 = \frac{kq}{r_3^2} = \frac{kq}{\left[r_1 + \frac{(r_2 - r_1)}{2}\right]^2};$$

2. Расстояния от точечного заряда до заданных точек:

$$r_1 = \sqrt{\frac{kq}{E_1}}; \quad r_2 = \sqrt{\frac{kq}{E_2}}; \quad r_3 = \sqrt{\frac{kq}{E_1}} + \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{kq}{E_2}} - \sqrt{\frac{kq}{E_1}}\right) = \sqrt{kq}\left(\sqrt{\frac{1}{E_1}} + \frac{\sqrt{\frac{1}{E_2}} - \sqrt{\frac{1}{E_1}}}{2}\right);$$

$$r_3 = \sqrt{kq}\left(\sqrt{\frac{1}{36}} + \frac{\sqrt{\frac{1}{9}} - \sqrt{\frac{1}{36}}}{2}\right) \approx 0{,}25\sqrt{kq}; \quad r_3^2 = 0{,}0625kq;$$

$$E_3 \approx 1/0{,}0625 \approx 16 \quad \text{В/м};$$

---

58. В двух точках, находящихся на расстоянии r_1 = 1 м друг от друга в воздухе помещены заряды $q_1 = 8\cdot10^{-6}$ Кл и $q_2 = 7{,}2\cdot10^{-6}$ Кл. Определить напряжённость поля, созданного этими зарядами в точке, лежащей на расстоянии r_2 = 0,4 м от первого заряда, на прямой, соединяющей заряды.

Решение

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2; \quad \left|\vec{E}\right| = k\left(\frac{q_1}{r_2^2} + \frac{q_2}{(r_1 + r_2)^2}\right) \approx 9\cdot10^9\left(\frac{8\cdot10^{-6}}{0{,}16} + \frac{7{,}2\cdot10^{-6}}{1{,}96}\right) \approx 4{,}8\cdot10^5\,\frac{\text{В}}{\text{м}};$$

---

59. Два точечных заряда $Q_1 = +5q$ и $Q_2 = -2q$ находятся на расстоянии r = 0,1 м друг от друга. В какой точке линии, проходящей через эти заряды, напряжённость поля будет равна нулю?

Решение

1. Искомая точка будет расположена от заряда Q_2 на расстоянии, при котором:

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0; \quad k\frac{Q_1}{(r+x)^2} - k\frac{Q_2}{x^2} = 0; \quad 5qx^2 = 2q(r+x)^2; \quad 5x^2 = 2r^2 + 4rx + 2x^2;$$

$$3x^2 - 4rx - 2r^2 = 0; \quad x^2 - \frac{4r}{3}x - \frac{2r^2}{3} = 0; \quad x^2 - 0{,}133x - 6{,}67\cdot10^{-3} = 0;$$

$$x = 0{,}0665 + \sqrt{4{,}42\cdot10^{-3} + 6{,}67\cdot10^{-3}} \approx 0{,}17\ \text{м}.$$

---

60. В точках А и В, отстоящих друг от друга на расстоянии x = 0,6 м размещены заряды q_1 = – 250 нКл и q_2 = + 250 нКл. Определить напряжённость посял в точке D, которая лежит на расстоянии y = 0,4 м от основания перпендикуляра, восстановленного из середины отрезка АВ.

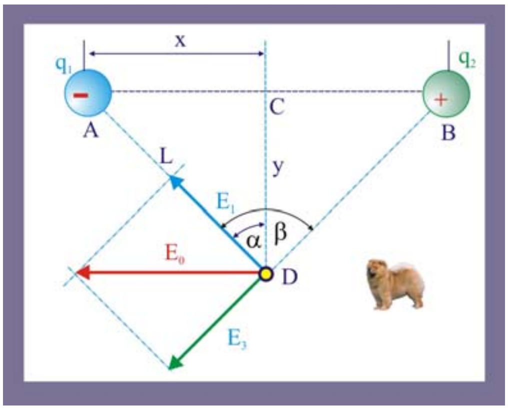


Рис. 60. Напряжённость поля

Решение

1. Расстояние L между точкой D и зарядами q_1 и q_2:

$$L = \sqrt{x^2 + y^2} \approx 0{,}5\ \text{м};$$

2. Величина угла α из ΔACD:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{x}{y} = \operatorname{arctg}\frac{3}{4} \approx 36{,}8^0;$$

3. Угол между векторами

$$\beta = (\vec{E}_1; \vec{E}_2) = 2\alpha \approx 73{,}7^0;$$

4. Модули векторов напряжённостей:

$$\left|\vec{E}_1\right| = \left|\vec{E}_2\right| \approx k\frac{|q|}{L^2} \approx 9\cdot10^9\,\frac{2{,}5\cdot10^{-7}}{0{,}25} \approx 9000\,\frac{\text{В}}{\text{м}};$$

5. Модуль результирующего вектора напряжённости электрического поля:

$$\left|\vec{E}_0\right| = \sqrt{2E^2 + 2E^2\cos 61^0} \approx E\sqrt{2 + 0{,}56} \approx 14{,}4\,\frac{\text{кВ}}{\text{м}};$$

---

61. Расстояние между зарядами $q_1 = -6{,}4\cdot10^{-6}$ Кл и $q_2 = +6{,}4\cdot10^{-6}$ Кл $2x = 0{,}12$ м. Найти напряжённость роля в точке D, удалённой на расстояние $L = 0{,}08$ м от каждого из зарядов.

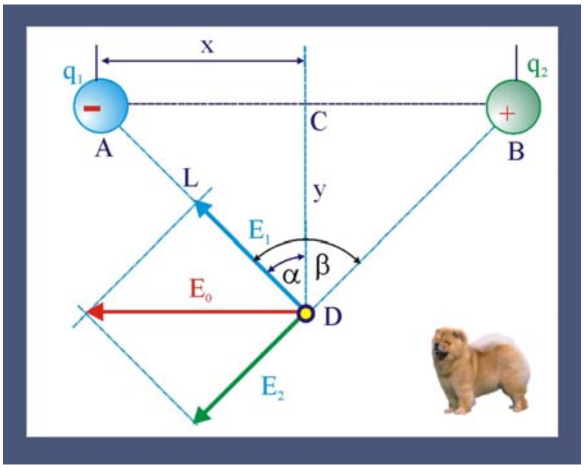


Рис. 61. Напряженность поля диполя

Решение

2. Величина угла α из ΔACD:

$$\alpha = \arccos\frac{x}{L} = \operatorname{arctg}\frac{6}{8} \approx 41{,}4^0;$$

3. Угол между векторами

$$\beta = (\vec{E}_1;\vec{E}_2) = 2\alpha \approx 83^0;$$

4. Модули векторов напряжённостей:

$$\left|\vec{E}_1\right| = \left|\vec{E}_2\right| \approx k\frac{|q|}{L^2};$$

$$E \approx 9\cdot10^9\frac{6{,}4\cdot10^{-6}}{6{,}4\cdot10^{-3}} \approx 9\cdot10^6\,\frac{В}{м};$$

5. Модуль результирующего вектора напряжённости электрического поля:

$$\left|\vec{E}_0\right| = \sqrt{2E^2 + 2E^2\cos 83^0} \approx E\sqrt{2+0{,}56} \approx 1{,}35\cdot10^7\,\frac{В}{м};$$

---

62. Два заряда $q_1 = 2\cdot10^{-8}$ Кл и $q_2 = 1{,}6\cdot10^{-6}$ Кл расположены на расстоянии $L = 5$ см друг от друга. Найти напряжённость поля в точке, удалённой от первого заряда на $r_1 = 3$ см и от второго заряда на $r_2 = 4$ см.

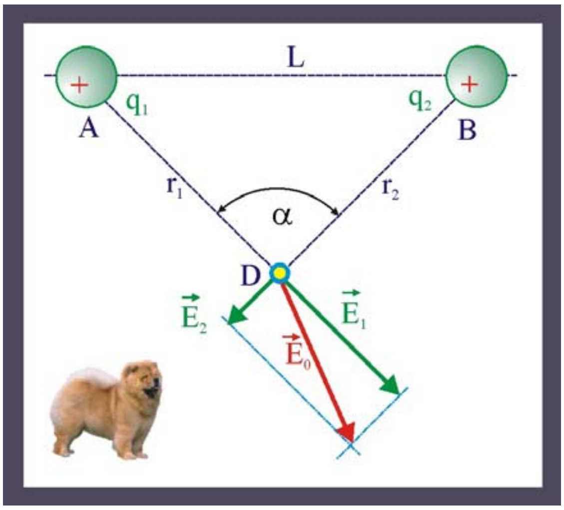


Рис. 62. Поле одноимённых зарядов

Решение

1. Модули напряжённостей поля, создаваемого зарядами в заданной точке:

$$\left|\vec{E}_1\right| = k\frac{q_1}{r_1^2} \approx 9\cdot10^9\frac{2\cdot10^{-8}}{9\cdot10^{-4}} \approx 2\cdot10^5\,\frac{В}{м};$$

$$\left|\vec{E}_2\right| = k\frac{q_2}{r_1^2} \approx 9\cdot10^9\frac{1{,}6\cdot10^{-6}}{1{,}6\cdot10^{-3}} \approx 9\cdot10^6\,\frac{В}{м};$$

2. Заданные расстояния указывают, что ΔADB прямоугольный, т.е. $\alpha = \pi/2$, следовательно:

$$\left|\vec{E}_0\right| = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} \approx 9\cdot10^6\,\frac{В}{м};$$

---

63. В двух вершинах равностороннего треугольника находятся заряды $q_1 = q_2 = +5\cdot10^{-10}$ Кл. Сторона треугольника $r = 0{,}05$ м. Найти напряжённость электрического поля, создаваемого двумя зарядами в третьей вершине треугольника. Как изменится напряжённость поля, если сменить знак у одного из зарядов?

Решение

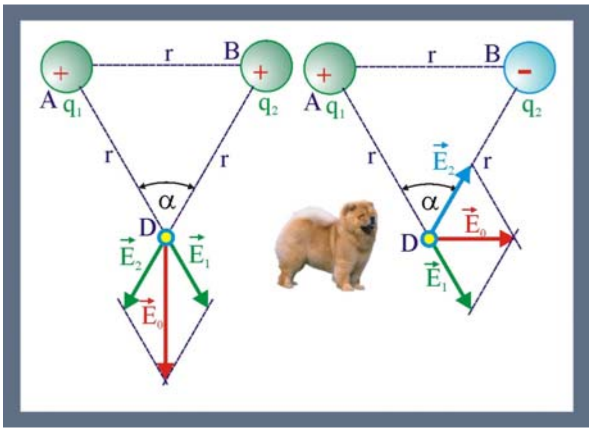


Рис. 63. Правильный треугольник

1. Модули напряжённостей электрического поля:

$$\left|\vec{E}_1\right| = \left|\vec{E}_2\right| \approx k\frac{q}{r^2} \approx 1{,}8 \cdot 10^3 \frac{В}{м};$$

2. Напряжённость поля в точке D в случае двух одноимённых зарядов:

$$\left|\vec{E}_0\right| = \sqrt{2E^2 + 2E^2\cos 60^0};$$

$$\left|\vec{E}_0\right| = E\sqrt{3} \approx 3{,}1 \cdot 10^3 \frac{В}{м};$$

3. Напряжённость поля в точке D в случае двух разноимённых зарядов:

$$\left|\vec{E}_0\right| = \sqrt{2E^2 + 2E^2\cos 120^0} \approx E \approx 1{,}8 \cdot 10^3 \frac{В}{м};$$

---

64. Одинаковые по модулю, но разные по знаку заряды расположены в двух вершинах равностороннего треугольника со стороной r = 2 м. Напряжённость поля в третьей вершине треугольника составляет E_0 = 40,5 В/м. Найти значение зарядов.

Решение

2. Напряжённость поля в точке D (рис. 63) в случае двух разноимённых зарядов:

$$\left|\vec{E}_0\right| = \sqrt{2E^2 + 2E^2\cos 120^0} = E = k\frac{q}{r^2};$$

$$q = \frac{Er^2}{k} = \frac{40{,}5 \cdot 4}{9 \cdot 10^9} \approx 1{,}8 \cdot 10^{-8}\frac{Н}{м}; \quad q_1 = +1{,}8 \cdot 10^{-8}\frac{В}{м}; \quad q_2 = -1{,}8 \cdot 10^{-8}\frac{В}{м};$$

---

65. В однородном электрическом поле находится пылинка масса, которой составляет m = 4·10 $^{-10}$ кг, пылинка несёт отрицательный заряд q = 1,6·10 $^{-11}$ Кл. Какой величины и направление должно быть поле, чтобы пылинка оказалась в состоянии безразличного равновесия?

Решение

1. Состояние безразличного равновесия наступит при равенстве модулей силы тяжести и силы Кулона и противоположном направлении этих векторов,

$$m\vec{g} + q\vec{E} = 0; \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{E}\right| = \frac{mg}{q} = \frac{4 \cdot 10^{-10} \cdot 9{,}8}{1{,}6 \cdot 10^{-11}} \approx 245\frac{В}{м};$$

---

66. Алюминиевый шарик массой m и плотностью ρ_2, несущий заряд q помещён в масло с диэлектрической проницаемостью ε и плотностью ρ_1. Определить значение вертикального электрического поля при котором шарик будет в масле оставаться в покое.

Решение

1. В заданной ситуации на шарик действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз; сила Архимеда $F_A = \rho gV$, направленная вертикально вверх, сила кулона $F_K = qE$, которая должна быть направлена вертикально вверх, чтобы компенсировать действие двух первых сил:

$$\vec{F}_A + m\vec{g} + \vec{F}_K = 0; \quad mg - F_A = F_K;$$

$$\rho_2 gV - \rho_1 gV = qE; \quad E = \frac{gV(\rho_2 - \rho_1)}{q} = \frac{mg(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_2 q};$$

---

67. На какой угол отклонится шарик с зарядом q = 49 нКл, массой m = 0,4 г, подвешенный на шёлковой нити, если его поместить в горизонтальное электрическое поле с напряженностью E = 10^4 В/м?

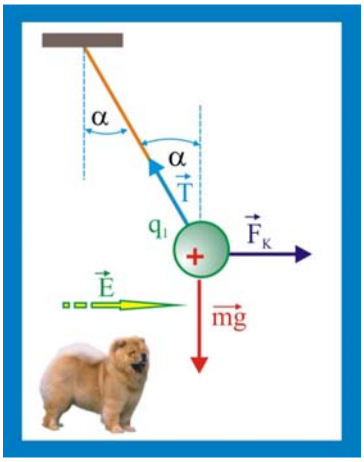


Рис. 67. Отклонение шарика

Решение

1. Условие равновесия шарика при действии на него трёх сил: силы тяжести $m\vec{g}$; натяжения нити $\vec{T}$ и силы Кулона $\vec{F}_K$:

$$\vec{T} + \vec{F}_K + m\vec{g} = 0; \quad |\vec{T}| = \frac{mg}{\cos\alpha};$$

$$T\sin\alpha = F_K; \quad mg\,tg\alpha = qE;$$

$$tg\alpha = \frac{qE}{mg}; \quad \alpha = arctg\frac{qE}{mg} \approx arctg\left(\frac{4{,}9\cdot 10^{-8}\cdot 10^4}{4\cdot 10^{-4}\cdot 9{,}8}\right);$$

$$\alpha = arctg(0{,}125) \approx 7{,}13^0;$$

---

68. Шарик массой m, несущий заряд q, подвешен на тонкой диэлектрической нити и помещён в горизонтальное однородное электрическое поле, в котором шарик отклонился на угол α. Найти напряжённость поля.

Решение

1. Условие равновесия шарика при действии на него трёх сил: силы тяжести $m\vec{g}$; натяжения нити $\vec{T}$ и силы Кулона $\vec{F}_K$:

$$\vec{T} + \vec{F}_K + m\vec{g} = 0; \quad |\vec{T}| = \frac{mg}{\cos\alpha};$$

$$T\sin\alpha = F_K; \quad mg\,tg\alpha = qE; \quad E = \frac{mg\,tg\alpha}{q};$$

---

69. С каким ускорением будет падать шарик массой m с зарядом +q в электрическом поле Земли напряжённостью E, направленном перпендикулярно её поверхности?

Решение

1. Уравнение второго закона Ньютона в проекции на ось, перпендикулярную поверхности Земли:

$$mg + F_K = ma; \quad a = \frac{mg + qE}{m} = g + \frac{q}{m}E,$$

где q/m –удельный заряд шарика.

70. Какой должна быть напряжённость однородного электрического поля в вакууме, чтобы покоящийся электрон получил ускорение $a = 2{\cdot}10^{12}$ м/с^2? Через какое время этот электрон достигнет скорости $v = 5{\cdot}10^6$ м/с?

Решение

1. Из уравнения второго закона Ньютона:

$$eE = m_e a; \quad E = \frac{m_e a}{e} \approx \frac{9{,}1\cdot10^{-31}\cdot2\cdot10^{12}}{1{,}6\cdot} \approx 11{,}4\frac{\text{В}}{\text{м}};$$

2. Из определения ускорения:

$$< a >= \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}; \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta v}{< a >} \approx \frac{5\cdot10^6}{2\cdot10^{12}} \approx 2{,}5\cdot10^{-6}\text{с}.$$

71. Электрон, обладающий скоростью $v = 1{,}8{\cdot}10^4$ м/с, слетает в однородное электрическое поле в вакууме с напряжённостью $E = 3{\cdot}10^{-3}$ В/м и движется против направления силовых линий. С каким ускорением будет двигаться электрон и какова будет его скорость при прохождении расстояния s = 7,1 см? Сколько времени потребуется для достижения этой скорости?

Решение

1. Конечная скорость электрона на основании теоремы об изменении его кинетической энергии

$$K_2 - K_1 = A_{1\to2}; \quad \frac{m_e}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) = eEs; \quad v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2eEs}{m_e}};$$

$$v_2 \approx \sqrt{3{,}24\cdot10^8 + \frac{2\cdot1{,}6\cdot10^{-9}\cdot3\cdot10^{-3}\cdot7{,}1\cdot10^{-2}}{9{,}1\cdot10^{-31}}} \approx 2\cdot10^4\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

2. Ускорение электрона:

$$eE = m_e a; \quad \Rightarrow \quad a = \frac{eE}{m_e} \approx \frac{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot3\cdot10^{-3}}{1{,}6\cdot10^{-19}} \approx 5{,}27\cdot10^8\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

3. Время прохождения электроном расстояния s:

$$v_2 = v_1 + a\tau; \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{v_2 - v_1}{a} \approx 3{,}8\cdot10^{-6}\text{с}.$$

72. Как изменится ускорение тела массой m при сообщении ему заряда q при падении в поле Земли с напряжённостью E?

Решение

1. Ускорение заряженного тела:

$$mg + qE = ma; \quad a = g + \frac{q}{m}E;$$

2. Изменение ускорения:

$$\Delta a = a - g = \frac{q}{m}E;$$

---

73. В однородном электрическом поле с напряжённостью E = 3·10^{6} В/м, силовые линии которого составляют β = 30^{0} с вертикалью, висит на диэлектрической нити шарик массой m = 2·10^{-3} кг, несущий заряд q = 3,3·10^{-9} Кл. Определить силу натяжения нити.

Решение

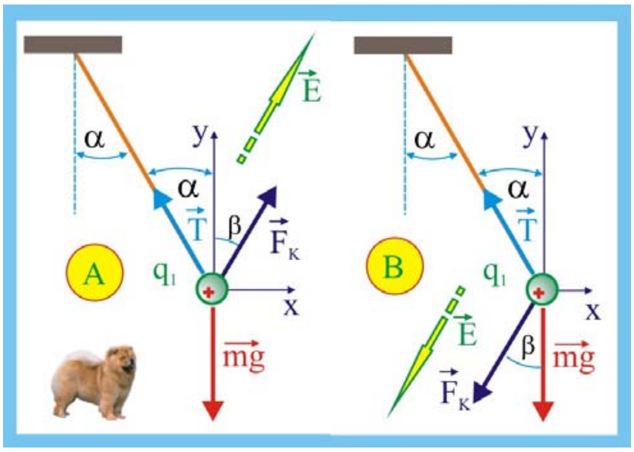


Рис. 73. Заряженный шарик в однородном поле

1. Уравнения равновесия шарика, в случае А:

$$\left.\begin{array}{ll}(x) & qE\sin\beta - T\sin\alpha = 0; \\ (y) & T\cos\alpha + qE\cos\beta - mg = 0;\end{array}\right\}$$

2. Угол отклонения нити α:

$$qE\sin\beta = T\sin\alpha;$$

$$T = \frac{qE\sin\beta}{\sin\alpha};$$

$$qE\text{ctg}\alpha\sin\beta = mg - qE\cos\beta;$$

$$\text{ctg}\alpha = \frac{mg}{qE\sin\beta} - \text{ctg}\beta;$$

$$\alpha_A = \text{arcctg}\left(\frac{mg}{qE\sin\beta} - \text{ctg}\beta\right) \approx \text{arcctg}\left(\frac{2\cdot 10^{-3}\cdot 9{,}8}{3{,}3\cdot 10^{-9}\cdot 3\cdot 10^{6}\cdot 0{,}5} - 1{,}73\right) \approx 23{,}2^{0};$$

3. Натяжение нити в случае А:

$$T_A = \frac{qE\sin\beta}{\sin\alpha} \approx \frac{3{,}3\cdot 10^{-9}\cdot 3\cdot 10^{6}\cdot 0{,}5}{0{,}4} \approx 1{,}24\cdot 10^{-2}\,\text{Н};$$

4. Уравнения равновесия шарика и угол отклонения нити, в случае В:

$$\left.\begin{array}{ll}(x) & qE\sin\beta - T\sin\alpha = 0; \\ (y) & T\cos\alpha - qE\cos\beta - mg = 0;\end{array}\right\}$$

$$T = \frac{qE\sin\beta}{\sin\alpha};$$

$$qE\text{ctg}\alpha\sin\beta = mg + qE\cos\beta;$$

$$\alpha \; = \text{arcctg}\left(\frac{mg}{qE\sin\beta} + \text{ctg}\beta\right) \approx \text{arcctg}\left(\frac{2\cdot 10^{-3}\cdot 9{,}8}{3{,}3\cdot 10^{-9}\cdot 3\cdot 10^{6}\cdot 0{,}5} + 1{,}73\right) \approx 10^{0};$$

5. Натяжение нити в случае В:

$$T_B = \frac{qE\sin\beta}{\sin\alpha} \approx \frac{3{,}3\cdot 10^{-9}\cdot 3\cdot 10^{6}\cdot 0{,}5}{0{,}176} \approx 2{,}81\cdot 10^{-2}\,\text{Н};$$

---

3. Потенциал. Разность потенциалов

74. В некоторой точке пространства, занятого электрическим полем заряд q = 5·10^{-7} Кл обладает энергией П = 10^{-3} Дж. Определить потенциал этой точки.

Решение

1. Поскольку заряд неподвижен и поле статическое, то он будет обладать потенциальной энергией:

$$\varphi = \frac{\Pi}{q} = \frac{10^{-3}}{5\cdot 10^{-7}} = 2\text{кВ};$$

---

75. Какой энергией обладает заряд q = 10^{-6} Кл в точке электростатического поля с потенциалом φ = 5 кВ?

Решение

$$\varphi = \frac{\Pi}{q}; \quad \Rightarrow \quad \Pi = \varphi q = 5\cdot 10^{3}\cdot 1\cdot 10^{-6} = 5\cdot 10^{-3}\text{Дж};$$

---

76. Работа при перемещении заряда q = 4·10^{-7} Кл из бесконечности в некоторую часть пространства, занятого электрическим полем, равна A = 2·10^{-4} Дж. Определить потенциал поля в этой точке.

Решение

$$\varphi = \frac{A}{q} = \frac{2\cdot 10^{-4}}{4\cdot 10^{-7}} = 500\ \text{В};$$

---

77. При переносе заряда из бесконечности в точку с потенциалом φ = 60 В была совершена работа A = 6·10^{-5} Дж. Каково значение переносимого заряда?

Решение

$$\varphi = \frac{A}{q}; \quad \Rightarrow \quad q = \frac{A}{\varphi} = \frac{6\cdot 10^{-5}}{60} = 1\,\text{мкКл};$$

---

78. Определить потенциал точки, расположенной на расстоянии r = 2 м от точечного заряда q = 3·10^{-7} Кл.

Решение

$$\varphi = \frac{kq}{r} \approx \frac{9\cdot 10^{9}\cdot 3\cdot 10^{-7}}{2} \approx 1{,}35\cdot 10^{3}\text{В};$$

---

79. Шар радиусом R = 19 см заряжен до потенциала φ = 500 В. Определить заряд шара и потенциал точки, находящейся на расстоянии r = 41 см от поверхности шара.

Решение

$$\varphi = \frac{kq}{R}; \quad \Rightarrow \quad q = \frac{\varphi R}{k} \cong \frac{500 \cdot 0{,}19}{9 \cdot 10^9} \cong 10\text{нКл};$$
$$\varphi(r) = \frac{kq}{R + r} \cong \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-8}}{0{,}5} \cong 180\ \text{В};$$

---

80. Уединённому проводящему шару диаметром d = 0,3 м сообщили заряд q = 90 нКл. Каким потенциалом обладает шар? Каков потенциал точки, расположенной на расстоянии r = 0,15 м от поверхности шара в воздушной среде.

Решение

$$\varphi = \frac{kq}{R} \cong \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 9 \cdot 10^{-8}}{0{,}15} \cong 5{,}4\ \text{кВ};$$
$$\varphi(r) = \frac{kq}{R + r} \cong \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 9 \cdot 10^{-8}}{0{,}3} \cong 2{,}7\ \text{кВ};$$

---

81. Электрическое поле образовано точечным зарядом q = $4{\cdot}10^{-7}$ Кл, помещённым в трансформаторное масло. Определить напряжённость поля и потенциал в точке, удалённой от заряда на расстояние r = 0,2 м.

Решение

1. Напряжённость поля на расстоянии r от точечного заряда q:

$$E = \frac{k}{\varepsilon}\frac{q}{r^2} \cong \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4{,}7 \cdot 10^{-7}}{2{,}25 \cdot 0{,}04} \cong 4{,}7 \cdot 10^4\,\frac{\text{В}}{\text{м}};$$

2. Потенциал электрического поля:

$$\varphi(r) = \frac{k}{\varepsilon}\frac{q}{r} \cong \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4{,}7 \cdot 10^{-7}}{2{,}25 \cdot 0{,}2} \cong 9{,}4 \cdot 10^3\,\text{В};$$

---

82. Металлическая сфера диаметром d = 0,18 м заряжена до потенциала φ = 300 В. Определить поверхностную плотность заряда на этой сфере.

Решение

1. Заряд проводящей сферы:

$$\varphi = \frac{kq}{R}; \quad \Rightarrow \quad q = \frac{\varphi d}{2k};$$

2. Поверхностная плотность заряда:

$$\sigma = \frac{q}{s} = \frac{\varphi d}{2k\pi d^2} = \frac{\varphi}{2\pi d k} \cong \frac{300}{6{,}28 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 0{,}18} \cong 2{,}95 \cdot 10^{-8}\,\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2};$$

---

83. Поверхностная плотность отрицательного заряда на сфере радиусом R = 0,02 м равна σ = 100 нКл/м^2. Каков потенциал сферы? Какому количеству избыточных электронов это эквивалентно?

Решение

1. Потенциал сферы:

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}; \quad q = 4\pi R^2\sigma; \quad \varphi = \frac{kq}{R} = 4\pi Rk\sigma \cong 12{,}56 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 9 \cdot 10^{9} \cdot 10^{-7} \approx 226\ \text{В};$$

2. Количество избыточных электронов:

$$N_e = \frac{q}{e} = \frac{4\pi R^2\sigma}{e} \approx \frac{12{,}56 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-7}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} \approx 3{,}14 \cdot 10^{9};$$

---

84. Капля воды радиусом R = 10^{-3} м содержит N_e = 10^8 избыточных электронов. Каков потенциал капли?

Решение

1. Модуль заряда капли:

$$q = eN_e \cong 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{8} \cong 1{,}6 \cdot 10^{-11}\,\text{Кл};$$

2. Электрический потенциал капли:

$$\varphi = \frac{kq}{R} \cong \frac{9 \cdot 10^{9} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-11}}{10^{-3}} \cong 144\ \text{В};$$

---

85. Сколько дополнительных электронов следует передать уединённому проводящему шарику радиусом R = 7,2 см, чтобы его потенциал в вакууме стал равным φ = 6000 В?

Решение

1. Заряд шарика:

$$\varphi = \frac{kq}{R}; \quad q = \frac{\varphi R}{k};$$

2. Эквивалентное избыточное число электронов:

$$N_e = \frac{q}{e} = \frac{\varphi R}{ke} \cong \frac{6 \cdot 10^{3} \cdot 7{,}2 \cdot 10^{-2}}{9 \cdot 10^{9} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} \approx 3 \cdot 10^{11};$$

---

86. Шарик радиусом R = 2 см заряжен до потенциала φ = 500 В. Чему равна поверхностная плотность заряда шарика? Какой потенциальной энергией обладает точечный заряд q_2 = 10^{-8} Кл на расстоянии r = 0,48 м от поверхности шара?

Решение

1. Поверхностная плотность заряда:

$$\sigma = \frac{q_1}{s}; \quad \varphi_1 = \frac{kq_1}{R}; \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{\varphi_1}{4\pi Rk} \cong \frac{500}{12{,}56 \cdot 0{,}02 \cdot 9 \cdot 10^{-9}} \cong 2{,}21 \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2};$$

2. Потенциальная энергия заряда q_2, расположенного на расстоянии (R+r) от поверхности сферы:

$$\Pi = k\frac{q_1 q_2}{R + r} = \frac{\varphi q_2}{R + r} \cong \frac{500 \cdot 10^{-8}}{0,5} \cong 10^{-7}\,Дж;$$

---

87. Электрическое поле в глицерине (ε = 43) образовано точечным зарядом q = 9 нКл. Какова разность потенциалов двух точек пространства, удалённых от заряда на расстояние r_1 = 3 см и r_2 = 12 см?

Решение

1. Разность потенциалов $\Delta\varphi$:

$$\varphi_1 = \frac{kq}{r_1}; \quad \varphi_2 = \frac{kq}{r_2}; \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = kq\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right);$$

$$\Delta\varphi \cong 9 \cdot 10^9 \cdot 9 \cdot 10^{-9}\left(\frac{1}{3 \cdot 10^{-2}} - \frac{1}{0,12}\right) \approx 46,5\ В;$$

---

88. Два одинаковых шарика находятся на расстоянии r = 0,1 м друг от друга в керосине (ε = 2) и взаимодействуют с силой F = $3,2\cdot10^{-4}$ Н. Радиусы шариков одинаковы, R = 1 см. Найти потенциалы шариков.

Решение

1. Заряды шариков ввиду равного размера будут одинаковыми:

$$F_K = \frac{k}{\varepsilon}\frac{q^2}{r^2}; \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt{\frac{Fr^2\varepsilon}{k}};$$

2. Потенциал каждого шарика:

$$\varphi = \frac{k}{\varepsilon}\frac{q}{R} = \frac{k}{\varepsilon R}\sqrt{\frac{Fr^2\varepsilon}{k}} = \frac{r}{R}\sqrt{\frac{Fk}{\varepsilon}} \cong \frac{0,1}{0,01}\sqrt{\frac{3,2 \cdot 10^{-4} \cdot 9 \cdot 10^9}{2}} \cong 1,2 \cdot 10^4\ В;$$

---

89. Два одинаковых шарика с потенциалами по φ = 9 кВ расположены в воздухе так, что на расстоянии между их центрами составляет r = 0,18 м. Какова сила взаимодействия тел, если их радиусы одинаковы R = $3\cdot10^{-3}$м?

Решение

1. Заряд каждого шарика:

$$q_1 = q_2 = \frac{\varphi R}{k} \approx \frac{9 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{9 \cdot 10^9} \approx 3 \cdot 10^{-9}\,Кл;$$

2. Сила взаимодействия между шариками:

$$F_K = k\frac{q^2}{(R + 2r)^2} \approx \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 9 \cdot 10^{-18}}{3,46 \cdot 10^{-2}} \approx 2,24 \cdot 10^{-6}\,Н;$$

---

90. В некоторых двух точках пространства, занятого электрическим полем точечного заряда, напряжённость отличается в 4 раза. Как отличаются потенциалы этих точек?

Решение

1. Соотношение напряжённостей в заданных точках поля:

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= k\frac{q}{r_1^2};\\ E_2 &= k\frac{q}{r_2^2}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = 4; \quad \frac{r_2}{r_1} = 2;$$

2. Соотношение потенциалов заданных точек поля:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= k\frac{q}{r_1};\\ \varphi_2 &= k\frac{q}{r_2} = k\frac{q}{2r_1}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = 2;$$

---

91. Мыльный пузырь радиусом R = 2·см заряжен до потенциала φ = 1 кВ. Пузырь лопнул, превратившись в каплю воды радиусом r = $5\cdot 10^{-4}$ м. Найти потенциал образовавшейся капли.

Решение

1. Заряд мыльного пузыря:

$$\varphi_1 = \frac{kq}{R}; \quad q = \frac{\varphi_1 R}{k};$$

2. Заряд капли:

$$\varphi_2 = \frac{kq}{r} = \varphi_1\frac{R}{r} = \frac{10^3\cdot 2\cdot 10^{-2}}{5\cdot 10^{-4}} = 4\cdot 10^4\,\text{В};$$

---

92. В однородном поле движутся электрические заряды. Какие заряды перемещаются под действием поля, а какие под действием сторонних сил? Какой знак имеет, при этом, совершаемая работа

Решение

1. Напряжённость электрического поля и сила, действующая на заряд, связана векторным соотношением:

$$\vec{F} = q\vec{E},$$

другими словами, направление вектора напряжённости и силы Кулона совпадают. Из этого следует, что в случаях 1 и 4 (рис. 92) движение протекает под действием сторонних сил.

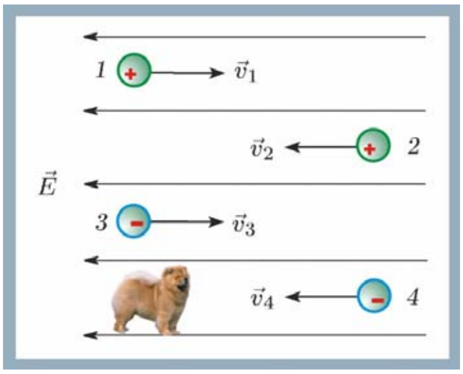


Рис. 92. Движение зарядов

2. Работа по перемещению заряда в электрическом поле:

$$\delta A = |F|d\vec{r} = Fdr\cos(\vec{F};d\vec{r}) = Fdr\cos(\vec{F};\vec{v}),$$

в случаях 1 и 4 косинус угла между векторами силы и скорости будет равен – 1, т.е. работа в этом случае имеет отрицательное значение.

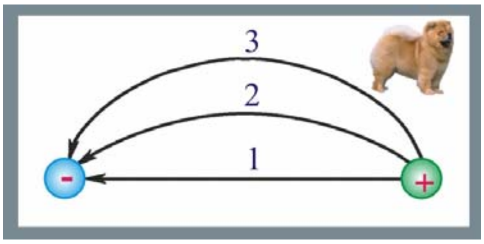


Рис. 93. Работа сил поля

93. Сравнить работы сил поля по перемещению заряда q_+ и q_- по изображённым траекториям.

Решение

1. Электрическое поле неподвижных зарядов, таким образом, как и гравитационное поле, обладает свойством потенциальности, т.е. работа, производимая такими полями, не зависит от вида траектории, а определяется только положениями начальной и конечной точек перемещения.

Свойство потенциальности обусловлено тем обстоятельством, что в электростатических полях проявляются консервативные силы, дающие возможность каждую точку поля охарактеризовать с энергетических позиций. Действительно, совершаемая работа должна соответствовать определённому изменению энергии перемещаемого заряда.

2. Напряжённость электростатического поля может быть представлена в виде градиента потенциала

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi = -\nabla\varphi,$$

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

3. Работу электрического поля $A_{1\to 2}$ при перемещении заряда q из точки 1 в точку 2 (рис. 93) можно определить как:

$$A_{1\to 2} = q(\varphi_1 - \varphi_2),.$$

4. Электрическое поле неподвижных зарядов, таким образом, как и гравитационное поле, обладает свойством потенциальности, т.е. работа, производимая такими полями, не зависит от вида траектории, а определяется только положениями начальной и конечной точек перемещения.

---

94. Электрический заряд q_+ перемещается по замкнутому контуру ABCD. На каких участках работа имеет положительное значение? отрицательное значение? равна нулю? Чему равна работа перемещения по всему контуру?

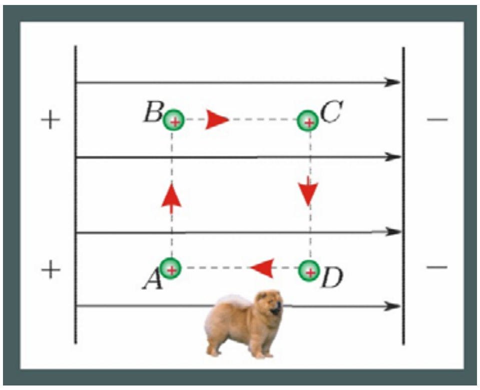


Рис. 94. Работа по замкнутому контуру

Решение

1. Так как работа на элементарном перемещении δA определяется взаимным направлением векторов $\vec{F}$ и $d\vec{r}$:

$$\delta A = |F| d\vec{r} = F dr \cos(\vec{F}; d\vec{r}),$$

то $A_{BC} > 0$, $A_{DA} < 0$. Перемещения AB и BC происходят по эквипотенциальным линиям $\varphi_A = \varphi_B$, $\varphi_C = \varphi_D$, поэтому $A_{AB} = A_{CD} = 0$.

---

95. Определить работу сил электростатического поля при перемещении заряда $q_0 = 10^{-8}$ Кл из точки C в точку D, если в точке A находится заряд $q_1 = 5\cdot 10^{-6}$ Кл, а в точке B заряд $q_2 = 2\cdot 10^{-6}$ Кл, AB = r_1 = 0,4 м, AC = r_2 = 0,3 м.

Решение

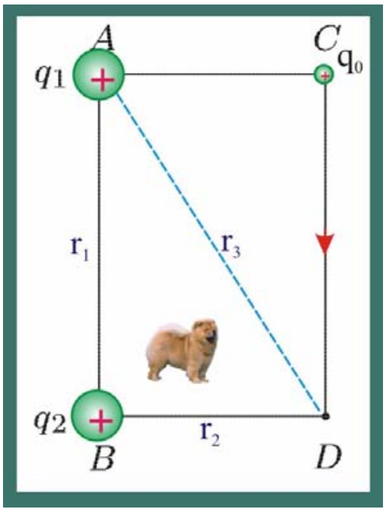


Рис. 95. Работа поля

1. Потенциал поля системы точечных зарядов определяется в виде алгебраической суммы потенциалов:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{i=2}\frac{q_i}{r_i} = k\sum_{i=1}^{i=2}\frac{q_i}{r_i};$$

2. Потенциал точки C:

$$\varphi_C = k\frac{q_1}{r_2} + k\frac{q_2}{r_3} = k\left(\frac{q_1}{r_2} + \frac{q_2}{r_3}\right);$$

$$\varphi_C = 9\cdot 10^9\left(\frac{5\cdot 10^{-6}}{0{,}3} + \frac{2\cdot 10^{-6}}{\sqrt{0{,}3^2 + 0{,}4^2}}\right) \cong 1{,}85\cdot 10^5\,\text{В};$$

3. Потенциал точки D:

$$\varphi_D = k\frac{q_1}{r_3} + k\frac{q_2}{r_2} = k\left(\frac{q_1}{r_3} + \frac{q_2}{r_2}\right);$$

$$\varphi \ = 9\cdot 10^9\left(\frac{5\cdot 10^{-6}}{0{,}5} + \frac{2\cdot 10^{-6}}{0{,}3}\right) \cong 1{,}5\cdot 10^5\,\text{В};$$

4. Разность потенциалов между точками поля C и D:

$$\Delta\varphi = \varphi_C - \varphi_D = 3{,}5\cdot 10^4 = \text{В};$$

5. Работа по перемещению заряда q_0:

$$A_{C\to D} = q_0\Delta\varphi = 3{,}5\cdot 10^{-4}\,\text{Дж};$$

---

96. Электрическое поле образовано точечным зарядом $q = 1{,}5\cdot 10^{-9}$ Кл. На каком расстоянии друг от друга расположены в вакууме две эквипотенциальные поверхности с потенциалами $\varphi_1 = 45$ В и $\varphi_2 = 30$ В? $\varphi_3 = 60$ В и $\varphi_4 = 45$ В?

Решение

1. Расстояние между точками с потенциалами φ_1 и φ_2:

$$\varphi_1 = k\frac{q}{r_1};\quad r_1 = k\frac{q}{\varphi_1};\quad r_2 = k\frac{q}{\varphi_2};\quad \Delta r_1 = r_2 - r_1 = kq\left(\frac{1}{\varphi_2} - \frac{1}{\varphi_1}\right) = kq\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varphi_1\varphi_2} \cong 0{,}15\text{м};$$

2. Расстояние между точками с потенциалами φ_3 и φ_4

$$\Delta r_2 = r_2 - r_1 = kq\left(\frac{1}{\varphi_4} - \frac{1}{\varphi_3}\right) = kq\frac{\varphi_4 - \varphi_3}{\varphi_3\varphi_4} \cong 9\cdot 10^9\cdot 1{,}5\cdot 10^{-9}\left(\frac{15}{2{,}7\cdot 10^3}\right) \cong 0{,}075\text{м};$$

---

97. Эквипотенциальная линия проходит через точку поля напряжённостью $E = 5\cdot 10^3$ В/м, отстоящую на расстоянии $r_1 = 2{,}5\cdot 10^{-2}$ м от заряда, создающего поле. На каком расстоянии r_2 от этого точечного источника поля надо провести другую эквипотенциальную линию, чтобы напряжение между линиями составило $\Delta\varphi = 25$ В?

Решение

1. Расстояние между эквипотенциальными линиями:

$$E = k\frac{q}{r^2};\quad \varphi = k\frac{q}{r};\quad \Rightarrow\quad \varphi = Er;\quad \Delta\varphi = E(r_2 - r_1) = E\Delta r;\quad \Delta r = \frac{\Delta\varphi}{E} \cong 5\cdot 10^{-3}\,м;$$

2. Расстояние между зарядом и второй эквипотенциальной линией:

$$r_2 = r_1 + \Delta r \cong 3\cdot 10^{-2}\,м;$$

---

98. В точке 1 потенциал поля точечного заряда равен φ_1 = 30 В, в точке 2 потенциал поля равен φ_2 = 20 В. Найти потенциал поля в точке φ_3, лежащей на середине отрезка 1-2, если все три точки располагаются на одной прямой.

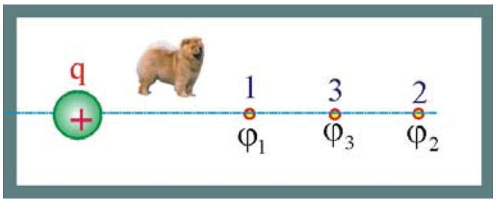


Рис. 98. Потенциал поля φ_3

Решение

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{kq}{r_1};\\ \varphi_2 &= \frac{kq}{r_2};\\ \varphi_3 &= \frac{kq}{r_1 + \frac{r_2 - r_1}{2}}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} r_1 &= \frac{kq}{\varphi_1};\\ r_2 &= \frac{kq}{\varphi_2};\\ r_3 &= \frac{r_1 + r_2}{2}; \end{aligned}\right\}$$

$$\varphi_3 = \frac{2kq}{r_1 + r_2} = \frac{2kq}{\frac{kq}{\varphi_1} + \frac{kq}{\varphi_2}} = \frac{2\varphi_1\varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2} = \frac{2\cdot 30\cdot 20}{30 + 20} = 24В;$$

---

99. Определить работу, совершаемую полем при перемещении заряда q = $4\cdot 10^{-9}$ Кл в однородном электрическом поле напряжённостью E = 600 В/см. Путь, пройденный зарядом s = 5 см и составляет направлением напряжённости поля угол α = 60^0.

Решение

$$F = qE;\quad A = Fs\cos\alpha = qEs\cos\alpha \cong 4\cdot 10^{-9}\cdot 6\cdot 10^4\cdot 5\cdot 10^{-2}\cdot 0{,}588 \cong 7\cdot 10^{-6}\,Дж;$$

---

100. В однородном электрическом поле с напряжённостью E = $2\cdot 10^4$ В/м вдоль силовой линии движется заряд q = $5\cdot 10^{-2}$ Кл. На какое расстояние переместили заряд, если при перемещении произведена работа A = 1 кДж

Решение

$$A = qEr\cos(\vec{E};\vec{r});\quad (\vec{E};\vec{r}) = 0^0;\quad \Rightarrow\quad \cos(\vec{E};\vec{r}) = 1;\quad A = qEr;\quad r = \frac{A}{qE} \cong 1м;$$

---

101. Два заряда $q_1 = q_2 = 1\cdot 10^{-6}$ Кл находятся на расстоянии r_1 = 0,5 м друг от друга. Какую работу нужно совершить, чтобы сблизить заряды на расстояние r_2 = 0,05 м?

Решение

1. Работа по перемещению зарядов численно равна изменению из потенциальной энергии:

$$\Pi_1 = k\frac{q^2}{r_1}; \quad \Pi_2 = k\frac{q^2}{r_2}; \quad A = \Delta\Pi = \Pi_2 - \Pi_1 = kq^2\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2};$$

$$A = 9\cdot 10^9\cdot 10^{-12}\left(\frac{0{,}45}{2{,}5\cdot 10^{-2}}\right) \cong 0{,}162\ \text{Дж};$$

---

102. Заряды q_1 = 1,5·10 $^{-7}$ Кл и q_2 = 3·10 $^{-9}$ Кл Находятся на расстоянии r_1 = 0,1 м друг от друга. Какую работу совершат силы поля, если второй заряд удалится от первого на расстояние r_2 = 10 м?

Решение

$$\Pi_1 = k\frac{q_1 q_2}{r_1}; \quad \Pi_2 = k\frac{q_1 q_2}{r_1 + r_2}; \quad A = \Pi_1 - \Pi_2 = kq_1 q_2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2}\right) \approx 4\cdot 10^{-9}\text{Дж};$$

---

103. На расстоянии r_1 = 0,08 м от поверхности металлического шара радиусом R = 2 см с постоянной плотностью заряда σ = 4·10 $^{-6}$ Кл/м^2 находится точечный заряд q = 10 $^{-9}$ Кл. Определить работу электрического поля при перемещении заряда на расстояние r_1 = 0,18 м от поверхности шара.

Решение

1. Заряд шара:

$$Q = \sigma 4\pi R^2 = 4\cdot 10^{-6}\cdot 12{,}56\cdot 4\cdot 10^{-4} \cong 2\cdot 10^{-8}\text{Кл};$$

2. Так как заряд проводящего шара эквивалентен соответствующему точечному заряду, помещённому в его центре, то введём обозначения:

$$x_1 = R + r_1 = 0{,}1\text{м}; \quad x_2 = R + r_2 = 0{,}2\text{м};$$

3. Работа по перемещению заряда q в поле шара:

$$A = \Pi_1 - \Pi_2 = kqQ\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) \cong 9\cdot 10^9\cdot 10^{-9}\cdot 2\cdot 10^{-8}\cdot 5 \cong 9\cdot 10^{-7}\text{Дж};$$

---

104. Какую работу надо совершить, чтобы перенести точечный заряд q = 20 нКл из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии r = 0,28 м от поверхности проводящего шара радиусом R = 2 см, если шар заряжен до потенциала φ = 300 В? Шар и заряд находятся в воздухе.

Решение

1. Заряд шара:

$$\varphi = k\frac{Q}{R}; \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{\varphi R}{k} \cong \frac{300\cdot 0{,}02}{9\cdot 10^9} \cong 6{,}7\cdot 10^{-10}\text{Кл};$$

2. Работа при перенесении заряда из ∞ в точку с координатой R + r

$$A = \Pi_1 - \Pi_\infty = kQq\left(\frac{1}{R+r} - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{kQq}{R+r} \cong \frac{9\cdot 10^9 \cdot 6{,}7\cdot 10^{-10}\cdot 2\cdot 10^{-8}}{0{,}3} \cong 4\cdot 10^{-7}\,\text{Дж};$$

---

105. Какую разность потенциалов должен пройти электрон, чтобы из состояния покоя достичь скорости $v_2 = 8{\cdot}10^6$ м/с?

Решение

1. В соответствии с теоремой об изменении кинетической энергии электрона:

$$\frac{m_e v_2^2}{2} - \frac{m_e v_1^2}{2} = A_{1\to 2} = \Delta\Pi = e\Delta\varphi; \quad v_1 = 0; \quad \frac{m_e v_2^2}{2} = e\Delta\varphi$$

$$\Delta\varphi \equiv U = \frac{m_e v_2^2}{2e} \approx \frac{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 64\cdot 10^{12}}{3{,}2\cdot 10^{-19}} \cong 182\ \text{В};$$

---

106. Протон, летящий по направлению к ядру атома гелия имеет скорость $v = 10^4$ м/с в той точке электрического поля ядра, где его напряжённость составляет $E = 10^4$ В/м. На какое расстояние протон может приблизиться к ядру?

Решение

1. В соответствии с законом сохранения энергии: протон приблизится к положительно заряженному ядру гелия на расстояние r_x, при котором его кинетическая энергия K_p станет равна потенциальной энергии Π_p взаимодействия с ядром, имеющего заряд $|Q| = 2e$:

$$k\frac{2e^2}{r_x} = \frac{m_p v^2}{2}; \quad 4ke^2 = r_x m_p v^2; \quad r_x = \frac{4e^2}{m_p v^2} \cong \frac{36\cdot 10^9\cdot\left(1{,}6\cdot 10^{-19}\right)^2}{1{,}67\cdot 10^{-27}\cdot 10^8} \cong 5{,}52\cdot 10^{-9}\,\text{м};$$

---

107. Электрон летит на положительный ион, заряд которого по модулю равен трём зарядам электрона. В начальный момент времени на большом удалении от иона электрон имел скорость $v = 10^5$ м/с. На какое минимальное расстояние электрон может приблизиться к иону?

Решение

$$k\frac{3e^2}{r_x} = \frac{m_e v^2}{2}; \quad 6ke^2 = r_x m_e v^2; \quad r_x = \frac{4e^2}{m_p v^2} \cong \frac{54\cdot 10^9\cdot\left(1{,}6\cdot 10^{-19}\right)^2}{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 10^{10}} \cong 152\ \text{нм};$$

---

108. Расстояние между параллельными пластинами конденсатора d = 5 см. Напряжённость электрического поля $E = 6{\cdot}10^4$ В/м. Электрон летит вдоль одной из силовых линий поля от одной пластины к другой. Какую скорость приобретёт электрон, если вначале движения от имел нулевую скорость?

Решение

$$\Delta\varphi \equiv U = Ed; \quad \frac{m_e v^2}{2} = eU = eEd;$$

$$v = \sqrt{\frac{2eEd}{m_e}} \cong \sqrt{\frac{3{,}2\cdot 10^{-19}\cdot 6\cdot 10^{4}\cdot 5\cdot 10^{-2}}{9{,}1\cdot 10^{-31}}} \cong 3{,}25\cdot 10^{7}\,\frac{м}{с};$$

---

109. Шарик массой m = 10^{-3} кг несущий на себе заряд q = 10^{-5} Кл перемещается из точки с потенциалом φ_1 = 2600 В в точку с потенциалом φ_2 = 100 В. Определить начальную скорость шарика, если во второй точке он приобрёл скорость v_2 = 10 м/с.

Решение

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = q\Delta\varphi; \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{v_2^2 - \frac{2q\Delta\varphi}{m}};$$

$$v_1 \cong \sqrt{10^2 - \frac{2\cdot 10^{-5}\cdot 2{,}5\cdot 10^{3}}{10^{-3}}} \cong 7\,\frac{м}{с};$$

---

110. Электрон, попадая в однородное электрическое поле в вакууме, движется в направлении силовой линии поля с напряжённостью E = 90 В/м. Через какое время τ скорость электрона станет равной нулю, если начальная скорость электрона $v_1 = 1{,}8\cdot 10^6$ м/с?

Решение

1. Закон сохранения энергии для равнозамедленно (до полной остановки) движущегося электрона:

$$\frac{m_e v_1^2}{2} = eEx; \quad \Rightarrow \quad x = \frac{m_e v_1^2}{2eE};$$

2. Кинематические уравнения равнозамедленного движения электрона:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= v_1 - a\tau; \\ x &= v_1\tau - \frac{a\tau^2}{2}; \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} a &= \frac{v_1}{\tau}; \\ x &= \frac{v_1}{2\tau}; \end{aligned}\right\} \quad \tau = \frac{2x}{v_1} = \frac{m_e v_1}{eE} \cong \frac{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 1{,}8\cdot 10^{8}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 90} \cong 1{,}13\cdot 10^{-7}\,с;$$

3. Этот результат можно получить, не прибегая к кинематическим соотношениям, достаточно применить теорему об изменении импульса силы:

$$m_e v_1 - m_e v_2 = F_K\tau; \quad v_2 = 0; \quad m_e v_1 = eE\tau; \quad \tau = \frac{m_e v_1}{eE};$$

---

111. Электрон, при скорости $v_1 = 1{,}8\cdot 10^4$ м/с влетает в однородное электрическое поле в вакууме с напряжённостью $E = 3\cdot 10^{-3}$ В/м и движется против направления силовых линий. Каковы будут скорость и ускорение электрона, когда он пройдёт расстояние $x = 7{,}1\cdot 10^{-2}$ м? Сколько времени потребуется электрону для достижения такой скорости?

Решение

1. Конечная скорость электрона v_2 на основании теоремы об изменении кинетической энергии:

$$\frac{m_e v_2^2}{2} - \frac{m_e v_1^2}{2} = eEx; \quad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2Eex}{m_e}};$$

$$v_2 \cong \sqrt{3{,}24\cdot 10^8 + \frac{3{,}2\cdot 10^{-19}\cdot 3\cdot 10^{-3}\cdot 7{,}1\cdot 10^{-2}}{9{,}1\cdot 10^{-31}}} \cong 2\cdot 10^4\,\frac{м}{с};$$

2. Ускорение электрона из второго закона Ньютона:

$$\vec{F} = m_e\vec{a}; \quad eE = m_e a; \quad a = \frac{eE}{m_e} \cong \frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 3\cdot 10^{-3}}{9{,}1\cdot 10^{-31}} \cong 5{,}3\cdot 10^8\,\frac{м}{с^2};$$

3. Время разгона электрона τ:

$$v_2 = v_1 + a\tau; \quad \tau = \frac{v_2 - v_1}{a} \cong \frac{2\cdot 10^3}{5{,}3\cdot 10^8} \cong 3{,}77 \text{ мкс};$$

---

112. В однородном электрическом поле напряжённостью E = 6 В/м электрон из состояния покоя приобрёл кинетическую энергию $K = 4{,}8\cdot 10^{-19}$ Дж. Найти ускорение *a*, полученное электроном, разность потенциалов между конечной и начальной точками движения *U*, скорость v_2 которую приобрёл электрон за время своего движения.

Решение

1. Конечная скорость электрона:

$$K = \frac{m_e v_2^2}{2}; \quad v_2 = \sqrt{\frac{2K}{m_e}} \cong \sqrt{\frac{9{,}6\cdot 10^{-19}}{9{,}1\cdot 10^{-31}}} \cong 1\cdot 10^6\,\frac{м}{с};$$

2. Ускорение электрона:

$$a = \frac{eE}{m_e} \cong \frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 6}{9{,}1\cdot 10^{-31}} \cong 1\cdot 10^{12}\,\frac{м}{с^2};$$

3. Разность потенциалов между начальной и конечной точками движения электрона:

$$K = eU; \quad \Rightarrow \quad U = \frac{K}{e} \cong \frac{4{,}8\cdot 10^{-19}}{1{,}6\cdot 10^{-19}} \cong 3 \text{ В};$$

---

113. Какое расстояние должно быть между двумя плоскими пластинами, чтобы при разности потенциалов U = 500 В напряжённость поля составила $E = 2\cdot 10^3$ В/м? Какая сила будет действовать на пылинку с зарядом $q = 2\cdot 10^{-8}$ Кл в этом поле? С каким ускорением станет двигаться пылинка массой $m = 10^{-9}$ кг?

Решение

1. Расстояние между пластинами:

$$E = \frac{U}{d}; \quad \Rightarrow \quad d = \frac{U}{E} = \frac{500}{2\cdot 10^3} = 0{,}25 \text{ м};$$

2. Сила Кулона, действующая на пылинку:

$$F_K = qE = 2\cdot10^{-8}\cdot2\cdot10^{3} = 4\cdot10^{-5}\,H;$$

3. Ускорение пылинки:

$$F_K = ma;\quad a = \frac{F_K}{m} = \frac{4\cdot10^{-5}}{10^{-9}} = 4\cdot10^{5}\,\frac{м}{с^2};$$

---

114. Между двумя разноимённо заряженными пластинами образовано однородное электрическое поле напряжённостью $E = 2{,}5\cdot10^4$ В/м. Какое напряжение приложено к пластинам, если они расположены на расстоянии $d = 4$ см? С какой силой поле действует на помещённый в него заряд $q = 6\cdot10^{-6}$ Кл?

Решение

1. Напряжение между пластинами:

$$U = Ed = 2{,}5\cdot10^{4}\cdot4\cdot10^{-2} = 10^{3}\,В;$$

2. Сила Кулона, действующая на заряд q:

$$F_K = qE = 6\cdot10^{-6}\cdot2{,}5\cdot10^{4} = 0{,}15\,H;$$

---

115. Расстояние между двумя горизонтально расположенными пластинами $d = 2$ см. Найти разность потенциалов между пластинами, если протон, пройдя под действием силы электрического поля расстояние $s = 3$ мм, приобрёл скорость $v = 1{,}5\cdot10^4$ м/с

Решение

$$\frac{m_p v^2}{2} = q_p Es;\quad E = \frac{m_p v^2}{2q_p s};\quad U = Ed = \frac{m_p v^2 d}{2q_p s};$$

$$U \cong \frac{1{,}67\cdot10^{-27}\cdot2{,}25\cdot10^{8}\cdot2\cdot10^{-2}}{3{,}2\cdot10^{-19}\cdot3\cdot10^{-3}} \cong 7{,}82\,В;$$

---

116. Электрон влетает в однородное электрическое поле между двумя заряженными параллельными пластинами в направлении линий напряжённости и на участке $s = 2$ см уменьшает скорость с $v_1 = 2\cdot10^6$ м/с до $v_2 = 0$. Определить разность потенциалов между пластинами при расстоянии между ними $d = 6$ см.

Решение

$$\frac{m_e v_1^2}{2} = eEs;\quad E = \frac{m_e v_1^2}{2es};\quad U = Ed = \frac{m_e v_1^2 d}{2es};$$

$$U \cong \frac{9{,}1\cdot10^{-31}\cdot4\cdot10^{12}\cdot6\cdot10^{-2}}{3{,}2\cdot10^{-19}\cdot2\cdot10^{-2}} \cong 34\,В;$$

---

117. Электрон влетает в однородное электрическое поле, и на участке пути $s = 2$ см его скорость возрастает с $v_1 = 3\cdot10^3$ м/с до $v_2 = 10^4$ м/с. Найти напряжённость поля E.

Решение

$$\frac{m_e v_2^2}{2}-\frac{m_e v_1^2}{2}=eEs;\quad m_e(v_2^2-v_1^2)==2eEs;\quad E=\frac{m_e\left(v_2^2-v_1^2\right)}{2es};$$

$$E=\frac{9{,}1\cdot10^{-31}\left(10^8-9\cdot10^6\right)}{3{,}2\cdot10^{-19}\cdot2\cdot10^{-2}}\cong1{,}3\cdot10^{-2}\,\frac{В}{м};$$

---

118. Между параллельными горизонтальными пластинами с разностью потенциалов U = 700 В висит капелька масла радиусом R = $1{,}5\cdot10^{-6}$ м. Расстояние между пластинами d = $4\cdot10^{-3}$ м, плотность масла ρ = 800 кг/м^3. Определить заряд капли.

Решение

1. Напряжённость электрического поля между пластинами:

$$E=\frac{U}{d};$$

2. Сила Кулона в данном случае направлена вертикально вверх, противоположно силе тяжести, поэтому условие равновесия капли в проекции на вертикальную ось, без учёта действия силы Архимеда, запишется следующим образом:

$$m\vec{g}+\vec{F}_K=0;\quad \rho g\frac{4}{3}\pi R^3=QE=\frac{QU}{d};\quad\Rightarrow\quad Q\approx\frac{4\rho gR^3 d}{U};$$

$$Q\approx\frac{4\cdot800\cdot9{,}8\cdot3{,}37\cdot10^{-18}\cdot4\cdot10^{-3}}{700}\approx6\cdot10^{-19}\,Кл;$$

---

119. На концах диэлектрической тонкой соломинки длиной ℓ = $5\cdot10^{-3}$ м прикреплены два шарика, несущие разноимённые электрические заряды равные по модулю |q| = 10^{-8} Кл. Соломинка расположена между двумя параллельными разноимённо заряженными пластинами и ориентирована вдоль силовых линий поля. Расстояние между пластинами d = 0,1 м. При какой наименьшей разности потенциалов U соломинка разорвётся, если она выдерживает максимальную силу растяжения F_m = 10^{-2} Н?

Решение

1. Рассмотрим сечение соломинки, перпендикулярное направлению внешнего поля, созданного параллельными пластинами. К сечению будут приложены две силы: сила взаимодействия между шариками F_1 и сила Кулона, обусловленная действием на заряды шариков со стороны внешнего поля F_2. Условие разрыва соломинки в проекции на направление силовых линий внешнего поля запишется следующим образом:

$$\frac{U}{d}q-k\frac{q^2}{\ell^2}\geq F_m;\quad \frac{U_{min}}{d}q=F_m+\frac{kq^2}{\ell^2};\quad U_{min}=\frac{d}{q}\left(F_m+\frac{kq^2}{\ell^2}\right);$$

$$U_{min}\approx\frac{0{,}1}{10^{-8}}\left(10^{-2}+\frac{9\cdot10^9\cdot10^{-16}}{25\cdot10^{-6}}\right)\approx4{,}6\cdot10^5\,В;$$

---

120. Металлический шарик радиусом R_1 = 5 см заряжен до потенциала φ_1 = 150 В. Чему равна напряжённость поля шара в точке, удалённой от его поверхности на расстояние r_1 = 10 см? Какой станет напряжённость поля в этой точке, если шарик соединить со вторым незаряженным металлическим шариком радиусом R_2 = 10 см, а затем второй шарик удалить на большое расстояние?

Решение

1. Первоначальный заряд шарика:

$$\varphi_1 = k\frac{Q_1}{R_1}; \quad \Rightarrow \quad Q_1 = \frac{\varphi_1 R_1}{k};$$

2. Напряжённость поля шара в точке, удалённой от его поверхности на расстояние r_1:

$$E_1 = k\frac{Q_1}{(R_1 + r_1)^2} = \frac{\varphi_1 R_1}{(R_1 + r_1)^2} \cong \frac{150 \cdot 0{,}05}{2{,}25 \cdot 10^{-2}} \cong 333\frac{В}{м};$$

3. При соединении двух шариков заряд распределится по их суммарной поверхности с плотностью σ

$$\sigma = \frac{Q_1}{s_1 + s_2} = \frac{\varphi_1 R_1}{4\pi k\left(R_1^2 + R_2^2\right)};$$

4. Заряд, оставшийся на первом шарике после разъединения:

$$Q_1^* = \sigma s_1 = \frac{\varphi_1 R_1 \cdot 4\pi R_1^2}{4\pi k\left(R_1^2 + R_2^2\right)} = \frac{\varphi_1 R_1^3}{k(R_1^2 + R_2^2)} \cong \frac{150 \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-4}}{9 \cdot 10^9 \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-2}} \approx 1{,}67 \cdot 10^{-10}\,Кл;$$

5. Напряжённость поля первого шара на расстоянии r_1 после удаления второго шара на ∞:

$$E_1^* = k\frac{Q_1^*}{(R + r_1)^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{1{,}67 \cdot 10^{-10}}{2{,}25 \cdot 10^{-2}} \cong 66{,}7\frac{В}{м};$$

---

121. Сколько избыточных электронов должно быть на пылинке массой m = $1{,}5 \cdot 10^{-11}$ кг, помещённой в поле плоского конденсатора, чтобы она находилась в равновесии? Напряжение на пластинах U = 500 В, расстояние между пластинами d = $5 \cdot 10^{-3}$ м.

Решение

1. Условие равновесия заряженной пылинки в электростатическом поле:

$$m\vec{g} + \vec{F}_K = 0; \quad mg = eN_eE = eN_e\frac{U}{d}; \quad \Rightarrow \quad N_e = \frac{mgd}{eU};$$

$$N_e \cong \frac{1{,}5 \cdot 10^{-11} \cdot 9{,}8 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 500} \cong 9{,}2 \cdot 10^3;$$

---

122. Пылинка массой m взвешена в воздухе между, расположенными ра расстоянии d пластинами конденсатора. После того, как пластинку облучили ультрафиолетом, она потеряв часть заряда, начала падать. Какой заряд Δq потеряла пылинка, если для восстановления равновесия потребовалось увеличить разность потенциалом между пластинами с U идо U+ΔU?

Решение

1. Заряд пылинки:

$$mg = q\frac{U}{d}; \quad \Rightarrow \quad q = \frac{mgd}{U};$$

2. Условие равновесия пылинки при потере заряда Δq и увеличении разности потенциалов между пластинами на ΔU:

$$mg = \frac{U + \Delta U}{d}(q - \Delta q); \quad \Rightarrow \quad mgd = Uq + \Delta Uq - U\Delta q - \Delta U\Delta q;$$

$$mgd - Uq - \Delta Uq = -\Delta q(U + \Delta U); \quad \Delta q = mgd\left(\frac{1}{U} - \frac{1}{U + \Delta U}\right);$$

---

123. В плоском конденсаторе, помещённом в вакууме, взвешена капелька ртути. Расстояние между пластинами $d = 10^{-2}$ м, разность потенциалов между пластинами $U = 1000$ В. Внезапно разность потенциалов уменьшается на $\Delta U = 5$ В. Через какое время капелька достигнет нижней обкладки конденсатора, если первоначально она покоилась посередине конденсатора?

Решение

1. Заряд капли:

$$mg = \frac{U}{d}Q; \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{mgd}{U};$$

2. Силы Кулона, действующие на каплю:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= Q\frac{U}{d}; \\ F_2 &= Q\frac{U - \Delta U}{d}; \end{aligned}\right\} \quad \Delta F = F_1 - F_2 = \frac{Q}{d}\Delta U;$$

3. Ускорение капли при уменьшении разности потенциалов:

$$\Delta F = ma; \quad \frac{Q}{d}\Delta U = ma; \quad \frac{mg\Delta U}{U} = ma; \quad a = g\frac{\Delta U}{U};$$

4. Время падения капли:

$$\frac{d}{2} = \frac{a\tau^2}{2}; \quad \tau = \sqrt{\frac{d}{a}} = \sqrt{\frac{dU}{g\Delta U}} \cong \sqrt{\frac{10^{-2} \cdot 10^3}{9,8 \cdot 5}} \cong 0,451\,\text{с};$$

---

124. Отрицательно заряженная пылинка массой $m = 10^{-8}$ кг находится в равновесии в однородном электростатическом поле плоского конденсатора с разностью потенциалов между пластинами $U_1 = 6$ кВ при расстоянии $d = 6$ см. Какое надо приложить напряжение U_2 к пластинам, чтобы пылинка осталась в равновесии, потеряв $N_e = 4000$ электронов?

Решение

1. Начальный заряд пылинки

$$mg = \frac{U_1}{d}Q_1; \quad Q_1 = \frac{mgd}{U_1} \cong \frac{10^{-11} \cdot 9,8 \cdot 6 \cdot 10^{-2}}{6 \cdot 10^3} \cong 9,8 \cdot 10^{-16}\,\text{Кл};$$

2. Заряд пылинки после потери электронов:

$$Q_2 = Q_1 - eN_e = 9{,}8 \cdot 10^{-16} - 1{,}6 \cdot 10^{-9} \cdot 4 \cdot 10^3 \cong 3{,}4 \cdot 10^{-16}\,\text{Кл};$$

3. Разность потенциалов U_2, необходимая для равновесия пылинки с зарядом Q_2:

$$U_2 = \frac{mgd}{Q_2} \cong \frac{10^{-11} \cdot 9{,}8 \cdot 6 \cdot 10^{-2}}{3{,}4 \cdot 10^{-11}} \cong 17{,}3\,\text{кВ};$$

---

125. Между двумя пластинами, расположенными горизонтально в вакууме на расстоянии d друг от друга движется отрицательно заряженная сферическая капля масла радиусом R << d с ускорением a, направленным вертикально вниз. Сколько «избыточных» электронов имеет капля, если разность потенциалов между пластинами U, а плотность масла ρ?

Решение

1. Масса капли:

$$m = \rho V; \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3;$$

2. Уравнение движения капли в проекцию на вертикальную ось:

$$mg - F_K = ma; \quad \rho g V - \frac{U}{d} N_e e = \rho V a; \quad \rho g V - \rho V a = \frac{U}{d} N_e e;$$

$$\rho V(g - a)d = UN_e e; \quad N_e = \frac{\rho V d(g - a)}{Ue} = \frac{4\pi\rho R^3 d(g - a)}{Ue};$$

---

126. Между горизонтально расположенными пластинами плоского конденсатора с высоты H над нижней пластиной свободно падает металлический шарик массой m. На какую высоту h после абсолютно упругого удара о нижнюю пластину подскочит шарик, если в момент удара он получает заряд q? Разность потенциалов между пластинами равна U, расстояние между ними d.

Решение

1. Уравнение закона сохранения энергии шарика с учётом работы силы Кулона на перемещении h:

$$mgH + \frac{U}{d} qh = mgh;$$

$$mgHd = h(mgd - qU);$$

$$h = \frac{mghd}{mgd - qU};$$

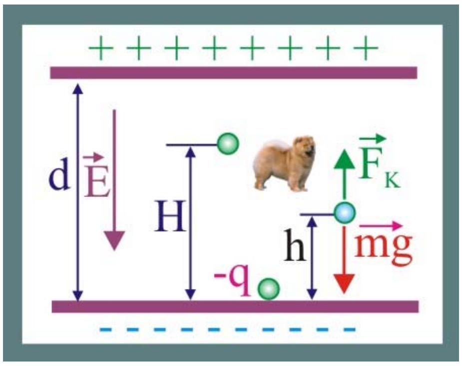


Рис. 126. Высота отскока

---

127. Электрон влетает со скоростью v_0 в пространство между пластинами плоского конденсатора под углом α к их плоскости через отверстие в нижней пластине. Расстояние между пластинами d, разность потенциалов U. По какой траектории будет двигаться электрон? На какое минимальное расстояние он приблизится к верхней пластине?

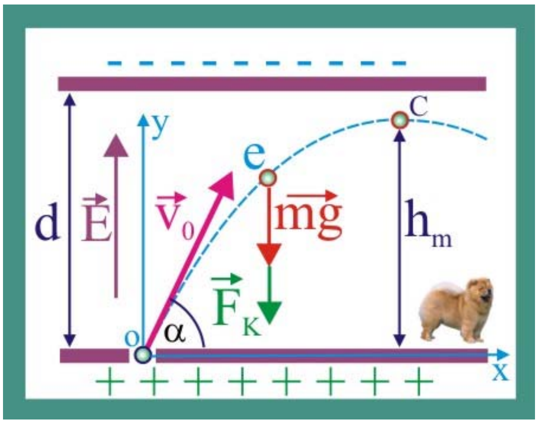


Рис. 127. Полёт электрона

Решение

1.Движение электрона относительно вертикальной оси из начальной точки O в точку C – равнозамедленное, с некоторым ускорением $\vec{a}$, направленным вертикально вниз. В начальный момент времени при t = 0 имеем:

$$x_0 = 0,\ y_0 = 0,$$
$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha,$$
$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha,$$
$$a_x = 0,\ a_y = -a.$$

2. Для проекций скорости в любой момент времени движения можно записать следующие уравнения

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\alpha, \\ v_y(t) = v_0 \sin\alpha - at. \end{cases}$$

3. Модуль вектора скорости определится как:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + (v_0 \sin\alpha - gt)^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + (v_0^2 \sin^2\alpha - 2v_0 \sin\alpha gt + g^2 t^2)},$$

4. Уравнения движения электрона запишем, используя особенности равномерного перемещения точки по горизонтали и равноускоренного по вертикали

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \cos\alpha, \\ y(t) = v_0 t \sin\alpha - \dfrac{at^2}{2} \cdot \end{cases}$$

5. Время подъёма тела в верхнюю точку траектории C определим, при условии: $v_y = 0$

$$v_0 \sin\alpha - at_C = 0, \quad \Rightarrow t_C = \frac{v_0 \sin\alpha}{a}.$$

6. Определим далее полное время полёта

$$\tau = 2t_C = \frac{2v_0 \sin\alpha}{a}.$$

7. Максимальная высота подъёма определится путём подстановки времени движения в уравнение вертикальной координаты

$$y_{max} \equiv h_m = v_0 \sin\alpha \frac{v_0 \sin\alpha}{a} - \frac{a}{2} \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{a^2},$$

$$h_m = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2a}.$$

8. Уравнение траектории получается при исключении времени из уравнений движения:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha},$$

$$y = v_0 \sin\alpha \frac{x}{v_0 \cos\alpha} - \frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} = x\mathrm{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2.$$

9. Если ввести обозначения: $tg\alpha = \zeta$, $g/\left(2v_0^2\cos^2\alpha\right) = \xi$, то уравнение траектории примет более классифицируемый вид симметричной параболы

$$y = \zeta x - \xi x^2 .$$

10. Минимальное расстояние, на которое приблизится электрон к верхней пластине:

$$r_{min} = d - h_m = d - \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2a};$$

11. Ускорение определится из уравнения второго закона Ньютона в проекции на вертикальную ось:

$$m_e a = m_e g + F_K; \quad m_e a = m_e g + \frac{U}{d}e; \quad a = g + \frac{Ue}{dm_e} = \frac{gdm_e + Ue}{dm_e};$$

12. Минимальное расстояние до верхней пластины:

$$r_{min} = d - \frac{v_0^2 \sin^2\alpha dm_e}{2(gdm_e + Ue)} = d\left(1 - \frac{v_0^2 \sin^2\alpha m_e}{2(gdm_e + Ue)}\right);$$

13. Если предположить, что $mg << F_K$, то конечное уравнение упростится:

$$r_{min} = d\left(1 - \frac{v_0^2 \sin^2\alpha m_e}{2Ue}\right);$$

---

128. Между пластинами конденсатора находится капелька масла массой m, заряд которой q. Разность потенциалов между пластинами U, расстояние между ними – d. Определить время, в течение которого капелька достигнет пластины, если в начальном положении они находилась на равном удалении от пластин. Нижняя пластина имеет положительный заряд.

Решение

1. В данном случае сила тяжести и сила кулона, действующие на заряженную капельку будут направлены в противоположные стороны, поэтому уравнение второго закона Ньютона в проекции на вертикальную ось будет иметь вид:

$$mg - \frac{U}{d}q = ma; \quad \Rightarrow \quad a = g - \frac{qU}{m} = \frac{gm - qU}{m};$$

2. Кинематическое уравнение вертикального движения капельки:

$$\frac{d}{2} = \frac{a\tau^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad \tau = \sqrt{\frac{a}{d}} = \sqrt{\frac{md}{gm - Uq}};$$

---

129. Между двумя вертикальными пластинами, к которым приложена разность потенциалов U = 3·10^4 В, посередине расположен небольшой шарик на диэлектрической нити массой m = 3·10^{-4} кг, несущий заряд q = 1,66·10^{-9} Кл Какой угол α нить составляет с вертикалью?

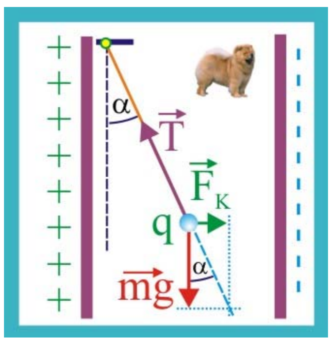


Рис. 129. Отклонение нити

Решение

1. Из прямоугольного треугольника, катетами которого являются векторы силы Кулона и силы тяжести (рис. 129) очевидно, что:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{F_K}{mg} = \frac{qU}{dmg}; \quad \Rightarrow \quad \alpha = \mathrm{arctg}\frac{qU}{dmg} \approx \mathrm{arctg}\left(\frac{1,66\cdot 10^{-9}\cdot 3\cdot 10^{4}}{0,1\cdot 3\cdot 10^{-4}\cdot 9,8}\right) \approx 9,59^0;$$

---

130. Электрон, пролетая между пластинами плоского конденсатора длиной ℓ = 0,3 м, отклоняется на $\Delta y = 8\cdot 10^{-3}$ м от первоначального горизонтального направления. Определить начальную скорость электрона, если напряжённость поля между пластинами $E = 10^3$ В/м.

Решение

1. Вертикальное ускорение, приобретаемое электроном в электрическом поле:

$$ma = eE; \quad \Rightarrow \quad a = \frac{Ee}{m} \approx \frac{10^3\cdot 1,6\cdot 10^{-19}}{9,1\cdot 10^{-31}} \approx 1,76\cdot 10^{14}\,\frac{\text{м}}{\text{c}^2} >> g;$$

2. Электрон в данном случае можно рассматривать как материальную точку, брошенную горизонтально:

$$\left.\begin{aligned} &\ell = v_0\tau; \\ &\Delta y = \frac{a\tau^2}{2}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &\tau = \frac{\ell}{v_0}; \\ &\Delta y = \frac{a}{2}\frac{\ell^2}{v_0^2}; \end{aligned}\right\} \quad 2\Delta y v_0^2 = a\ell^2;$$

$$v_0 = \ell\sqrt{\frac{a}{2\Delta y}} \cong 0,3\sqrt{\frac{1,76\cdot 10^{14}}{16\cdot 10^{-3}}} \cong 3,15\cdot 10^7\,\frac{\text{м}}{\text{c}};$$

---

131. Электрон влетает в плоский конденсатор параллельно плоскости пластин с начальной скоростью v_0. Найти напряжённость поля конденсатора, если электрон, пролетев пластины протяжённостью ℓ, вылетел под углом $\alpha = 30^0$.

Решение

1. Кинематические соотношения для скорости электрона:

$$\left.\begin{aligned} &v_x = v_0; \\ &v_0\sin\alpha = at; \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &\ell = v_0 t; \\ &t = \frac{\ell}{v_0}; \end{aligned}\right\} \quad a = \frac{Ee}{m_e}; \quad \Rightarrow \quad \frac{v_0}{\cos\alpha} = \frac{Ee}{m_e}\frac{\ell}{v_0};$$

$$E = \frac{m_e v_0^2}{e\ell\cos\alpha};$$

---

4. Электроёмкость. Конденсаторы

132. Проводнику сообщили электрический заряд ΔQ = 10^{-8} Кл, при этом его потенциал увеличился на Δφ = 100 В. Какова электроёмкость проводника?

Решение

$$\Delta\varphi = C\Delta Q; \quad C = \frac{\Delta\varphi}{\Delta Q} \cong 10^{-10}\,\Phi = 100\,\text{пФ};$$

---

133. Какой заряд надо сообщить проводнику ёмкостью C = 10^{-8} Ф, чтобы его потенциал увеличился на Δφ = 30 В?

Решение

$$\Delta\varphi = C\Delta Q; \quad Q = \frac{\Delta\varphi}{C} \cong 3^{-7}\,\text{Кл} = 300\,\text{нКл};$$

---

134. Какой заряд ΔQ надо сообщить обкладкам конденсатора электрической ёмкостью C = 10 мкФ, чтобы разность потенциалов между пластинами стала равной Δφ = 220 В?

Решение

$$\Delta\varphi = C\Delta Q; \quad Q = \frac{\Delta\varphi}{C} \cong \frac{220}{10^{-5}} \cong 2{,}2 \cdot 10^{-3}\,\text{Кл};$$

---

135. Имеется n одинаковых капель ртути, каждая из которых обладает ёмкостью C. Чему равна ёмкость шаровой капли, получившейся при слиянии всех капель в одну?

Решение

1. Из соотношения объёмов:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3; \quad V_0 = \frac{4}{3}\pi R^3 = n\frac{4}{3}\pi r^3; \quad \Rightarrow \quad R = r\sqrt[3]{n};$$

2. Ёмкость капли C_0 после слияния:

$$C_0 = \frac{4}{3}\pi\varepsilon_0 R^3 = \frac{4}{3}\pi\varepsilon_0 r\sqrt[3]{n} = C\sqrt[3]{n};$$

---

136. На шаре, расположенном в вакууме, сосредоточен заряд Q = $6\cdot10^{-8}$ Кл при потенциале φ = $1{,}8\cdot10^4$ В. Определить радиус шара.

Решение

$$\varphi = k\frac{Q}{R}; \quad R = \frac{kQ}{\varphi} \cong \frac{9\cdot10^9\cdot6\cdot10^{-8}}{1{,}8\cdot10^4} \cong 3\cdot10^{-2}\,\text{м};$$

$$C = \frac{Q}{\varphi}; \quad 4\pi\varepsilon_0 R = \frac{Q}{\varphi}; \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\varphi} = k\frac{Q}{\varphi};$$

---

137. До какого потенциала зарядился сферический проводник радиусом R = 0,1 м, если ему сообщили заряд Q = $2\cdot 10^{-10}$ Кл?

Решение

$$\varphi = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = k\frac{Q}{R} \cong \frac{9\cdot 10^9\cdot 2\cdot 10^{-10}}{0{,}1} \cong 18\ \text{В}.$$

---

138. Какова ёмкость уединённого металлического шара радиусом R = 0,1 м, опущенного в воду?

Решение

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R \cong 1{,}1\cdot 10^{-10}\cdot 81\cdot 0{,}1 \cong 9\cdot 10^{-10}\,\text{Ф} \equiv 900\text{пФ};$$

---

139. Определить электрическую ёмкость земного шара. Какой заряд нужно сообщить Земле, чтобы изменить потенциал на $\Delta\varphi = 3\cdot 10^3$ В?

Решение

1. Электрическая ёмкость земного шара:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R \cong 1{,}1\cdot 10^{-10}\cdot 6{,}4\cdot 10^6 \cong 704\text{мкФ};$$

2. Необходимый заряд:

$$\Delta Q = C\Delta\varphi \cong 7\cdot 10^{-4}\cdot 3\cdot 10^3 \cong 2{,}1\ \text{Кл};$$

---

140. Ёмкость двух металлических шаров C_1 = 10 пФ и C_2 = 20 пФ, они несут заряды Q_1 = 17 нКл и Q_2 = 30 нКл. Будут ли перемещаться электроны при соединении шаров проводником?

Решение

1. Потенциалы шаров:

$$\varphi_1 = \frac{Q_1}{C_1} \cong \frac{17\cdot 10^{-9}}{10^{-11}} \cong 1700\ \text{В};\quad \varphi_2 = \frac{Q_2}{C_2} \cong \frac{30\cdot 10^{-9}}{2\cdot 10^{-11}} \cong 1500\ \text{В};$$

2. Перемещение электронов должно сопровождаться выполнением работы, это становится возможным, если потенциалы начальной и конечной точек перемещения обладают разными потенциалами. В данном случае:

$$A = e(\varphi_1 - \varphi_2);$$

---

141. Заряженный до потенциала φ_1 = 300 В шар радиуса R = 0,15 м соединяется с незаряженным шаром тонкой длинной проволокой. После соединения потенциал шара уменьшился до φ_2 = 100 В. Чему равен радиус второго шара?

Решение

1. На основании закона сохранения заряда:

$$\varphi_2(R_1 + R_2) = \varphi_1 R_1;\quad R_2 = \frac{\varphi_1 R_1}{\varphi_2} - R_1 = R_1\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2} - 1\right) = 0{,}3\text{м};$$

---

142. Два шара ёмкостями C_1 и C_2 зарядили до потенциалов φ и φ_2, а затем соединили проводником. Определить заряд каждого шара после их соединения.

Решение

1. Радиусы шаров:

$$C_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1;\quad R_1 = \frac{C_1}{4\pi\varepsilon_0} = kC_1;\quad R_2 = kC_2;$$

2. Заряды шаров при условии $\varphi_0 = 0{,}5(\varphi_1 + \varphi_2)$:

$$\frac{C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2}{C_1 + C_2} = k\frac{Q_1}{R_1} = k\frac{Q_1}{kC_1};\quad Q_1 = \frac{C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2}{C_1 + C_2}C_1;$$

$$Q_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}C_2;$$

---

143. Электрический заряд на одном шарике $q_1 = 2\cdot 10^{-7}$ Кл, а на другом $q_2 = 1\cdot 10^{-7}$ Кл. Ёмкости шариков: $C_1 = 2$ пФ; $C_2 = 3$ пФ, соответственно. Определить заряд шариков после того как их соединили проводником.

Решение

1. Из законов сохранения энергии и заряда т энергии следует:

$$Q_0 = Q_1 + Q_2;\quad W_0 = \frac{Q_0^2}{2C_0};$$

2. Потенциалы шариков до соединения:

$$\varphi_1 = \frac{Q_1}{C_1} \cong \frac{2\cdot 10^{-7}}{2\cdot 10^{-12}} \cong 10^5\,\text{В};\quad \varphi_2 = \frac{Q_2}{C_2} \cong \frac{1\cdot 10^{-7}}{3\cdot 10^{-12}} \cong 3{,}33\cdot 10^4\,\text{В};$$

3. Заряд и потенциал шаров после соединения их проводником:

$$Q_0 = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2;\quad \varphi_0 = \frac{C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2}{C_1 + C_2} \cong \frac{2\cdot 10^{-12}\cdot 10^5 + 3\cdot 10^{-12}\cdot 3{,}33\cdot 10^4}{5\cdot 10^{-12}} \cong 6\cdot 10^4\,\text{В};$$

4. Заряды шариков после их соединения:

$$Q_1 = \varphi_0 C_1 \cong 6\cdot 10^4\cdot 2\cdot 10^{-12} \cong 120\,\text{нКл};$$

$$Q_2 = \varphi_0 C_2 \cong 6\cdot 10^4\cdot 3\cdot 10^{-12} \cong 180\,\text{нКл};$$

---

144. Шару радиусом $R_1 = 2$ см сообщают электрический заряд $Q_1 = 1{,}83$ нКл. Какой заряд окажется на незаряженном шарике радиусом $R_2 = 2$ мм, если его соединить с первым заряженным шариком?

Решение

1. Ёмкости шариков:

$$C_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1 \cong 10^{-10}\cdot 2\cdot 10^{-2} \cong 2\cdot 10^{-12}\,\Phi;$$

$$C_2 = 4\pi\varepsilon_0 R_2 \cong 10^{-10}\cdot 2\cdot 10^{-3} \cong 2\cdot 10^{-13}\,\Phi;$$

2. Потенциалы шариков до соединения:

$$\varphi_1 = k\frac{Q_1}{R_1} \cong \frac{9\cdot 10^9\cdot 1{,}83\cdot 10^{-9}}{2\cdot 10^{-2}} \cong 823{,}5\ \text{В};\quad \varphi_2 = 0;$$

3. Потенциал шаров после соединения:

$$\varphi_0 = \frac{C_1\varphi_1}{C_1 + C_2} \cong \frac{2\cdot 10^{-12}\cdot 832{,}5}{2{,}2\cdot 10^{-12}} \cong 750\ \text{В};$$

4. Заряд второго (малого) шарика

$$Q_2 = \varphi_0 C_2 \cong 750\cdot 2\cdot 10^{-13} \cong 1{,}5\cdot 10^{-10}\,\text{Кл};$$

---

145. Площадь каждой пластины плоского конденсатора s = 1 м^2, расстояние между пластинами d = 1,5·10^{-3} м. Диэлектриком является стекло ($\varepsilon \cong 7$). Чему равна ёмкость конденсатора?

Решение

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 s}{d} \cong \frac{7\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 1}{1{,}5\cdot 10^{-3}} \cong 4{,}13\cdot 10^{-8}\text{Ф};$$

---

146. Радиус круглых обкладок плоского воздушного конденсатора R = 8 см, расстояние между обкладками d = 0,1 м. Чему равна ёмкость конденсатора?

Решение

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 s}{d} \cong \frac{\varepsilon_0\varepsilon\pi R^2}{d} \cong \frac{8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 1\cdot 3{,}14\cdot 64\cdot 10^{-4}}{0{,}1} \cong 1{,}8\text{пФ};$$

---

147. Плоский воздушный конденсатор образован двумя одинаковыми квадратными пластинами, отстоящими друг от друга на расстоянии d = 10^{-3} м. Какой должна быть ширина каждой пластины, чтобы ёмкость конденсатора составила C = 1 Ф?

Решение

$$C = \frac{\varepsilon_0 s}{d} = \frac{\varepsilon_0 x^2}{d};\quad Cd = \varepsilon_0 x^2;\quad \Rightarrow\quad x = \sqrt{\frac{Cd}{\varepsilon_0}} \cong \sqrt{\frac{1\cdot 10^{-3}}{8{,}85\cdot 10^{-12}}} \cong 1\cdot 10^4\text{м};$$

---

148. Плоский воздушный конденсатор состоит из двух пластин площадью s = 0,1. дм^2 каждая при расстоянии между ними d = 5 мм. Найти ёмкость конденсатора. Как изменится ёмкость при погружении пластин в глицерин?

Решение

1. Ёмкость конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon_0 s}{d} \cong \frac{8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 10^{-3}}{5\cdot 10^{-3}} \cong 1{,}77\text{пФ};$$

2. Диэлектрическая проницаемость глицерина ε = 56,2. При погружении конденсатора в глицерин его ёмкость увеличится в 56,2 раза

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 s}{d} \cong \frac{56{,}2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 10^{-3}}{5\cdot 10^{-3}} \cong 99{,}5\text{пФ};$$

---

149. Ёмкость плоского воздушного конденсатора С = 1 мкФ. Как изменится ёмкость этого конденсатора, если пространство между пластинами заполнить парафином?

Решение

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 s}{d}; \quad C_2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 s}{d}; \quad \frac{C_2}{C_1} = \varepsilon \cong 2{,}2;$$

---

150. В плоском конденсаторе увеличили расстояние между пластинами в 3 раза, а площадь пластин уменьшили в 2 раза. Как изменилась ёмкость конденсатора?

Решение

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{\varepsilon\varepsilon_0 s}{d}; \\ C_2 &= \frac{\varepsilon\varepsilon_0 s}{2 \cdot 3d}; \end{aligned}\right\} \frac{C_1}{C_2} = 6;$$

---

151. Площадь каждой из двух пластин воздушного конденсатора s = 20 см^2, а расстояние между ними d = 1 см. На сколько надо изменить расстояние между пластинами, чтобы ёмкость конденсатора уменьшилась в два раза?

Решение

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{\varepsilon\varepsilon_0 s}{d}; \\ \frac{C}{2} &= \frac{\varepsilon\varepsilon_0 s}{x}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad 2 = \frac{x}{d}; \quad x = 2d; \quad \Delta x = 1\text{см};$$

---

152. Расстояние между пластинами плоского конденсатора увеличили в 5 раз и заменили диэлектрик, проницаемость которого в 2 раза больше. Как изменилась ёмкость конденсатора?

Решение

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{\varepsilon\varepsilon_0 s}{d}; \\ C_2 &= \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 s}{5d}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{C_2}{C_1} = \frac{5}{2} = 2{,}5; \quad C_2 = 2{,}5C_1;$$

---

153. Плоский воздушный конденсатор имеет расстояние между пластинами d = 2,4 мм. На сколько нужно раздвинуть пластины конденсатора при опускании в воду, чтобы ёмкость конденсатора не изменилась?

Решение

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{\varepsilon\varepsilon_0 s}{d}; \\ C &= \frac{81\varepsilon\varepsilon_0 s}{x}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad 1 = \frac{81d}{x}; \quad x = 81d = 194{,}4\text{мм} \quad \Delta d = x - d = 192\text{мм};$$

---

154. Плоский воздушный конденсатор составлен из двух круглых пластин радиусом R = 0,11 м, расположенных на расстоянии d = 3 мм друг от друга. Напряжение на пластинах U = 120 В. Какой заряд сосредоточен на каждой из пластин?

Решение

1. Ёмкость конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon_0 s}{d} = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2}{d} \cong \frac{8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 3{,}14\cdot 2{,}21\cdot 10^{-2}}{3\cdot 10^{-3}} \cong 1{,}12\cdot 10^{-10}\,\Phi;$$

2. Энергия, запасённая в конденсаторе:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}; \quad \Rightarrow \quad C^2U^2 = Q^2; \quad Q = CU \cong 1{,}12\cdot 10^{-10}\cdot 120 \cong 1{,}345\cdot 10^{-8}\,\text{Кл};$$

---

155. Обкладки плоского конденсатора изолированы друг от друга пластиной из диэлектрика. Конденсатор заряжен до разности потенциалов U_1 = 1000 В. Определить диэлектрическую разность потенциалов материала диэлектрика, если при его удалении разность потенциалов между пластинами увеличилась до U_2 = 3000 В.

Решение

1. Электрическая ёмкость конденсатора прямо пропорциональна его заряду, который, кстати, сохраняется, и обратно пропорциональна разности потенциалов, которая по условиям данной задачи изменяется:

$$C = \frac{Q}{U}; \quad \Rightarrow \quad Q = CU; \quad \varepsilon CU_1 = CU_2; \quad \varepsilon = \frac{U_2}{U_1} = 3;$$

---

156. Плоский воздушный конденсатор с площадью пластин s = $2\cdot 10^{-2}$ м и расстоянием между ними d = 10^{-2} м заряжен до напряжения $U_1 = 2\cdot 10^3$ В. После зарядки конденсатор отключили от источника и пространство между пластинами заполнили парафином (ε = 2,1). На сколько изменилась ёмкость конденсатора и напряжённость поля между пластинами?

Решение

1. Изменение ёмкости конденсатора:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 s}{d} \cong \frac{\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12} 2\cdot 10^{-2}}{1\cdot 10^{-2}} \cong 1{,}77\cdot 10^{-11}\,\Phi; \quad C_2 = \varepsilon C_1 = 3{,}72\cdot 10^{-11}\,\Phi;$$

$$\Delta C = C_2 - C_1 \cong 1{,}95\cdot 10^{-11}\,\Phi \equiv 19{,}5\,\text{п}\Phi;$$

2. Изменение напряжённости электрического поля:

$$E_1 = \frac{U_1}{d} \cong \frac{2\cdot 10^3}{10^{-2}} \cong 1\cdot 10^5\,\frac{\text{В}}{\text{м}}; \quad U_2 = \frac{U_1}{\varepsilon} = \frac{2\cdot 10^3}{2{,}1} \cong 952{,}4\ \text{В};$$

$$E_2 = \frac{U_2}{d} \cong \frac{952{,}4}{1\cdot 10^{-2}} \cong 9{,}52\cdot 10^4\,\frac{\text{В}}{\text{м}}; \quad \Delta E = E_1 - E_2 \cong 4800\,\frac{\text{В}}{\text{м}};$$

---

157. Плоский воздушный конденсатор расстояние между пластинами которого d_1 = 1 см, заряжен до напряжения U_1 = 500 В и отключён от источника тока. Какова станет разность потенциалов между пластинами, если их раздвинуть до d_2 = 5 см?

Решение

1. Электрическая ёмкость конденсатора прямо пропорциональна его заряду, который сохраняется, и обратно пропорциональна разности потенциалов, которая – изменяется:

$$C = \frac{Q}{U}; \quad \Rightarrow \quad Q = CU; \quad C_1U_1 = C_2U_2; \quad U_2 = \frac{C_1U_1}{C_2};$$

$$U_2 = U_1\frac{d_2}{d_1} = 2{,}5\text{кВ};$$

---

158. К пластинам плоского конденсатора, находящимся на расстоянии друг от друга d = 4 мм, приложена разность потенциалов U = 160 В. Пространство между пластинами заполнено стеклом (ε = 7), площадь обкладок s = 10^{-2}м^2. Определить величину заряда на пластинах.

Решение

1. Ёмкость конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 s}{d} \cong \frac{7 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 10^{-3}} \cong 1{,}55 \cdot 10^{-10}\,\text{Ф};$$

2. Заряд на пластинах:

$$Q = CU \cong 1{,}55 \cdot 10^{-10} \cdot 160 \cong 2{,}48 \cdot 10^{-8}\,\text{Кл};$$

---

159. Как надо изменить расстояние между пластинами плоского конденсатора, подключенного к источнику постоянного напряжения, чтобы напряжённость поля между ними выросла в ζ = 7 раз?

Решение

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{U}{d_1}; \\ \zeta E &= \frac{U}{d_2}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \zeta = \frac{d_2}{d_1}; \quad d_2 = 7d_1;$$

---

160. Как надо изменить разность потенциалов между пластинами плоского конденсатора, чтобы напряжённость поля между пластинами увеличилась в ζ = 5 раз при неизменном расстоянии между пластинами d = const?

Решение

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{U_1}{d}; \\ \zeta E &= \frac{U_2}{d}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \zeta = \frac{U_2}{U_1}; \quad U_2 = 5U_1;$$

---

161. Разность потенциалов между пластинами плоского воздушного конденсатора U = 150 В, площадь каждой пластины составляет s = $1{,}2\cdot10^{-2}$ м^2, заряд равен Q = 5 нКл. На каком расстоянии находятся пластины?

Решение

$$Q = CU = \frac{\varepsilon_0 s}{d}U;\quad Qd = \varepsilon_0 sU;\quad \Rightarrow\quad d = \frac{\varepsilon_0 sU}{Q} \cong \frac{8{,}85\cdot10^{-12}\cdot1{,}2\cdot10^{-2}\cdot150}{5\cdot10^{-9}} \cong 3{,}2\text{мм};$$

---

162. Конденсатор подключён к источнику постоянного напряжения. Расстояние между пластинами конденсатора уменьшили в ζ = 2 раза. Изменилась ли при этом разность потенциалов между пластинами? Как изменилась напряжённость поля? Как изменился заряд конденсатора?

Решение

1. При подключенном к источнику постоянного напряжения конденсаторе, напряжение между обкладками остаётся неизменным U = const.

2. Напряжённость поля между обкладками:

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \frac{U}{d;} \\ E_2 &= \frac{\zeta U}{d;} \end{aligned}\right\} \Rightarrow\quad \zeta = \frac{E_2}{E_1};\quad E_2 = 2E_1;$$

2. Заряд конденсатора:

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= \frac{\varepsilon_0 s}{d}U; \\ Q_2 &= \frac{\zeta\varepsilon_0 s}{d}U; \end{aligned}\right\} \Rightarrow\quad \zeta = \frac{Q_2}{Q_1};\quad Q_2 = 2Q_1;$$

---

163. Конденсатор отключили от аккумулятора и после этого расстояние между пластинами уменьшили в ζ = 2 раза. Изменилась ли разность потенциалов между пластинами? Изменилась ли напряжённость поля внутри конденсатора? Как изменился заряд конденсатора?

Решение

1. Изменение разности потенциалов:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{\varepsilon_0 s}{d}; \\ C_2 &= \frac{\zeta\varepsilon_0 s}{d}; \end{aligned}\right\}\ \frac{C_2}{C_1} = \zeta = 2;\quad \left.\begin{aligned} Q &= C_1U_1; \\ Q &= C_2U_1; \end{aligned}\right\}\ C_1U_1 = C_2U_2;\quad \frac{U_2}{U_1} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{1}{2};\quad U_2 = \frac{U_1}{2};$$

2. Изменение напряжённости поля между пластинами:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{U_1 d_2}{U_2 d_1} = 1;\quad E_2 = E_1;$$

3. При отключенном от источника конденсаторе заряд сохраняется

$$Q_1 = Q_2;$$

---

164. Плоский конденсатор, между обкладками которого находится слюдяная пластинка (ε = 6), присоединен к аккумулятору. Заряд конденсатора Q_1 = 14 мкКл. Какой заряд пройдёт через аккумулятор при внезапном удалении пластинки?

Решение

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{\varepsilon\varepsilon_0 s}{d}; \\ C_2 &= \frac{\varepsilon_0 s}{d}; \end{aligned}\right\} \quad \frac{C_1}{C_2} = \varepsilon; \quad \left.\begin{aligned} Q_1 &= C_1 U; \\ Q_2 &= \frac{C_1}{\varepsilon}U; \end{aligned}\right\} \quad Q_2 = \frac{Q_1}{\varepsilon}; \quad \Delta Q = Q_1\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \cong 1{,}17\cdot 10^{-5}\,\text{Кл};$$

---

165. Конденсатор после зарядки отключён от источника. Как изменится ёмкость конденсатора, напряжение на его пластинах и напряжённость поля между ними, если воздушный промежуток между пластинами заполнить диэлектриком, проницаемость которого ε = 4?

Решение

1. Изменение ёмкости конденсатора:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{\varepsilon_0 s}{d}; \\ C_2 &= \frac{\varepsilon\varepsilon_0 s}{d}; \end{aligned}\right\} \quad \frac{C_2}{C_1} = \varepsilon; \quad C_2 = 4C_1;$$

2. Изменение напряжения на пластинах:

$$Q = \text{const}; \quad \Rightarrow \quad C_1 U_1 = C_2 U_2; \quad U_1 = 4U_2;$$

3. Изменение напряжённость поля:

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \frac{U_1}{d;} \\ E_2 &= \frac{U_2}{d;} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{E_2}{E_1} = \frac{U_2}{U_1}; \quad E_1 = \varepsilon E_2 = 4E_2;$$

---

166. Площадь каждой пластины плоского конденсатора s = 6·10 $^{-3}$ м^2, заряд конденсатора составляет Q = 1 нКл, разность потенциалов U = 90 В. Определить расстояние между пластинами.

Решение

1. Ёмкость конденсатора:

$$Q = CU; \quad C = \frac{Q}{U}; \quad \frac{\varepsilon_0 s}{d} = \frac{Q}{U}; \quad d = \frac{\varepsilon_0 s U}{Q} \cong \frac{8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 6\cdot 10^{-3}\cdot 90}{1\cdot 10^{-9}} \cong 4{,}78\cdot 10^{-3}\,\text{м};$$

---

167. Каким должно быть расстояние между обкладками плоского конденсатора, ёмкость которого равна: а) ёмкости последовательно соединённых n = 20 одинаковых конденсаторов, расстояние между обкладками которых равно d_0; б) ёмкости n = 20 таких же параллельно соединённых конденсаторов.

Решение

1. При последовательном соединении конденсаторов:

$$C = \frac{C_0}{n}; \quad \frac{\varepsilon_0 s}{d} = \frac{\varepsilon_0 s}{nd_0}; \quad d = nd_0 = 20d_0;$$

2. При параллельном соединении конденсаторов:

$$C = nC_0; \quad \frac{\varepsilon_0 s}{d} = \frac{n\varepsilon_0 s}{d_0}; \quad d = \frac{d_0}{20};$$

---

168. Имеются два конденсатора ёмкостью C_1 = 2 мкФ и C_2 = 4 мкФ. Определить их общую ёмкость при параллельном и последовательном соединениях.

Решение

1. При последовательном соединении:

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}; \quad C_0 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2\cdot 10^{-6}\cdot 4\cdot 10^{-6}}{6\cdot 10^{-6}} \cong 1{,}33\text{мкФ};$$

2. При параллельном соединении:

$$C_0 = C_1 + C_2 = 6\text{мкФ};$$

---

169. Имеется три конденсатора ёмкостью C_1 = 20 мкФ, C_2 = 50 мкФ и C_3 = 70 мкФ. Определить эквивалентную ёмкость при параллельном и последовательном соединении этих конденсаторов.

Решение

1. Параллельное соединение:

$$C_0 = C_1 + C_2 + C_3 = 140\text{мкФ};$$

2. Последовательное соединение:

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{20} + \frac{1}{50} + \frac{1}{70} \cong 0{,}0843\frac{1}{\text{мкФ}}; \quad C_0 \cong 11{,}72\text{мкФ};$$

---

170. Имеются конденсаторы C_1 = 4 мкФ, C_2 = 5 мкФ, C_3 = 10 мкФ, C_4 = 20 мкФ. Найти общую ёмкость при их параллельном и последовательном соединении.

Решение

1. Последовательное соединение:

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4}; \quad \frac{1}{C_0} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}; \quad C_0 = \frac{20}{12} \cong 1{,}7\ \text{мкФ};$$

2. Параллельное соединение:

$$C_0 = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 39\text{мкФ};$$

---

171. В каких пределах изменяется ёмкость, если C_1 = 100 пФ, а переменная ёмкость изменяется в пределах C_2 = 400 – 900 пФ?

Решение

Рис. 171. Последовательное включение конденсаторов

1. Конденсаторы включены последовательно, следовательно:

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1C_2}; \quad C_0 = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2};$$

$$C_{0(\min)} = \frac{C_1C_{2(\min)}}{C_1 + C_{2(\min)}} \cong \frac{100 \cdot 400}{500} \cong 80\text{пФ};$$

$$C_{0(\max)} = \frac{C_1C_{2(\max)}}{C_1 + C_{2(\max)}} \cong \frac{100 \cdot 900}{1000} \cong 90\text{пФ};$$

---

172. В каких пределах изменяется ёмкость, если C_1 = 400 пФ, а переменная ёмкость изменяется в пределах C_2 = 100 – 800 пФ?

Решение

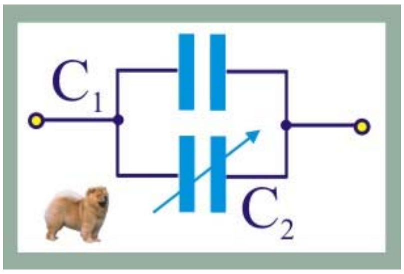


Рис. 172. Параллельное включение

1. Конденсаторы включены параллельно, поэтому:

$$C_{0(\min)} = C_1 + C_{2(\min)} = 500\text{пФ};$$

$$C_{0(\max)} = C_1 + C_{2(\max)} = 1200\text{пФ};$$

---

173. Два конденсатора соединены последовательно в батарею, на которую подан заряд Q = 500 нКл. Ёмкость конденсаторов C_1 = 20 пФ, C_2 = 80 пФ. Какова общая ёмкость конденсаторов и напряжение на каждом из них?

Решение

1. Общая ёмкость конденсаторов:

$$C_0 = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2} \cong 16\text{пФ};$$

2. Напряжение на батарее:

$$Q = C_0U_0; \quad U_0 = \frac{Q}{C_0} = \frac{5 \cdot 10^{-7}}{16 \cdot 10^{-12}} \cong 3{,}1 \cdot 10^4\text{В};$$

3. Напряжение на каждом из конденсаторов:

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{5 \cdot 10^{-7}}{20 \cdot 10^{-12}} = 25\text{кВ}; \quad U_2 = U_0 - U_1 \cong 6{,}25\text{кВ};$$

---

174. Два конденсатора C_1 = 2 мкФ и C_2 = 4 мкФ соединены последовательно и подключены к источнику напряжения U = 120 В. Найти напряжение на каждом конденсаторе.

Решение

$$C_0 = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2} \cong 1{,}33\text{мФ}; \quad Q = C_0U = 1{,}6 \cdot 10^{-4}\text{Кл}; \quad U_1 = \frac{Q}{C_1} \cong 80\text{В}; \quad U_2 = 40\text{В};$$

---

175. Два одинаковых воздушных конденсатора соединены последовательно и подключены к источнику напряжения. Во сколько раз изменится разность потенциалов на одном из конденсаторов, если второй погрузить в жидкость с диэлектрической проницаемостью ε = 2?

Решение

1. Общая ёмкость конденсаторов:

$$C_{01} = \frac{C^2}{2C} = 0{,}5C; \quad C_{02} = \frac{C \cdot \varepsilon C}{C + \varepsilon C} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}C \cong 0{,}667C;$$

2. В соответствие с законом сохранения заряда:

$$\left.\begin{aligned} Q &= C_{01}U_1; \\ Q &= C_{02}U_2; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{U_1}{U_2} = \frac{C_{02}}{C_{01}} \cong \frac{0{,}667}{0{,}5} \cong 1{,}334;$$

---

176. Два одинаковых плоских воздушных конденсатора соединены между собой последовательно и подключены к источнику напряжения. Между пластинами одного из них вводится пластина с диэлектрической проницаемостью ε. Во сколько раз изменится напряжённость поля в этом конденсаторе?

Решение

1. Общая ёмкость конденсаторов:

$$C_{01} = \frac{C^2}{2C} = 0{,}5C; \quad C_{02} = \frac{C \cdot \varepsilon C}{C + \varepsilon C} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}C;$$

2. Напряжённость поля в конденсаторах:

$$E_1 = \frac{U_1}{d}; \quad E_2 = \frac{U_2}{\varepsilon d}; \quad \Rightarrow \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{U_1}{\varepsilon U_2};$$

3. Отношение напряжений на конденсаторах:

$$\left.\begin{aligned} Q &= C_{01}U_1; \\ Q &= C_{02}U_2; \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} Q &= 0{,}5CU_1; \\ Q &= \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}CU_2; \end{aligned}\right\} \quad 1 = \frac{(1+\varepsilon)U_1}{2\varepsilon U_2}; \quad 2\varepsilon U_2 = (1+\varepsilon)U_1;$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}; \quad \Rightarrow \quad \frac{E_2}{E_1} = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon(1+\varepsilon)} = \frac{2}{1+\varepsilon}; \quad E_2 = \frac{2}{1+\varepsilon}E_1; \quad \varepsilon > 1; \quad \Rightarrow \quad E_1 > E_2;$$

---

177. Два плоских конденсатора ёмкостью $C_1 = C_2 = 10$ пФ соединены последовательно. На сколько изменится ёмкость батареи, если пространство между пластинами одного из них заполнить диэлектриком с проницаемостью ε=2?

Решение

$$C_{01} = \frac{C}{2} = 5\text{аФ}; \quad C_{02}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}C \cong 6{,}67\text{пФ}; \quad \Delta C = C_{02} - C_{01} \cong 1{,}67\text{пФ};$$

---

178. Батарею общей ёмкостью C_0 = 100 мкФ, состоящую из трёх параллельно соединённых конденсаторов подключили к сети с напряжением U = 250 В. На обкладках одного из конденсаторов C_1 появился заряд Q_1 = 10 мКл. Определить ёмкость и заряд каждого из других конденсаторов, если $C_2 = C_3$?

Решение

1. Ёмкость конденсатора C_1:

$$C_1 = \frac{Q_1}{U} = \frac{10^{-2}}{250} = 40\text{мкФ};$$

2. Емкость конденсаторов C_2 и C_3:

$$C_{2,3} = C_0 - C_1 = 60\text{мкФ}; \quad C_2 = C_3 = \frac{C_{2,3}}{2} = 30\text{мкФ};$$

3. Заряд на конденсаторах C_2 и C_3:

$$Q_2 = Q_3 = C_2U = 3\cdot 10^{-5}\cdot 250 \cong 7{,}5\text{мКл};$$

---

179. Два конденсатора C_1 = 30 пФ и C_2 = 70 пФ соединили параллельно и подключили к источнику напряжения U = 100 В. Какое напряжение и какой заряд будут иметь место на каждом из них?

Решение

1. Напряжение на параллельных конденсаторах будет, по определению, одинаковым:

$$U_1 = U_2 = 100\ \text{В};$$

2. Заряды конденсаторов:

$$Q_1 = C_1U = 3\cdot 10^{-11}\cdot 100 = 3\ \text{нКл}; \quad Q_2 = C_2U = 7\cdot 10^{-11}\cdot 100 = 7\ \text{нКл};$$

---

180. Конденсатор ёмкостью C_1 = 3 мкФ заряжен до разности потенциалов U_1 = 300 В, конденсатор ёмкостью C_2 = 2 мкФ заряжен до – U_2 = 200 В. После зарядки конденсаторы включили параллельно одноимёнными полюсами. Какая разность потенциалов установилась на конденсаторах после их соединения?

Решение

1. Общий заряд конденсаторов:

$$Q_1 = C_1U_1 = 9\cdot 10^{-4}\text{Кл}; \quad Q_2 = C_2U_2 = 4\cdot 10^{-4}\text{Кл}; \quad Q_0 = Q_1 + Q_2 = 13\cdot 10^{-4}\text{Кл};$$

2. Напряжение на клеммах батареи:

$$Q_0 = C_0U_0; \quad U_0 = \frac{Q_0}{C_0} = \frac{Q_0}{C_1 + C_2} = \frac{13\cdot 10^{-4}}{5\cdot 10^{-6}} = 260\ \text{В};$$

---

181. Два конденсатора заряжены до напряжений U_1 = 600 В и U_2 = 200 В, а затем соединены параллельно. Определить разность потенциалов между обкладками конденсаторов, если ёмкость первого конденсатора в ζ = 3 раза больше ёмкости второго конденсатора.

Решение

$$Q_1 = CU_1; \quad Q_2 = 3CU_2; \quad Q_0 = Q_1 + Q_2 = C(U_1 + 3U_2) = C_0U_0;$$

$$C_0 = C + 3C = 4C; \quad U_0 = \frac{U_1 + 3U_2}{4} = 300 \text{ В};$$

---

182. Воздушный конденсатор ёмкостью C_1 = 2 мкФ заряжают до напряжения U_1 = 110 В. Отключив далее его от сети замыкают на незаряженный конденсатор, который заряжается от первого до U_2 = 44 В. Найти ёмкость второго конденсатора.

Решение

1. Заряд батареи при параллельном включении конденсаторов будет равен заряду первого заряженного первоначально конденсатора:

$$\left.\begin{aligned} Q = C_1U_1; \\ Q = C_2U_2; \end{aligned}\right\} \quad C_1U_1 = C_2U_2; \quad C_2 = \frac{C_1U_1}{U_2} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 110}{44} = 5 \text{ мкФ};$$

---

183. Два конденсатора с ёмкостями C_1 = 20 пФ и C_2 = 30 пФ, с зарядами Q_1 = 30 нКл и Q_2 = 10 нКл соединяются параллельно разноимёнными обкладками. Определить напряжение на батарее и заряд на каждом конденсаторе.

Решение

1. Суммарный заряд и общая ёмкость после соединения конденсаторов:

$$Q_0 = Q_1 - Q_2 = 20\text{нКл}; \quad C_0 = C_1 + C_2 = 50\text{пФ};$$

2. Напряжение на обкладках батареи и на каждом конденсаторе:

$$U_1 = U_2 = U_0 = \frac{Q_0}{C_0} = \frac{20 \cdot 10^{-9}}{50 \cdot 10^{-12}} = 400 \text{ В};$$

3. Заряды на конденсаторах:

$$Q_1 = U_0C_1 = 400 \cdot 20 \cdot 10^{-12} = 8 \text{ нКл};$$

$$Q_2 = U_0C_1 = 400 \cdot 30 \cdot 10^{-12} = 12 \text{ нКл};$$

---

184. Электрический пробой диэлектрика наступает при напряжённости поля E_m = 1800 В/мм. Две ёмкости C_1 = 600 пФ и C_2 = 1500 пФ ис изоляционным слоем из этого диэлектрика толщиной d = 2 мм соединены последовательно. При каком минимальном напряжении будет пробита эта система?

Решение

1. Напряжение пробоя диэлектрика:

$$E = \frac{U}{d}; \quad U_m = E_m d;$$

2. Конденсаторы включены последовательно, поэтому через них протекает при зарядке одинаковый заряд, а падение напряжения на батарее равно сумме падений напряжения на каждом из конденсаторов

$$C_1U_1 = C_2U_2; \quad U_1 > U_2; \quad \Rightarrow \quad U_{max} = U_x - U_2;$$

$$\frac{U_1}{U_2}=\frac{C_2}{C_1};\quad U_1C_1=U_2C_2;\quad \frac{U_1}{U_2}=\frac{C_2}{C_1}=2{,}5;\quad U_1=2{,}5U_2$$

$$E_md=2{,}5U_2;\quad U_2=\frac{E_md}{2{,}5}\cong 1440\quad В;\quad U_m=E_md+\frac{E_md}{2{,}5}=E_md(1+0{,}4)=5040\ В;$$

---

185. Определить ёмкость соединения конденсаторов (рис.185), если C_1 = 70 мкФ, C_2 = 120 мкФ, C_3 = 80 мкФ.

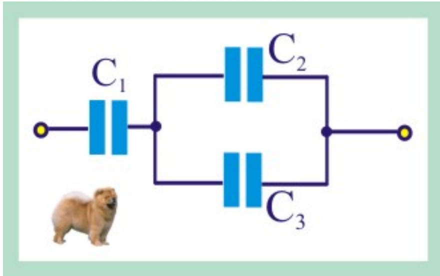


Рис. 185. Соединение конденсаторов

Решение

$$C_{2,3}=C_2+C_3=200\ мкФ;$$

$$C_0=\frac{C_1C_{2,3}}{C_1+C_{2,3}}=\frac{70\cdot 200}{270}\cong 51{,}8\ мкФ;$$

---

186. Имеется три конденсатора ёмкостью C = 12 мкФ, рассчитанные каждый на напряжение U = 600 В. Какие с их помощью ёмкости можно получить и каково допустимое напряжение в каждом случае?

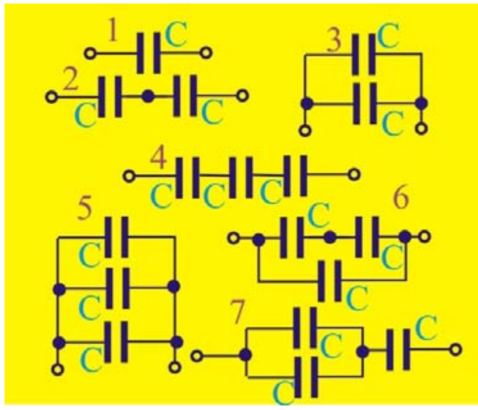


Рис. 186. Соединение трёх емкостей

Решение

1. Использование одной ёмкости позволяет получить параметры, заданные по условию задачи

$$C_1=12\,мкФ;\quad U_1=600\,В;$$

2. Последовательное включение двух конденсаторов

$$C_2=\frac{C}{2}=6\,мкФ;\quad U_2=2U=1200\,В;$$

3. Параллельное включение двух ёмкостей

$$C_3=2C=24\,мкФ;\quad U_3=600\,В;$$

4. Последовательное включение трёх ёмкостей

$$C_4=\frac{C}{3}=4\,мкФ;\quad U_4=3U=1800\,В;$$

5. Параллельное включение трёх одинаковых ёмкостей

$$C_5=3C=36\,мкФ;\quad U_5=U=600\,В;$$

6. Две емкости включены последовательно, а третья – параллельно им

$$C_6=\frac{C}{2}+C=1{,}5C=18\,мкФ;\quad U_6=U=600\,В;$$

7. Две ёмкости включены параллельно, а третья – последовательно с ними

$$\frac{1}{C_7}=\frac{1}{2C}+\frac{1}{C};\quad\Rightarrow\quad C_7=\frac{2}{3}C=8\,мкФ;\quad U_7=900\,В;$$

---

187. Плоский конденсатор разрезают на n = 4 равные части вдоль плоскостей, перпендикулярных обкладкам. Полученные таким образом n конденсаторов соединяют последовательно. Чему равна ёмкость полученной батареи, если ёмкость исходного конденсатора была равной C_0 = 16 мкФ?

Решение

1. При разрезании пластин плоского конденсатора на четыре равные по площади части получится четыре одинаковых по емкости конденсатора, потому что ёмкость плоского воздушного конденсатора определяется как:

$$C = \frac{\varepsilon_0 s}{d};$$

Расстояние после разрезания между пластинами остаётся прежним, а площадь каждой новой пластины уменьшается в n раз

$$C_1 = \frac{C_0}{n};$$

2. При последовательном соединении n конденсаторов результирующая емкость батареи определится как:

$$C_\Sigma = \frac{C_1}{n} = \frac{C_0}{n^2} = 1\,\text{мкФ};$$

---

188. Два плоских конденсатора, ёмкостью C каждый, соединили параллельно. В одну из плоских ёмкостей вставили диэлектрическую пластину с проницаемостью ε, заполнившую весь объём между пластинами. Какой ёмкости и как нужно подключить третий конденсатор, чтобы ёмкость батареи стала равной 3C?

Решение

1. После заполнения диэлектриком одного из конденсаторов, ёмкость параллельного соединения станет равной

$$C_\Sigma = C + \varepsilon C;$$

2. Рассмотрим вариант параллельного включения некой ёмкости C_x

$$3C = C(1+\varepsilon) + C_x; \quad \Rightarrow \quad C_x = 3C - C(1-\varepsilon) = C(2-\varepsilon);$$

Такой вариант включения возможен при $\varepsilon < 2$.

3. При $\varepsilon > 2$ третью ёмкость следует подключать последовательно

$$\frac{1}{3C} = \frac{1}{C_\Sigma} + \frac{1}{C_x}; \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3C} = \frac{C_\Sigma + C_x}{C_\Sigma C_x}; \quad 3C = \frac{C_\Sigma C_x}{C_\Sigma + C_x};$$

$$3CC_\Sigma + 3CC_x = C_\Sigma C_x; \quad C_\Sigma C_x - 3CC_x = 3CC_\Sigma; \quad C_x(C_\Sigma - 3C) = 3CC_\Sigma;$$

$$C_x = \frac{3CC_\Sigma}{C_\Sigma - 3C} = \frac{3CC(1+\varepsilon)}{C(1+\varepsilon) - 3C} = \frac{3C^2(1+\varepsilon)}{C(\varepsilon - 2)} = 3C\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-2};$$

---

189. Разность потенциалов между точками A и B равна U. Ёмкость конденсаторов C_1, C_2, C_3 известна. Определить заряды конденсаторов q_1, q_2,q_3 и разность потенциалов между точками A и D.

Решение

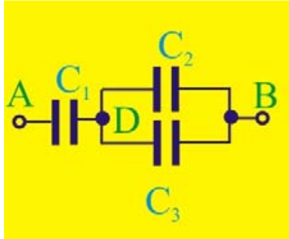


Рис. 189. Соединение конденсаторов

1. Определим общую ёмкость заданного соединения конденсаторов

$$\frac{1}{C_0}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_1+C_2};\quad \Rightarrow \quad C_0=\frac{C_1(C_2+C_3)}{C_1+C_2+C_3};$$

2. Конденсаторы C_2 и C_3 соединены параллельно, поэтому разности потенциалов на их обкладках одинаковы

$$U_2=U_3=U^*,$$

при этом

$$q_2=C_2U^*;\quad q_3=C_3U^*;$$

3. Полный заряд на параллельно включенных конденсаторах определится как:

$$q^*=q_2+q_3=(C_2+C_3)U^*;\quad \Rightarrow \quad U^*=\frac{q_2+q_3}{C_2+C_3};$$

4. Конденсатор C_1 подключен последовательно, причём точка D является общей, поэтому

$$q_1=q_1^*=q_2+q_3;$$

5. Уравнения разности потенциалов на заданных точках схемы

$$U_{AD}=\frac{q_1}{C_1};\quad U_{DB}=U^*=\frac{q_2+q_3}{C_2+C_3};\quad U_{AB}=U=U_{AD}+U_{DB}=\frac{q_1}{C_1}+\frac{q_2+q_3}{C_2+C_3};$$

$$U=q_1\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2+C_3}\right)=\frac{q_1}{C_0};\quad \Rightarrow \quad q_1=\frac{UC_1(C_2+C_3)}{C_1+C_2+C_3};$$

6. Определим разность потенциалов U_{DB}

$$U_{DB}=U-\frac{q_1}{C_1}=U-\frac{U(C_3+C_3)}{C_1+C_2+C_3}=\frac{UC_1}{C_1+C_2+C_3};$$

7. Заряды параллельных конденсаторов

$$q_2=U_{DB}C_2=\frac{C_1C_2U}{C_1+C_2+C_3};$$

$$q_3=U_{DB}C_3=\frac{UC_1C_3}{C_1+C_2+C_3};$$

---

190. Определить ёмкость батареи конденсаторов, если C_1 = 4 мкФ, C_2 = 10 мкФ, C_3 = 2 мкФ.

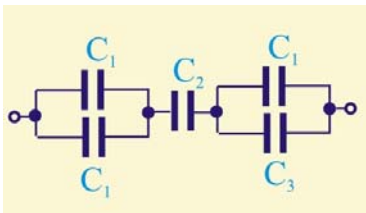


Рис. 190. Ёмкость батареи

Решение

1. Схему можно представить как три последовательно соединенных конденсатора ёмкостями $2C_1$, C_2 и (C_1+C_3), т.е. 8 мкФ, 10 мкФ и 6 мкФ. В этом случае

$$\frac{1}{C_0}=\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{6}\cong 0{,}125+0{,}1+0{,}167\cong 0{,}392;$$

$$C_0=\frac{1}{0{,}392}\cong 2{,}551\text{мкФ};$$

---

191. Во сколько раз изменится емкость плоского конденсатора, если между обкладками расположить две тонкие металлические пластины? Если соединить их проводником?

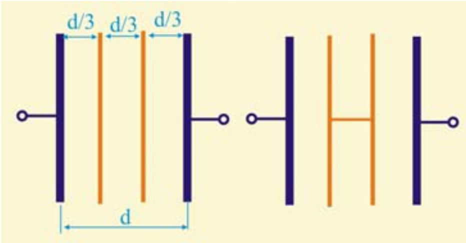


Рис. 191. Пластины в конденсаторе

Решение

1. При внесении в конденсатор двух проводящих пластин образуется три одинаковые емкости, соединенные последовательно, каждый полученный таким образом конденсатор, в случае расположения его в воздухе ($\varepsilon = 1$) будет обладать электрической емкостью

$$C_1 = \frac{3\varepsilon_0 s}{d} = 3C_0,$$

где C_0 – емкость конденсатора без вставок. Емкость трех последовательно включенных одинаковых конденсаторов составит

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1}; \quad \Rightarrow \quad C = \frac{3C_0}{3} = C_0,$$

т.е. внесенные металлические (проводящие) пластины емкости конденсатора не поменяют.

2. Соединение пластин безъемкостным проводником приведет к тому что батарею можно представить в виде двух последовательно соединенных конденсаторов емкостью C_1 каждый

$$C^* = \frac{C_1}{2} = 1{,}5C_0;$$

---

192. Конденсатор состоит из трех тонких металлических обкладок площадью s = 4 см^2, пространство между которыми заполнено слюдой толщиной d = 0,2 мм. Крайние обкладки соединены между собой. Какую емкость имеет такой конденсатор?

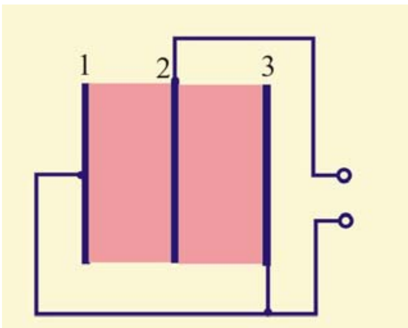


Рис. 192. Слюдяная ёмкость

Решение

1. Пластины 1-2 и 2-3 образуют два конденсатора равной ёмкости

$$C_0 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 s}{d},$$

где ε – диэлектрическая проницаемость слюды, d – расстояние между обкладками.

2. Конденсаторы в данном случае соединены параллельно, т.к. на их обкладках, в случае подключения к источнику ЭДС, будут одинаковые потенциалы $\varphi_1 = \varphi_3$, в этой связи

$$C_\Sigma = 2C_0 = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 s}{d} \cong \frac{2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-4}} \cong 252\,\text{мкФ};$$

---

193. Определить суммарную ёмкость батареи конденсаторов.

Решение

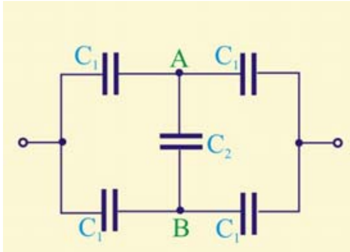


Рис. 194. Батарея конденсаторов

1. Ввиду симметрии схемы потенциалы точек A и B будут одинаковыми $\varphi_A = \varphi_B$, т.е. $U_{AB} = 0$, при включении батареи конденсаторов к цепь конденсатор C_2 заряжаться не будет, поэтому его на полном основании можно их схемы исключить.

2. Батарея, таким образом, представляет собой две параллельные цепи, каждая из которых содержит две одинаковые последовательные ёмкости

$$C_\Sigma = \frac{C_1}{2} + \frac{C_1}{2} = C_1;$$

---

194. Определить ёмкость конденсаторной схемы, составленной из одинаковых по ёмкости элементов.

Решение

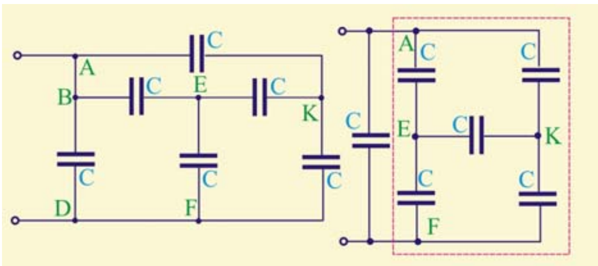


Рис. 194. Соединение одинаковых конденсаторов

1. В заданной схеме имеются точки с одинаковыми потенциалами:

$$\varphi_A = \varphi_B; \quad \varphi_D = \varphi_F;$$

2. Если точки равных потенциалов соединить, не допуская разрывов и новых узлов, то получится схема, изображенная в правой части рис. 194.

3. Схема, обведенная пунктиром, рассмотрена в предыдущей задаче, её суммарная емкость равна C.

4. Электрическая ёмкость всей батареи одинаковых конденсаторов определится как:

$$C_\Sigma = C + C = 2C;$$

---

195. Определить заряд каждого конденсатора и разность потенциалов между точками D и E, если $C_1 = C_2 = C_3 = C$, а $C_4 = 4C$. К точкам A и B Подводится постоянное напряжение U.

Решение

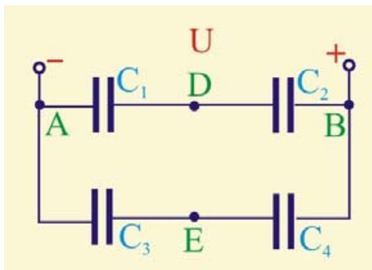


Рис. 195. Определение заряда

1. Определим ёмкость верхней ветви схемы

$$C_{1,2} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C}{2};$$

2. Ввиду одинаковости ёмкости заряды конденсаторов C_1 и C_2 будут одинаковыми

$$q_1 = q_2 = C_{1,2}U = \frac{CU}{2};$$

3. Ёмкость конденсаторов нижней ветви схемы

$$C_{3,4} = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} = \frac{4}{5}C; \quad q_3 = q_4 = C_{3,4}U = \frac{4}{5}CU;$$

4. Искомая разность потенциалов определится как:

$$\varphi_D - \varphi_E = U_1 - U_3 = \Delta\varphi\,;$$

$$U_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{U}{2}; \quad U_3 = \frac{4}{5}U; \quad \Delta\varphi = U\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{5}\right) = -0{,}3U\,;$$

---

196. Определить ёмкость батареи конденсаторов соединенных по схеме, приведенной на рис. 196.

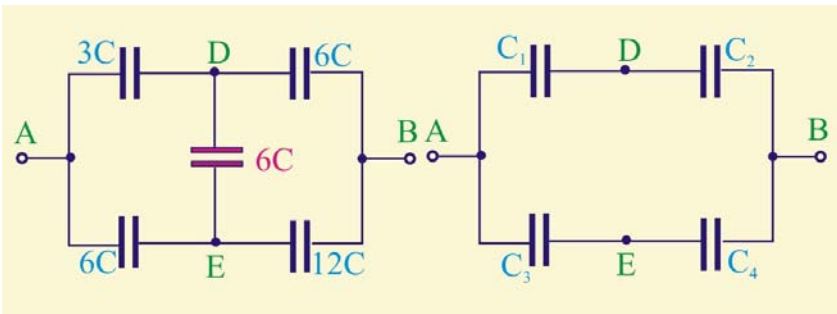


Рис. 196. Преобразование конденсаторной схемы

Решение

1. Приведенная схема не обладает в явном виде симметрией и невозможно выделить параллельного и последовательного соединения конденсаторов. Вместе с тем, ёмкости конденсаторов верхней ветви схемы ровно в два раза меньше ёмкостей в нижней ветви.

2. Уберём мысленно из схемы перемыкающий нижнюю и верхнюю ветви конденсатор и проанализируем распределение напряжений на оставшихся элементах.

3. С другой стороны

$$U_1 + U_2 = U_3 + U_4; \quad \Rightarrow \quad U_1 = U_3,$$

Что может иметь место только при $\varphi_D = \varphi_E$., т.е. конденсатор-перемычка заряжаться не будет и никакого влияния на схему не оказывает.

4. Определим далее ёмкости верхней и нижней частей схемы

$$C_{1,2} = \frac{3C\cdot 6C}{3C + 6C} = 2C; \quad C_{3,4} = \frac{6C\cdot 12C}{6C + 12C} = 4C; \quad C_\Sigma = C_{1,2} + C_{3,4} = 6C\,;$$

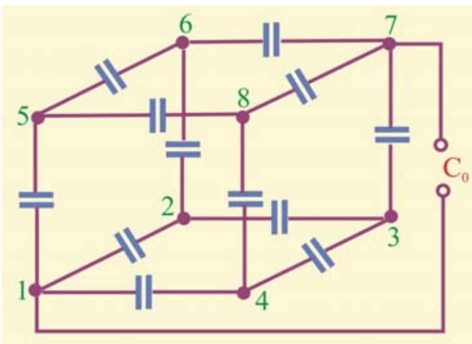


Рис.197.1. Ёмкостный куб

1197. Из проволоки изготовлен куб, в каждое ребро которого вставлен конденсатор с ёмкостью С. К источнику ЭДС куб подключен противоположными вершинами. Определить ёмкость C_0 получившейся батареи конденсаторов.

Решение

1. Схема обладает симметрией относительно пространственной диагонали куба. При повороте куба на 120° параметры схе-

мы не меняются, поменяются местами только точки 2,4,5, так же как и точки 3,6,8. Это свойство схемы указывает на то, что

$$\varphi_2 = \varphi_4 = \varphi_5;$$

$$\varphi_3 = \varphi_6 = \varphi_8;$$

2. Равенство потенциалов точек даёт возможность их объединить в одну точку, в этом случае схема может быть представлена тремя блоками параллельных конденсаторов (рис. 197.2).

3. Ёмкость последовательных блоков будет равна: 3C, 6C и 3C, тогда суммарная ёмкость определится как:

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{3C} + \frac{1}{6C} + \frac{1}{3C};$$

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C}\frac{2+1+2}{6} = \frac{1}{C}\frac{5}{6};$$

$$C_0 = \frac{6}{5}C = 1{,}2C;$$

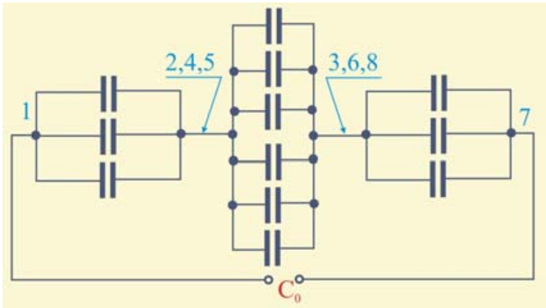


Рис. 197.2. Эквивалентная схема

198. Два одинаковых плоских конденсатора соединены параллельно и заряжены до напряжения U_0 = 240 В. После отключения от источника тока расстояние между пластинами одного из конденсаторов уменьшают в три раза. Каким станет напряжение на конденсаторах?

Решение

1. Пусть ёмкость каждого конденсатора первоначально была C, тогда суммарная ёмкость двух параллельно включенных конденсаторов будет составлять 2C, а полный заряд батареи:

$$q_1 = 2CU_0;$$

2. После сближения пластин в одном из конденсаторов его ёмкость станет равным 3C, а всей батареи 4C. Заряд конденсаторного соединения, при этом, составит:

$$q_2 = 4CU;$$

3. В соответствие с законом сохранения заряда, заряд конденсаторного соединения вне зависимости от манипуляций с пластинами, остаётся постоянным, т.е. $q_1 = q_2$

$$2CU_0 = 4CU; \quad \Rightarrow \quad U = \frac{U_0}{2} = 120\,В;$$

199. Конденсатор имеет заряд Q = $2\cdot10^{-3}$ Кл, разность потенциалов на его обкладках U = 400 В. Какова энергия электрического поля внутри конденсатора?

Решение

$$W = \frac{QU}{2} = \frac{2\cdot10^{-3}\cdot400}{2} = 0{,}4\,Дж;$$

200. Ёмкость конденсатора C = 6 мкФ, а заряд Q =3⋅10 $^{-4}$ Кл. Определить энергию электрического поля конденсатора.

Решение

$$W = \frac{Q^2}{2C} \cong \frac{9\cdot 10^{-8}}{12\cdot 10^{-6}} \cong 7{,}5\text{мДж};$$

---

201. Плоский воздушный конденсатор, образованный двумя пластинами площадью s = 1 дм^2 каждая, заряжен до разности потенциалов U = 60 В. Расстояние между пластинами d = 2 см. Определить энергию конденсатора.

Решение

1. Ёмкость конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon_0 s}{d};$$

2. Энергия конденсатора:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 s U^2}{2d} \cong \frac{8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 10^{-2}\cdot 3600}{4\cdot 10^{-2}} \cong 8\text{нДж};$$

---

202. Площадь пластин плоского воздушного конденсатора s = 100 см^2, расстояние между ними d = 5 мм. До какого напряжения был заряжен конденсатор, если при его разрядке выделилось W = 4,2⋅10 $^{-3}$ Дж энергии?

Решение

1. Ёмкость конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon_0 s}{d};$$

2. Напряжение на обкладках конденсатора:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 s U^2}{2d}; \quad \Rightarrow \quad U = \sqrt{\frac{2dW}{\varepsilon_0 s}} \cong \sqrt{\frac{10^{-2}\cdot 4{,}2\cdot 10^{-3}}{8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 10^{-2}}} \cong 21{,}8\ \text{кВ};$$

---

203. Конденсатор имеет заряд Q = 2⋅10 $^{-3}$ Кл, разность потенциалов на его обкладках U = 400 В. Опередить энергию, запасённую в конденсаторе.

Решение

1. Энергия, запасаемая в конденсаторе:

$$W = \frac{CU^2}{2}; \quad W = \frac{Q^2}{2C}; \quad C = \frac{Q^2}{2W}; \quad \Rightarrow \quad W = \frac{Q^2U^2}{4W}; \quad 4W^2 = Q^2U^2;$$

$$W = \frac{QU}{2} = \frac{2\cdot 10^{-3}\cdot 400}{2} = 0{,}4\text{Дж};$$

---

204. Конденсатор C = 50 мкФ подключён к источнику с U = 120 В. Какую энергию запасает конденсатор?

Решение

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{5 \cdot 10^{-5} \cdot 120^2}{2} = 0{,}36\ \text{Дж};$$

---

205. Ёмкость конденсатора C = 6 мкФ, а заряд $Q = 3 \cdot 10^{-4}$ Кл. Определить энергию электрического поля конденсатора.

Решение

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{9 \cdot 10^{-8}}{12 \cdot 10^{-6}} = 7{,}5\text{мДж};$$

---

206. Плоский воздушный конденсатор, образованный двумя параллельными пластинами площадью S = 1 дм^2 каждая, заряжен до разности потенциалов U = 60 В. Расстояние между пластинами d = 2 см. Определить энергию конденсатора.

Решение

1. Ёмкость плоского воздушного конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \approx \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-2}} \approx 4{,}4 \cdot 10^{-12}\,\text{Ф};$$

2. Энергия электрического поля конденсатора:

$$W = \frac{CU^2}{2} \approx \frac{1{,}94 \cdot 10^{-23} \cdot 360}{2} \approx 3{,}5 \cdot 10^{-21}\,\text{Дж};$$

---

207. Площадь пластин плоского воздушного конденсатора S = 100 см^2, расстояние между ними d = 5 мм. До какого напряжения был заряжен конденсатор, если при его разрядке выделилось $W = 4{,}2 \cdot 10^{-3}$ Дж энергии?

Решение

1. Ёмкость конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \approx \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{-3}} \approx 1{,}77 \cdot 10^{-11}\,\text{Ф};$$

2. Напряжение зарядки конденсатора:

$$W = \frac{CU^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad U = \sqrt{\frac{2W}{C}} \approx \sqrt{\frac{2 \cdot 4{,}2 \cdot 10^{-3}}{1{,}77 \cdot 10^{-11}}} \approx 22\text{кВ};$$

---

208. Какое количество теплоты выделится в проводнике при разрядке через него конденсатора ёмкостью C = 100 мкФ, заряженного до разности потенциалов U = 1,2 кВ?

Решение

1. Если вся энергия электрического поля конденсатора без потерь преобразуется в тепло, за счёт сопротивления проводника, то:

$$Q_T \approx W = \frac{CU^2}{2} = \frac{10^{-4} \cdot 1{,}44 \cdot 10^6}{2} \approx 72\text{Дж};$$

---

209. Площадь каждой из пластин плоского конденсатора S = 300 см^2, расстояние между пластинами d = 1 мм. Какая разность потенциалов была приложения к пластинам, если при зарядке конденсатора выделилось Q = 0,21 Дж тепловой энергии?

Решение

1. Электрическая ёмкость конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \approx \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{10^{-3}} \approx 2{,}7 \cdot 10^{-10}\,Ф;$$

2. Напряжение зарядки конденсатора:

$$Q \approx W = \frac{CU^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad U = \sqrt{\frac{2W}{C}} \approx \sqrt{\frac{0{,}42}{2{,}7 \cdot 10^{-10}}} \approx 39кВ;$$

---

210. Плоский воздушный конденсатор заряжен от источника напряжения и отключен от него, после чего расстояние меду пластинами увеличили вдвое. Как изменилась энергия электрического поля конденсатора?

Решение

1. Изменение ёмкости конденсатора при раздвигании пластин:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{\varepsilon_0 S}{d_1}; \\ C_2 &= \frac{\varepsilon_0 S}{2d_1}; \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{1}{2}C_1;$$

2. Изменение энергии конденсатора при раздвигании пластин и при условии сохранения его заряда:

$$W_1 = \frac{Q^2}{2C}; \quad W_2 = \frac{Q^2}{C}; \quad \Rightarrow \quad W_2 = 2W_1;$$

---

211. Плоский воздушный конденсатор ёмкостью C = 20 нФ заряжается до разности потенциалов U = 100 В. Какую работу нужно совершить, чтобы увеличить вдвое расстояние между обкладками?

Решение

1. Работа при раздвигании пластин численно будет равна изменению энергии, запасённой в конденсаторе, при условии сохранения электрического заряда:

$$W_1 = \frac{CU^2}{2} = \frac{2 \cdot 10^{-8} \cdot 10^4}{2} = 1 \cdot 10^{-4}Дж; \quad W_2 = 2W_1 = 2 \cdot 10^{-4}Дж;$$

$$A = W_2 - W_1 = 1 \cdot 10^{-4}Дж \equiv 0{,}1мДж;$$

---

212. Во сколько раз изменится энергия заряженного конденсатора, если пространство между пластинами конденсатора заполнить маслом с ε = 2,5. Рассмотреть случаи: а) конденсатор отключён от источника напряжения; б) конденсатор остаётся присоединённым к источнику напряжения.

Решение

1. При отключённом от источника конденсаторе при заполнении пространства между пластинами диэлектриком заряд сохранится, часть анергии электрического поля потратится на поляризацию диэлектрика

$$W_1 = \frac{dQ^2}{2\varepsilon_0 S}; \quad W_2 = \frac{dQ^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}; \quad \Rightarrow \quad W_2 = \frac{W_1}{\varepsilon} = \frac{W_1}{2,5};$$

2. Если конденсатор присоединён к источнику, то напряжение на его обкладках остаётся неизменным, т.е. поляризация диэлектрика протекает за счёт энергии источника, при этом ёмкость конденсатора увеличится в ε раз:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}; \quad C_2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}; \quad W_1 = \frac{C_1 U^2}{d}; \quad W_2 = \frac{\varepsilon C_1 U^2}{2}; \quad W_2 = \varepsilon W_1 = 2,5 W_1;$$

---

213. Расстояние между пластинами заряженного плоского конденсатора уменьшили в два раза. Во сколько раз при этом изменяется заряд Q, напряжение на обкладках U, напряжённость поля E и энергия W в случаях, когда конденсатор отключён от источника напряжения и когда остаётся присоединённым к нему?

Решение

1. При отключённом источнике напряжения сохраняется заряд:

$$Q = \text{const}; \quad C_2 = 2C_1; \quad \Rightarrow \quad W_1 = \frac{Q^2}{2C_1}; \quad W_2 = \frac{Q^2}{4C_1}; \quad W_2 = \frac{W_1}{2};$$

$$\frac{2C_1 U_2^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{C_1 U_1^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad \frac{U_2^2}{U_1^2} = \frac{1}{4}; \quad U_1 = 2U_2; \quad E_1 = \frac{U_1}{d}; \quad E_2 = \frac{2U_1}{2d}; \quad E_1 = E_2;$$

2. При подключенном источнике сохраняется постоянство разности потенциалов между обкладками:

$$U_1 = U_2; \quad C_2 = 2C_1; \Rightarrow \quad W_2 = 2W_1; \quad E_1 = \frac{U}{d}; \quad E_2 = \frac{2U}{d}; \quad E_2 = 2E_1;$$

$$W_2 = \frac{Q_2^2}{4C_1}; \quad W_1 = \frac{Q_1^2}{2C_1}; \quad \frac{W_2}{W_1} = 2 = \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{Q_1^2}; \quad 4Q_1^2 = Q_2^2; \quad Q_2 = 2Q_1;$$

---

214. Пять одинаковых конденсаторов ёмкостью C = 0,2 мкФ каждый соединены последовательно в батарею. При подключении батареи к источнику тока он совершает работу $A = 2\cdot 10^{-4}$ Дж. Определить разность потенциалов между обкладками каждого конденсатора.

Решение

1. Ёмкость батареи из n=5 одинаковых последовательно соединенных конденсаторов:

$$C_\Sigma = \frac{C}{n};$$

2. Произведённая источником работа будет численно равна энергии, запасённой батареей

$$A = W = \frac{C_\Sigma U_\Sigma^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad U_\Sigma = \sqrt{\frac{2W}{C_\Sigma}} = \sqrt{\frac{2nW}{C}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-7}}} = 100 В;$$

3. Напряжение на обкладках одного конденсатора:

$$U_1 = U_2 = \ldots = U_5 = \frac{U_\Sigma}{n} = 20 \text{ В};$$

---

215. Определить работу, которую необходимо совершить, чтобы увеличить расстояние между пластинами плоского воздушного конденсатора на расстояние Δd = 0,4 мм. Площадь каждой пластины S = $(2\pi \cdot 10^4)$ мм^2, заряд каждой пластины Q = 200 нКл.

Решение

1. Напряжённость электрического поля в пространстве между пластинами:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{2S\varepsilon_0};$$

2. Работа по перемещению заряженной пластины в электрическом поле

$$A = QE\Delta d = \frac{Q^2 \Delta d}{2S\varepsilon_0} \approx \frac{4 \cdot 10^{-14} \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{12{,}56 \cdot 10^{-2} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} \approx 1{,}44 \cdot 10^{-5} Дж;$$

---

216. Определить заряд конденсатора ёмкостью C = 0,02 мкФ, если напряжённость поля в конденсаторе E = 320 В/см, а расстояние между пластинами d = 0,5 см. Каким станет напряжение на пластинах, если зазор между ними увеличить в 2 раза. Определить энергию конденсатора в обоих случаях.

Решение

1. Заряд конденсатора:

$$Q = CU; \quad U = Ed; \quad Q = CEd = 2 \cdot 10^{-8} \cdot 3{,}2 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 3{,}2 \cdot 10^{-6} Кл;$$

2. Разность потенциалов между пластинами конденсатора:

$$U_1 = Ed = 160 \quad В; \quad U_2 = T = E2d = 320 \text{ В};$$

3. Энергия конденсатора:

$$W_1 = \frac{Q^2}{2C} \approx 2{,}56 \cdot 10^{-4} Дж; \quad W_2 = \frac{Q^2}{C} \approx 5{,}12 \cdot 10^{-4} Дж;$$

---

217. Две пластины площадью S = 200 см^2 каждая погружены в масло с диэлектрической проницаемостью ε = 2,2 и подключены к источнику питания напряжением U = 200 В. Как изменится энергия конденсатора, если после его отключения расстояние между пластинами уменьшить от 5 см до 1 см?

Решение

1. Ёмкость конденсатора:

$$C_1 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}; \quad C_2 = \frac{5\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}; \quad C_2 = 5C_1;$$

2. Заряд конденсатора после отключения от источника сохранится :

$$Q_1 = Q_2 = Q = C_1U_1 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}U_1;$$

3. Изменение энергии конденсатора при раздвигании пластин:

$$W_1 = \frac{Q^2}{2C_1} = \frac{C_1^2U_1^2}{2C_1} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}\frac{U_1^2}{2} \approx 1{,}56\cdot 10^{-7}\,\text{Дж};$$

$$W_2 = \frac{W_1}{5};\quad \Delta W = W_1 - \frac{W_1}{5} = W_1\left(1-\frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5}W_1 \approx 1{,}25\cdot 10^{-7}\,\text{Дж};$$

---

218. Заряженный шар радиусом r_1 = 2 см соединяют проводником с незаряженным шаром, радиус которого r_2 = 3 см. После того как шары разъединяют, энергия второго шара оказалась равной W_2 = 0,4 Дж. Какой заряд был на первом шаре до соединения?

Решение

1. Электрические ёмкости шаров:

$$C_1 = 4\pi\varepsilon_0 r_1 \approx 2{,}2\cdot 10^{-12}\,\Phi;\quad C_2 = 4\pi\varepsilon_0 r_2 \approx 3{,}3\cdot 10^{-12}\,\Phi;$$

2. Электрический заряд и потенциал второго шара после его отсоединения от первого шара:

$$W_2 = \frac{Q_2^2}{2C_2};\quad Q_2 = \sqrt{2W_2C_2} \approx 1{,}62\cdot 10^{-6}\,\text{Кл};$$

$$\varphi_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{\sqrt{2W_2C_2}}{C_2} = \sqrt{\frac{2W_2}{C_2}} \approx 4{,}92\cdot 10^{5}\,\text{В};$$

3.В соединённом состоянии электрические потенциалы шаров одинаковы,

$$\varphi_2 = \varphi_1^*,$$

при этом, заряд первого шара определяется как:

$$\frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_1}{C_1};\quad Q_1^* = \frac{Q_2C_1}{C_2} \approx 1\cdot 10^{-6}\,\text{Кл};$$

4. В соответствии с законом сохранения электрического заряда:

$$Q_1 = Q_1^* + Q_2 \approx 2{,}62\,\text{мкКл};$$

---

5. Постоянный электрический ток

1. Найти скорость упорядоченного движения электронов в проводнике сечением S = 5 мм^2 при силе тока I = 10 А, если концентрация электронов проводимости n = 5·10^{28} м$^{-3}$.

Решение

$$I = nevS; \quad \Rightarrow \quad v = \frac{I}{neS} \approx \frac{10}{5\cdot 10^{28}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 5\cdot 10^{-6}} \approx 2{,}5\cdot 10^{-4}\,\frac{м}{с};$$

---

2. По проводнику сечением S = 5 мм^2 течёт ток силой I = 9 А. Дрейфовая скорость электронов составляет v = 0,282 мм/с. Какова концентрация свободных носителей заряда в проводнике?

Решение

$$I = nevS; \quad \Rightarrow \quad n = \frac{I}{evS} \approx \frac{9}{1{,}6\cdot 10^{-19} 2{,}82\cdot 10^{-4}\cdot 6\cdot 10^{-6}} \approx 3{,}32\cdot 10^{28}\,м^{-3};$$

---

3. Определить силу тока в проводнике радиусом r = 1 мм, если концентрация свободных электронов в веществе n =10^{28} м$^{-3}$, средняя скорость направленного движения электронов v = 4,2·10^{-4} м/с.

Решение

$$I = nevS = nev\pi r^2 \approx 10^{28}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 4{,}2\cdot 10^{-4}\cdot 3{,}14\cdot 1\cdot 10^{-6} \approx 2{,}1A;$$

---

4. Найти скорость упорядоченного движения электронов в медном проводнике сечением S = 25 мм^2 при силе тока I = 50 А, считая, что на каждый атом меди приходится один электрон проводимости.

Решение

1. Физические параметры меди:

$$\rho \approx 9\cdot 10^3\,\frac{кг}{м^3}; \quad \mu = 63{,}5\cdot 10^{-3}\,\frac{кг}{моль}; \quad m = \rho V; \quad V = 1м^3;$$

2. Количество свободные электронов в 1 м^3 меди (концентрация свободных носителей заряда):

$$\frac{m}{\mu} = \frac{n}{N_A}; \quad \Rightarrow \quad n = \frac{mN_A}{\mu};$$

3. Дрейфовая скорость электронов:

$$I = nevS; \quad \Rightarrow \quad v = \frac{I}{neS} = \frac{I\mu}{mN_A eS} \approx \frac{50\cdot 63{,}5\cdot 10^{-3}}{9\cdot 10^3\cdot 6\cdot 10^{23}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19} 25\cdot 10^{-6}} \approx 1{,}47\cdot 10^{-4}\,\frac{м}{с};$$

---

5. Определить среднюю скорость направленного движения электронов медного проводника при плотности постоянного тока j = 11 А/м^2, считая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон.

Решение

1. Физические параметры меди:

$$\rho \approx 9\cdot 10^3\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3};\quad \mu = 63{,}5\cdot 10^{-3}\,\frac{\text{кг}}{\text{моль}};\quad m = \rho V;\quad V = 1\text{м}^3\text{ж};$$

2. Количество свободные электронов в 1 м^3 меди (концентрация свободных носителей заряда):

$$\frac{m}{\mu} = \frac{n}{N_A};\quad \Rightarrow\quad n = \frac{mN_A}{\mu};$$

3. Дрейфовая скорость электронов:

$$I = nevS;\quad \Rightarrow\quad jS = nevS;\quad v = \frac{j}{ne} = \frac{j\mu}{mN_A e};$$

$$v \approx \frac{11\cdot 10^6\cdot 63{,}5\cdot 10^{-3}}{9\cdot 10^3\cdot 6\cdot 10^{23}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}} \approx 8{,}1\cdot 10^{-4}\,\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

---

6. Один полюс источника тока присоединён к электрической лампе медным проводом, а другой – алюминиевым проводом такого же диаметра. Сравнить скорости упорядоченного движения электронов в проводниках, считая, что на каждый атом металла приходится один электрон проводимости.

Решение

1. Физические характеристики металлов:

$$\rho_{Cu} \approx 9\cdot 10^3\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3};\quad \mu_{Cu} = 63{,}5\cdot 10^{-3}\,\frac{\text{кг}}{\text{моль}};\quad m_{Cu} = \rho_{Cu}V;\quad V = 1\text{м}^3;$$

$$\rho_{Al} \approx 2{,}7\cdot 10^3\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3};\quad \mu_{Al} \approx 27\cdot 10^{-3}\,\frac{\text{кг}}{\text{моль}};\quad m_{Al} = \rho_{Al}V;\quad V = 1\text{м}^3;$$

2. Количество свободные электронов в 1 м^3 в металлах (концентрация свободных носителей заряда):

$$\frac{m_{Cu}}{\mu_{Cu}} = \frac{n_{Cu}}{N_A};\quad \Rightarrow\quad n_{Cu} = \frac{m_{Cu}N_A}{\mu_{Cu}} \approx \frac{9\cdot 10^3\cdot 6\cdot 10^{23}}{63{,}5\cdot 10^{-3}} \approx 8{,}5\cdot 10^{28}\,\text{м}^{-3};$$

$$\frac{m_{Al}}{\mu_{Al}} = \frac{n_{Al}}{N_A};\quad \Rightarrow\quad n_{Al} = \frac{m_{Al}N_A}{\mu_{Al}} \approx \frac{2{,}7\cdot 10^3\cdot 6\cdot 10^{23}}{27\cdot 10^{-3}} \approx 6\cdot 10^{28}\,\text{м}^{-3};$$

3. Отношение дрейфовых скоростей определится из условия равенства протекающей по проводника силы тока и их сечения:

$$\left.\begin{aligned} v_{Cu} &= \frac{I}{n_{Cu}eS};\\ v_{Al} &= \frac{I}{n_{Al}eS}; \end{aligned}\right\}\quad \Rightarrow\quad \frac{v_{Al}}{v_{Cu}} = \frac{n_{Cu}}{n_{Al}} = 1{,}42;$$

---

7. Какова сила тока в цепи, если через поперечное сечение проводника в течение τ = 5 мин протекает заряд Q = $6\cdot10^3$ Кл?

Решение

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{6\cdot10^3}{300} = 20A;$$

---

8. Сколько электронов проходит через поперечное сечение проводника за время τ = 5 мс при силе тока I = 48 мкА?

Решение

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}; \quad \Rightarrow \quad \Delta Q = I\tau = 48\cdot10^{-6}\cdot5\cdot10^{-3} = 2{,}4\cdot10^{-7}\,\text{Кл};$$

$$N_e = \frac{\Delta Q}{e} \approx \frac{2{,}4\cdot10^{-7}}{1{,}6\cdot10^{-19}} \approx 1{,}5\cdot10^{12};$$

---

9. Определить плотность тока, если за время τ = 0,4 с через поперечное сечение S = 1,2 мм^2 прошло N_e = $6\cdot10^{18}$ электронов.

Решение

$$I = \frac{eN_e}{\tau}; \quad j = \frac{eN_e}{\tau S} \approx \frac{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot6\cdot10^{18}}{0{,}4\cdot1{,}2\cdot10^{-6}} \approx 2\cdot10^6\,\frac{A}{\text{м}^2};$$

---

10. Определить площадь поперечного сечения вольфрамовой проволоки реостата, обладающего сопротивлением R = 100 Ом при длине ℓ = 20 м.

Решение

$$R = \frac{\rho_R \ell}{S}; \quad S = \frac{\rho_R \ell}{R}; \quad \rho_R \approx 131{,}4\cdot10^{-8}\,\text{Ом}\cdot\text{м}; \quad S \approx \frac{131{,}4\cdot10^{-8}\cdot20}{100} \approx 1^{-4}\,\text{м}^2;$$

---

11. Как изменится сопротивление не изолированного проводника, если его сложить пополам, а затем плотно скрутить?

Решение

1. Поскольку:

$$R = \frac{\rho_R \ell}{S},$$

то складывание проводника пополам уменьшает его длину вдвое, а поперечное сечение увеличивает в два раза, в итоге сопротивление проводника уменьшится в 4 раза.

---

12. Как изменится сопротивление проводника, если его длину и поперечное сечение одновременно уменьшить в два раза? увеличить в два раза?

Решение

$$R_1 = \frac{\rho_R \ell}{S}; \quad R_2 \frac{\rho_R 2\ell}{2S}; \quad \Rightarrow \quad R_1 = R_2;$$

---

13. Каково сопротивление реостата с N = 80 витками никелинового провода диаметром d = 0,8 мм при диаметре одного витка D = 3 см?

Решение

$$\ell = 2\pi\frac{D}{2}N; \quad S = \frac{\pi d^2}{4}; \quad R = \frac{\rho_R \ell}{S} = \frac{4\rho_R DN}{d^2} \approx \frac{4\cdot 42\cdot 10^{-8}\cdot 3\cdot 10^{-2}\cdot 80}{64\cdot 10^{-8}} \approx 6{,}3\ \text{Ом};$$

---

14. Из двух отрезков проволоки из одного материала первый в 8 раз длиннее, а второй имеет вдвое большую площадь поперечного сечения. У какого из этих отрезков сопротивление меньше и во сколько раз?

Решение

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{\rho_R 8\ell}{S}; \\ R_2 &= \frac{\rho_R \ell}{2S}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{R_1}{R_2} = 16;$$

---

15. Проволоку, имеющую по всей длине одинаковую площадь сечения, разрезали на 5 равных частей, которые затем скрутили в плотный пучок. Сопротивление пучка оказалось равным R_1 = 1 Ом. Каково было сопротивление проволоки до расчленения?

Решение

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \rho_R\frac{\ell}{5}\frac{1}{5S}; \\ R_2 &= \frac{\rho_R \ell}{S}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{25}; \quad R_2 = 25R_1 = 25\ \text{Ом};$$

---

16. Определить площадь поперечного сечения S и длину проводника ℓ из алюминия, если его сопротивление R = 0,1 Ом, а масса m = 54 г.

Решение

1. Физические параметры алюминия:

$$\rho \approx 2{,}7\cdot 10^3\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad m = \rho\ell S; \quad \rho_R = 2{,}69\cdot 10^{-8}\,\text{Ом}\cdot\text{м};$$

2. Геометрические параметры провода:

$$R = \frac{\rho_R \ell}{S}; \quad S = \frac{m}{\rho\ell}; \quad \Rightarrow \quad \ell = \sqrt{\frac{Rm}{\rho_R\rho}} \approx \sqrt{\frac{0{,}1\cdot 54\cdot 10^{-3}}{2{,}7\cdot 10^{-8}\cdot 2{,}7\cdot 10^3}} \approx 8{,}6\text{м};$$

$$S = \frac{54\cdot 10^{-3}}{2{,}7\cdot 10^3\cdot 8{,}6} \approx 2{,}3\cdot 10^{-6}\,\text{м}^2;$$

---

17. Сколько метров провода сечением S_2 = 10 мм^2 нужно взять, чтобы его сопротивление было таки же, как и у проводника длиной ℓ_1 = 1 м с сечением S_1 = 0,5 мм^2 из такого же материала?

Решение

$$\frac{\rho_R \ell_2}{S_2} = \frac{\rho_R \ell_1}{S_1}; \quad \ell_2 S_1 = \ell_1 S_2; \quad \Rightarrow \quad \ell_2 = \frac{\ell_1 S_2}{S_1} = \frac{1 \cdot 10^{-5}}{5 \cdot 10^{-7}} = 20\text{м};$$

---

18. Какова масса никелинового провода сечением S = 0,2 мм^2, если его сопротивление R = 8 Ом?

Решение

1. Физические параметры никелина:

$$\rho \approx 8{,}5 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad \rho_R = 42 \cdot 10^{-8}\,\text{Ом} \cdot \text{м};$$

2. Масса проводника:

$$m = \rho V = \rho \ell S; \quad \ell = \frac{m}{\rho S}; \quad R = \frac{\rho_R \ell}{S}; \quad R = \frac{\rho_R m}{\rho S^2}; \quad m = \frac{\rho R S^2}{\rho_R};$$

$$m \approx \frac{8{,}5 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 10^{-14}}{42 \cdot 10^{-8}} \approx 6{,}5 \cdot 10^{-3}\text{кг};$$

---

19. Определить массу не изолированного медного провода, имеющего сопротивление R = 2,91 Ом и длину ℓ = 1 км.

Решение

1. Физические параметры меди:

$$\rho \approx 8{,}9 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad \rho_R = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\,\text{Ом} \cdot \text{м};$$

2. Масса проводника:

$$m = \rho V = \rho \ell S; \quad S = \frac{m}{\rho \ell}; \quad R = \frac{\rho_R \ell}{S}; \quad R = \frac{\rho_R \rho \ell^2}{m}; \quad m = \frac{\rho_R \rho \ell^2}{R};$$

$$m \approx \frac{1{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot 8{,}9 \cdot 10^3 \cdot 10^6}{2{,}91} \approx 52\text{кг};$$

---

20. Два куска стальной проволоки имеют одинаковую массу, а длина одного куска в ζ = 10 раз больше длины другого. Какой из кусков обладает большим сопротивлением? Во сколько раз?

Решение

1. Ввиду одинаковой массы проводников и $\ell_2 = 10\ell_1$:

$$\rho \ell_1 S_1 = \rho 10 \ell_1 S_2; \quad S_2 = 0{,}1 S_1;$$

2. Отношение сопротивлений проводников:

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{\rho_R \ell_1}{S_1}; \\ R_2 &= \frac{\rho_R 10 \ell_1}{0{,}1 S_1}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{R_2}{R_1} = 100;$$

---

21. Медный и алюминиевый проводники имеют одинаковые массы и сопротивления. Какой проводник и во сколько раз длиннее?

Решение

1. Физические характеристики металлов:

$$\rho_{Cu} \approx 9 \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3}; \quad \rho_{RCu} \approx 1{,}7 \cdot 10^{-8}\,Ом \cdot м;$$

$$\rho_{Al} \approx 2{,}7 \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3}; \quad \rho_{RAl} \approx 2{,}8 \cdot 10^{-8}\,Ом \cdot м;$$

2. Из условия одинаковости масс проводников:

$$m = \rho_{Cu}\ell_{Cu}S_{Cu}; \quad S_{Cu} = \frac{m}{\rho_{Cu}\ell_{Cu}}; \quad m = \rho_{Al}\ell_{Al}S_{Al}; \quad S_{Al} = \frac{m}{\rho_{Al}\ell_{Al}};$$

3. Из условия равенства сопротивления проводников:

$$\frac{\rho_{RCu}\rho_{Cu}\ell_{Cu}^2}{m} = \frac{\rho_{RAl}\rho_{Al}\ell_{Al}^2}{m}; \quad \Rightarrow \quad \frac{\ell_{Cu}}{\ell_{Al}} = \sqrt{\frac{\rho_{Al}\rho_{RAl}}{\rho_{Cu}\rho_{RCu}}} \approx \sqrt{\frac{2{,}7 \cdot 2{,}8}{9 \cdot 1{,}7}} \approx 0{,}7;$$

---

22. Два проводника – медный и алюминиевый – имеют одинаковую массу и диаметр. Какой проводник имеет большее сопротивление?

Решение

1. Физические характеристики металлов:

$$\rho_1 \approx 9 \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3}; \quad \xi_1 \approx 1{,}7 \cdot 10^{-8}\,Ом \cdot м;$$

$$\rho_2 \approx 2{,}7 \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3}; \quad \xi_2 \approx 2{,}8 \cdot 10^{-8}\,Ом \cdot м;$$

2. Из условия равенства диаметров проводников:

$$S = S_1 = \pi\frac{d^2}{4} = S_2;$$

3. Из условия равенства массы проводников:

$$\ell_1 = \frac{m}{\rho_1 S}; \quad \ell_2 = \frac{m}{\rho_2 S};$$

4. Отношение сопротивлений:

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{\xi_1\ell_1}{S} = \frac{\xi_1 m}{\rho_1 S^2}; \\ R_2 &= \frac{\xi_2\ell_2}{S} = \frac{\xi_2 m}{\rho_2 S^2}; \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{R_2}{R_1} = \frac{\xi_2\rho_1}{\xi_1\rho_2} \approx \frac{2{,}8 \cdot 9}{1{,}7 \cdot 2{,}7} \approx 5{,}49;$$

---

23. Разность потенциалов между концами медного проводника диаметром d и длиной ℓ равна U. Как изменится средняя скорость направленного движения электронов вдоль проводника, если удвоить: а) напряжение U; б) длину проводника ℓ; в) его диаметр d?

Решение

1. Средняя дрейфовая скорость электронов в проводнике:

$$I = envS; \quad v = \frac{I}{enS};$$

2. Закон Ома для участка цепи при значении удельного электрического сопротивления ξ, сопротивления R, площади поперечного сечения S, концентрации носителей свободных зарядов n и длине проводника ℓ:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{US}{\xi\ell}; \quad \Rightarrow \quad v = \frac{U}{en\xi\ell};$$

3. Из уравнения скорости следует что:

- при удвоении разности потенциалов дрейфовая скорость возрастёт вдвое;
- при удвоении длины проводника скорость уменьшится вдвое;
- при изменении сечения проводника, т.е. при удвоении площади его сечения скорость свободных носителей заряда не изменится, т.к. величина S в уравнение скорости не входит.

---

24. Проволока с диаметром d, удельным сопротивлением ξ и плотностью ρ имеет массу m. Получить формулу для расчёта электрического сопротивления проводника.

Решение

$$S = \frac{\pi d^2}{4}; \quad m = \rho\ell S; \quad \ell = \frac{4m}{\rho\pi d^2}; \quad R = \frac{\xi\ell}{s} = \frac{16\xi m}{\rho\pi^2 d^4};$$

---

25. Через стальной проводник длиной ℓ = 50 см пропускают ток силой I = 5 А. Разность потенциалов на концах проводника U = 1,2 В. Определить диаметр проводника.

Решение

1. Сопротивление проводника:

$$R = \frac{U}{I}; \quad \frac{4\xi\ell}{\pi d^2} = \frac{U}{I}; \quad d = \sqrt{\frac{4\xi\ell I}{\pi U}}; \quad \xi = 12\cdot 10^{-8}\,Ом\cdot м;$$

$$d = \sqrt{\frac{4\cdot 12\cdot 10^{-8}\cdot 0{,}5\cdot 5}{3{,}14\cdot 1{,}2}} \approx 5{,}6\cdot 10^{-4}\,м;$$

---

26. Какое напряжение нужно приложить к концам стального проводника длиной ℓ = 30 см и площадью поперечного сечения S = 1,5 мм^2, чтобы получить ток силой I = 10 А?

Решение

$$I = \frac{U}{R} = \frac{US}{\xi\ell}; \quad U = \frac{I\xi\ell}{S}; \quad \xi = 12\cdot 10^{-8}\,Ом\cdot м; \quad U = \frac{10\cdot 12\cdot 10^{-8}\cdot 0{,}3}{1{,}5\cdot 10^{-6}} \approx 0{,}24В;$$

---

27. Найти силу тока в стальном проводнике длиной ℓ = 10 м и сечением S = 2 мм^2, на который подано напряжение U = 12 мВ.

Решение

$$I = \frac{U}{R} = \frac{US}{\xi\ell} = \frac{12 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{12 \cdot 10^{-8} \cdot 10} \approx 0{,}02\text{A};$$

---

28. Электрический кипятильник рассчитан на напряжение U = 120 В при силе тока I = 4 А. Какой длины и поперечного сечения необходимо взять нихромовый провод для изготовления нагревательного элемента кипятильника, если допустимая плотность тока j = 10,2 А/мм^2, а удельное сопротивление нихрома ξ = 1,3·10^{-6} Ом·м?

Решение

1. Поперечное сечение проводника:

$$j = \frac{I}{S}; \quad \Rightarrow \quad S = \frac{I}{j} \approx 0{,}4\text{мм}^2;$$

2. Длина нихромового проводника:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\xi\ell}{S} = \frac{\xi\ell j}{I}; \quad \ell = \frac{U}{\xi j} \approx \frac{120}{10{,}2 \cdot 10^6 1{,}3 \cdot 10^{-6}} \approx 9\text{м};$$

---

29. Какова площадь поперечного сечения алюминиевого проводника, если при силе тока I = 1А напряжённость электрического поля внутри проводника составляет E = 0,02 В/м?

Решение

$$R = \frac{\xi\ell}{S} = \frac{U}{I}; \quad U = E\ell; \quad \frac{\xi}{S} = \frac{E}{I}; \quad S = \frac{\xi I}{E} \approx \frac{2{,}8 \cdot 10^{-8} \cdot 1}{0{,}02} \approx 1{,}4 \cdot 10^{-6}\text{м}^2;$$

---

30. Определить плотность тока в стальном проводнике длиной ℓ = 10 м, если провод находится под напряжением U = 6 В.

Решение

$$j = \frac{I}{S}; \quad R = \frac{\xi\ell}{S} = \frac{U}{I}; \quad \xi\ell I = SU; \quad j = \frac{I}{S} = \frac{U}{\xi\ell} \approx \frac{6}{12{,}8 \cdot 10^{-8} \cdot 10} \approx 4{,}7 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{м}^2};$$

---

31. Какое наибольшее напряжение можно приложить к катушке, имеющей N витков медного провода со средним диаметром витка d, если допустимая плотность тока j?

Решение

1. Длина проводника:

$$\ell = \pi dN;$$

2. Допустимое напряжение на концах проводника:

$$j = \frac{I}{S}; \quad jS = \frac{U}{R} = \frac{US}{\xi\ell}; \quad \Rightarrow \quad U = j\xi\ell = j\xi\pi dN;$$

---

32. Определить величину падения напряжения на полностью включённом реостате, выполненном из никелиновой проволоки длиной ℓ = 7,5 м, если плотность тока j = $1{,}5\cdot10^6$ А/м^2.

Решение

$$j=\frac{I}{S};\quad jS=\frac{U}{R}=\frac{US}{\xi\ell};\quad \Rightarrow\quad U=j\xi\ell\approx1{,}5\cdot10^6\cdot42\cdot10^{-8}\cdot7{,}5\approx4{,}7\ \text{В};$$

---

33. Можно ли включать в сеть с напряжением U = 220 В обмотку реостата, на котором написано: а) R_1 = 30 Ом, I_1 = 5 А; б) R_2 = 2000 Ом, I_2 = 0,2 А?

Решение

$$U_1=I_1R_1=150\text{В};\quad U>U_1;$$
$$U_2=I_2R_2=400\text{В};\quad U<U_1;$$

В первом случае включать реостат нельзя, во втором случае – можно.

---

34. От источника напряжения U_i = 45 В необходимо питать нагревательную спираль сопротивлением R_0 = 20 Ом, рассчитанную на напряжение U_0 =30 В. Имеются три реостата на которых написано: а) I_1 = 2 А, R_1 = 6 Ом; б) I_2 = 4А, R_2 = 30 Ом; в) I_3 = 0,6А, R_3 = 800 Ом. Какой из этих реостатов необходимо использовать для подключения спирали?

Решение

1. Падение напряжения на реостатах:

$$U_1=I_1R_1=12\text{В};\quad U_2=I_2R_2=120\text{В};\quad U_3=480\text{В};$$

2. Первый реостат не подходит, т.к. на нём будет падать маленькое напряжение. Третий реостат обеспечивает слишком большое падение напряжение, остаётся второй реостат.

3. При включении последовательно спирали и второго реостата имеем:

$$R_\Sigma=R_0+R_2=50\ \text{Ом};\quad I=\frac{U_1}{R_\Sigma}=0{,}9\text{А};\quad U_1^*=IR_2=27\text{В};\quad U_i-U_1^*=18\text{В};$$

---

35. До какой температуры нагревается электромагнит во время работы, если его медная обмотка при t_0 = 0 ^{0}С имеет сопротивление R_0 = 50 Ом, а во время работы увеличивается на ΔR = 8 Ом?

Решение

$$R=R_0(1+\alpha\Delta T);\quad \frac{R+\Delta R}{R_0}=1+\alpha\Delta T;\quad \Delta T=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{R+\Delta R}{R}-1\right);$$
$$\Delta T=\frac{1}{0{,}0043}\left(\frac{58}{50}-1\right)\approx37\ ^0\text{C};$$

---

36. На сколько градусов нужно повысить температуру медного проводника, взятого при t_0 = 0 ^{0}С, чтобы его сопротивление увеличилось в 3 раза?

Решение

$$\frac{R}{R_0}=3=1-\alpha\Delta T;\quad \Delta T=\frac{2}{\alpha}=\frac{2}{0{,}0043}\approx465\ \text{K};$$

37. Для измерения температуры применяется стальная проволока. При t_1 = 10 ^{0}C её сопротивление равно R_1 = 13,7 Ом, при некоторой другой температуре сопротивление R_2 = 18,2 Ом. Определить эту температуру.

Решение

1. Температурный коэффициент сопротивления стали $\alpha \cong 0{,}006\ \text{К}^{-1}$.
2. Сопротивление проволоки при t_0:

$$R_1 = R_0(1+\alpha\Delta T_1); \quad R_0 = \frac{R_1}{1+\alpha\Delta T_1} \approx 12{,}92\ \text{Ом};$$

3. Искомая температура:

$$\Delta T_x = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{R_2}{R_0} - 1\right) \approx 68\text{K};$$

---

38. Сопротивление медного провода при температуре t_1 = 15 ^{o}C равно R_1 = 58 Ом. Определить сопротивление провода при температуре t_2 = 30 ^{0}C.

Решение

1. Температурный коэффициент сопротивления меди $\alpha \cong 0{,}0043\ \text{К}^{-1}$.
2. Сопротивление проволоки при t_0:

$$R_1 = R_0(1+\alpha\Delta T_1); \quad R_0 = \frac{R_1}{1+\alpha\Delta T_1} \approx 54{,}5\ \text{Ом};$$

3. Сопротивление проволоки при температуре t_2:

$$R_2 = R_0(1+\alpha\Delta T_2) \approx 61{,}5\ \text{Ом};$$

---

39. Лампочка с вольфрамовой нитью при t_0 = 0 ^{0}C обладает сопротивлением R_0 = 1 Ом, а при температуре t_1 = 2000 ^{0}C сопротивление R_1 = 9,4 Ом. Определить температурный коэффициент сопротивления вольфрама.

Решение

$$R_1 = R_0(1+\alpha\Delta T); \quad \alpha = \frac{1}{\Delta T}\left(\frac{R_1}{R_0} - 1\right) = 4{,}3\cdot 10^{-4}\left(\frac{9{,}4}{1} - 1\right) \approx 0{,}0037\text{K}^{-1};$$

---

40. На лампочке карманного фонарика обозначено: U = 3,5 В, I = 0,28 А. Температура нити накала составляет t_1 = 425 ^{0}C, а её сопротивление в холодном состоянии R_0 = 4 Ом. Определить температурный коэффициент материала из которого сделана нить накала лампочки.

Решение

1. Сопротивление нити накала в холодном состоянии:

$$R_1 = U/I = 12{,}5\ \text{Ом};$$

2. Температурный коэффициент сопротивления материала нити накала:

$$\alpha = \frac{1}{\Delta T}\left(\frac{R_1}{R_0} - 1\right) = \frac{1}{425}\left(\frac{12{,}5}{4} - 1\right) \approx 0{,}005\text{K}^{-1};$$

---

41. По стальному проводу при температуре $t_0 = 0\ ^0C$ идёт ток силой $I_0 = 6{,}5$ мА, а при температуре $t_1 = 100\ ^0C$ сила тока становится равной $I_1 = 5$ мА. Определить температурный коэффициент сопротивления стали.

Решение

$$R_0 = \frac{U}{I_0};\quad R_1 = \frac{U}{I_1};\quad \frac{U}{I_1} = \frac{U}{I_0}(1+\alpha\Delta T);\quad \alpha = \frac{1}{\Delta T}\left(\frac{I_0}{I_1} - 1\right) \approx 0{,}003K^{-1};$$

---

42. При прохождении электрического тока по стальной проволоке её температура повысилась с $t_0 = 0\ ^0C$ до $t_1 = 250\ ^0C$, а сопротивление увеличилось в 2 раза. Определить температурный коэффициент сопротивления.

Решение

$$\alpha = \frac{1}{\Delta T}\left(\frac{R_1}{R_0} - 1\right) = \frac{1}{\Delta T}(2-1) = 0{,}004K^{-1};$$

---

43. При достаточно высокой температуре t проволока имеет сопротивление R, плотность ρ и площадь поперечного сечения S. При температуре $t_0 = 0\ ^0C$ удельное сопротивление проволоки ξ_0. Чему равна масса проволоки?

Решение

1. Длина проводника:

$$m = \rho\ell S;\quad \Rightarrow\quad \ell = \frac{m}{\rho S};$$

2. Сопротивление проводника при высокой температуре:

$$R = R_0(1+\alpha\Delta T);\quad R_0 = \frac{\xi_0\ell}{S} = \frac{\xi_0 m}{\rho S^2};\quad R = \frac{\xi_0 m}{\rho S^2}(1+\alpha\Delta T);$$

3. Масса проволоки:

$$m = \frac{R\rho S^2}{\xi_0(1+\alpha\Delta T)};$$

---

44. Константановая проволока, предназначенная для изготовления термопар, имеет массу m = 89 г и сечение S = 0,1 мм^2. Определить сопротивление проволоки при температуре $t_1 = 100\ ^0C$.

Решение

1. Электрические характеристики константана:

$$\rho = 8{,}88\cdot 10^3\,\frac{кг}{м^3};\quad \xi = 48\cdot 10^{-8}\,Ом\cdot м;\quad \alpha = 2\cdot 10^{-4}K^{-1};$$

2. Длина проволоки:

$$\ell = \frac{m}{\rho S};$$

3. Сопротивление холодной проволоки:

$$R_0 = \frac{\xi \ell}{S} = \frac{\xi m}{\rho S^2} \approx \frac{48 \cdot 10^{-8} \cdot 8{,}9 \cdot 10^{-2}}{8{,}88 \cdot 10^3 \cdot 10^{-14}} \approx 481\,\text{Ом};$$

4. Сопротивление нагретой до температуры t_1 проволоки:

$$R_1 = R_0(1 + \alpha \Delta T) \approx 481(1 + 2 \cdot 10^{-4} \cdot 100) \approx 490\ \text{Ом};$$

---

45. Сила тока в вольфрамовой нити накала лампы I = 0,2 А. Диаметр нити d = 0,02 мм, температура в рабочем состоянии t_1 = 2000 ^{0}С. Определить напряжённость электрического поля в нити.

Решение

1. Физические параметры вольфрама:

$$\xi = 5{,}5 \cdot 10^{-8}\,\text{Ом} \cdot \text{м}; \quad \alpha = 0{,}0048\text{К}^{-1}; \quad \rho = 18{,}8 \cdot 10^3\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

2. Сечение нити накала и плотность тока:

$$S = \pi \frac{d^2}{4};$$

3. Сопротивление нити в рабочем состоянии:

$$R = \frac{U}{I} = R_0(1 + \alpha \Delta T); \quad \frac{U}{I} = \frac{\xi \ell}{S}(1 + \alpha \Delta T); \quad US = I\xi \ell(1 + \alpha \Delta T);$$

4. Напряжённость электрического поля в нити накала:

$$E = \frac{U}{\ell} = \frac{I\xi}{S}(1 + \alpha \Delta T) = \frac{4I\xi}{\pi d^2}(1 + \alpha \Delta T) \approx \frac{4 \cdot 0{,}2 \cdot 5{,}5 \cdot 10^{-8}}{3{,}14 \cdot 4 \cdot 10^{-10}}(1 + 4{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^3) \approx 371\,\frac{\text{В}}{\text{м}};$$

---

46. Стальной проводник диаметром d = 0,1 мм подключён к источнику постоянного тока. По проводнику течёт ток силой I = 0,4 А. Температура проводника изменяется от 0 ^{0}С до 100 ^{0}С. На сколько изменится напряжённость электрического поля внутри проводника при его нагревании, если силу тока считать постоянной?

Решение

1. Физические параметры стали:

$$\xi = 12 \cdot 10^{-8}\,\text{Ом} \cdot \text{м}; \quad \alpha = 6 \cdot 10^{-3}\,\text{К}^{-1};$$

2. Сечение нити накала и плотность тока:

$$S = \pi \frac{d^2}{4};$$

3. Сопротивление проводника:

$$R = \frac{U}{I} = R_0(1 + \alpha \Delta T); \quad \frac{U}{I} = \frac{\xi \ell}{S}(1 + \alpha \Delta T); \quad US = I\xi \ell(1 + \alpha \Delta T);$$

4. Напряжённость электрического поля в проводнике:

$$E_1 = \frac{U}{\ell} = \frac{I\xi}{S} = \frac{4I\xi}{\pi d^2}; \quad E_2 = \frac{4I\xi}{\pi d^2}(1 + \alpha \Delta T);$$

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{4I\xi}{\pi d^2}\alpha \Delta T \approx \frac{4 \cdot 0{,}4 \cdot 12 \cdot 10^{-8} \cdot 6 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2}{3{,}14 \cdot 1 \cdot 10^{-8}} \approx 3{,}66\,\frac{\text{В}}{\text{м}};$$

---

47. Определить температуру вольфрамовой нити лампочки, если при включении в сеть напряжением U = 220 В по ней течёт ток силой I = 0,68 А. Сопротивление нити при t_0 = 20 ^{0}C равно R_0 = 36 Ом.

Решение

1. Характеристики вольфрама:

$$\xi = 5{,}5\cdot 10^{-8}\,\text{Ом}\cdot\text{м};\quad \alpha = 4{,}8\cdot 10^{-3}\,\text{К}^{-1};$$

2. Сопротивление нити в рабочем состоянии:

$$R_1 = \frac{U}{I};\quad \frac{U}{I} = R_0(1+\alpha\Delta T);\quad \Rightarrow\quad \Delta T = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{U}{IR_0} - 1\right);$$

$$\Delta T \approx \frac{1}{4{,}8\cdot 10^{-3}}\left(\frac{220}{0{,}68\cdot 36} - 1\right) \approx 1663\text{K};\quad t = 1936\ {}^0\text{C};$$

---

48. Вольфрамовая нить накала электролампы имеет длину ℓ и сопротивление R_1 при температуре t_1. Чему равен диаметр нити?

Решение

$$R_1 = \frac{4\xi\ell}{\pi d^2}(1+\alpha\Delta T);\quad \Rightarrow\quad d = \sqrt{\frac{4\xi\ell(1+\alpha\Delta T)}{\pi R_1}};$$

---

49. Реостат из стальной проволоки и миллиамперметр включены последовательно. При температуре t_0 = 0 ^{0}C сопротивление реостата R_R = 200 Ом, а миллиамперметра R_A = 20 Ом, показание силы тока I_0 = 30 мА. Какой станет величина силы тока при нагревании реостата до температуры t_1 = 50 ^{0}C?

Решение

1. Сопротивление реостата в нагретом состоянии

$$R_R^* = R_R(1+\alpha\Delta T);$$

2. Напряжение источника:

$$U = I_0(R_A + R_R);$$

3. Сила тока в рабочем состоянии реостата при температуре t_1:

$$I_1 = \frac{U}{R_R^*} = \frac{I_0(R_A+R_R)}{R_R(1+\alpha\Delta T)} \approx 0{,}0236\ \text{А};$$

---

50. На катушку намотан круглый провод диаметром d Масса провода m . На катушку подано напряжение U. Плотность материала проводника ρ, удельное электрическое сопротивление ξ, температурный коэффициент сопротивления α. Определить силу тока, текущего по поводу, если он нагрелся до T = 393 К.

Решение

1. Длина провода, намотанного на катушку:

$$m = \rho\ell S = \rho\ell\frac{\pi d^2}{4};\quad \ell = \frac{4m}{\rho\pi d^2};$$

2. Сопротивление проводника при нагревании:

$$R_1 = \frac{16\xi m}{\rho\pi^2 d^4}(1+\alpha\Delta T);$$

3. Сила тока, протекающего по проводнику:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{\rho\pi^2 d^4 U}{16\xi m(1+\alpha\Delta T)};$$

---

51. Каково сопротивление реостата и лампочки, если наибольшее значение силы тока в цепи I_{max} = 2,5 А, а наименьшее – I_{min} = 1,5 А? Напряжение, подаваемое на схему равно U = 12 В.

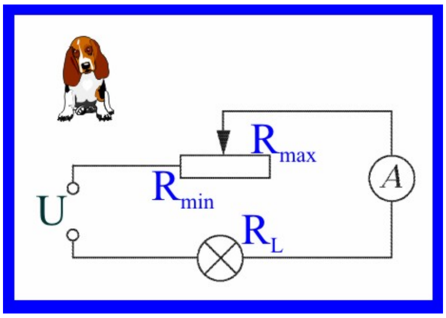


Рис. 51. Реостат и лампочка

Решение

1. В соответствии с законом Ома для участка цепи:

$$\Re_{min} = R_{min} + R_L = \frac{12}{1,5} = 8\ \text{Ом};$$

$$\Re_{max} = R_{max} + R_L = \frac{12}{2,5} = 4,8\ \text{Ом};$$

---

52. На реостат подаётся напряжение U = 20 В. Подвижный контакт реостата делит его проводник в отношении длин провода 1:3. Какое напряжение показывает вольтметр? В каких положениях контакта вольтметр покажет U_1 = 20 В и U_2 = 0 В?

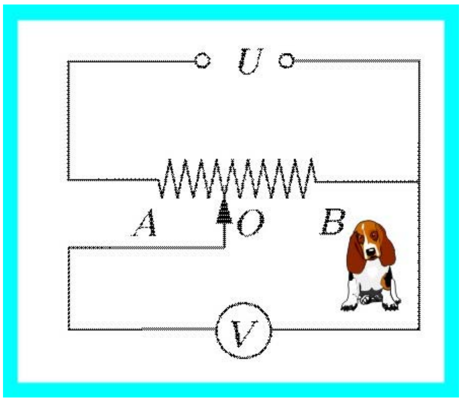


Рис. 52. Делитель напряжения

Решение

1. Представим реостат состоящим из 4 последовательно соединённых сопротивлений, на каждом из которых падает напряжение:

$$U_1 = \frac{U}{4} = 5\ \text{В};$$

2. На участке реостата OB, состоящем из трёх условных единиц, сопротивления будет падать $U_{OB} = 3U_1 = 15$ В.

3. Вольтметр будет показывать напряжение источника U =20 В в положении движка реостата A, в положении B показания будут нулевыми.

---

53. Последовательно соединённые реостат и резистор R питаются от источника постоянного напряжения. Какое сопротивление R_1 реостата надо ввести на участке цепи, чтобы сила тока уменьшилась в n раз по сравнению с силой тока , когда сопротивление реостата было равно нулю?

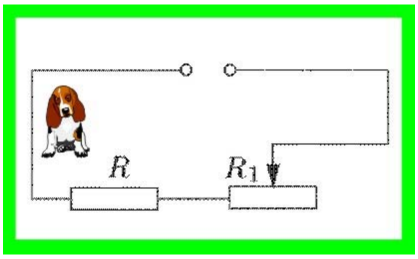


Рис. 53. Изменение сопротивления

Решение

$$\left.\begin{aligned} I&=\frac{U}{R};\\ \frac{I}{n}&=\frac{U}{R+R_1};\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned} U&=IR;\\ \frac{I}{n}&=\frac{IR}{R+R_1}\end{aligned}\right\}\ \Rightarrow\ R+R_1=nR;\quad R_1=R(n-1);$$

---

54. Определить эквивалентное сопротивление цепей при условии $R_1 = R_2 = R_3 = 1$ Ом.

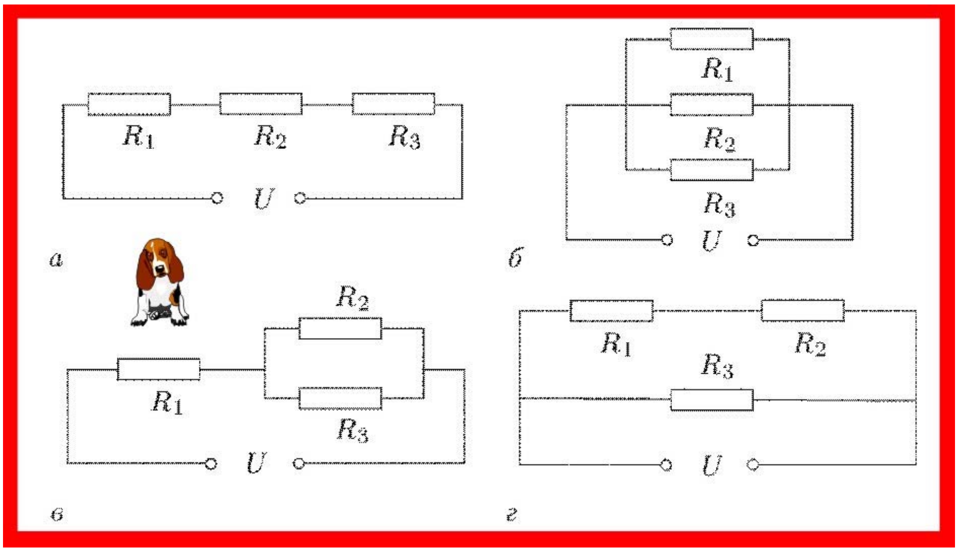


Рис. 54. Сопротивление цепей

Решение

а) $R_0 = R_1 + R_2 + R_3 = 3$ Ом;

б) $\dfrac{1}{R_0} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} = \dfrac{R_3 + R_2 + R_1}{R_1 R_2 R_3}; \quad R_0 = \dfrac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \approx 0{,}33$ Ом;

в) $R_0 = R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 1 + \dfrac{1}{2} = 1{,}5$ Ом;

г) $R_0 = \dfrac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \dfrac{2}{3} \approx 0{,}67$ Ом;

---

55. Определить эквивалентные сопротивления цепей, если: $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 80$ Ом, $R_3 = 30$ Ом, $R_4 = 70$ Ом.

Решение

а) $R_0 = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \dfrac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \dfrac{1600}{100} + \dfrac{2100}{100} = 37$ Ом;

б) $R_0 = \dfrac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \dfrac{100 \cdot 100}{200} = 50$ Ом;

в) $R_0 = \dfrac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_1 + R_3 R_1} + R_4 = \dfrac{48000}{1600 + 2400 + 1400} + 70 \approx 80$ Ом π

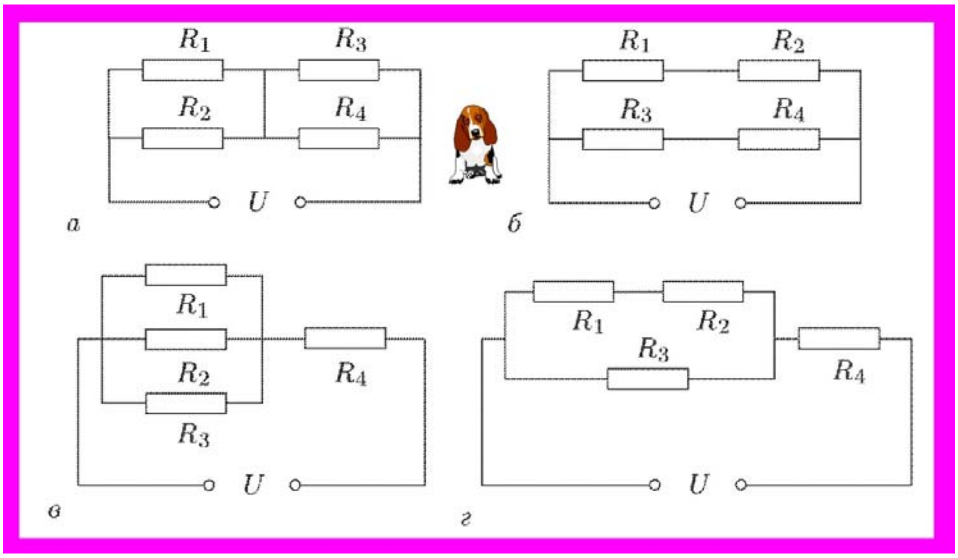


Рис. 55. Эквивалентные сопротивления цепей

г) $R_0 = \frac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_4 = \frac{3000}{130} + 70 = 93\,\text{Ом}$;

---

56. Определить общее сопротивление цепи R_0, если она составлена из двенадцати одинаковых резисторов R = 1 Ом.

Решение

1. В данном случае применять непосредственно уравнения для последовательного и параллельного включения резисторов не представляется возможным, однако симметрия схемы относительно точки О даёт основание считать, что ток через неё не течёт.

2. Точку О можно разорвать, представив её двумя точками О и О*, что даёт возможность выделить параллельные и последовательные включения резисторов:

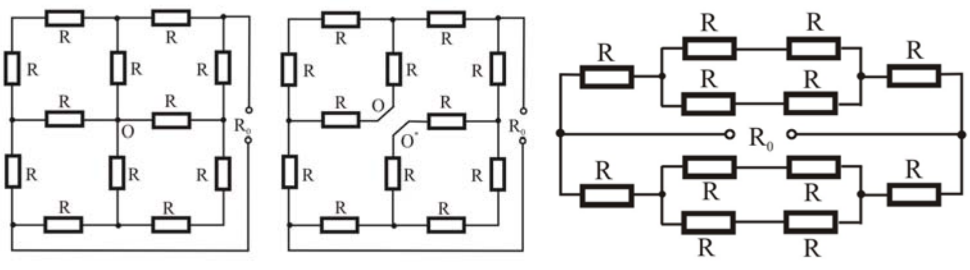


Рис. 56. Симметричная цепь и способ ее преобразования

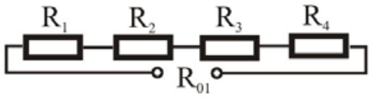
3. Общее сопротивление, таким образом, определится как

$$R_0 = \frac{3R \cdot 3R}{3R + 3R} = \frac{3}{2}R = 1{,}5\,\text{Ом}.$$

---

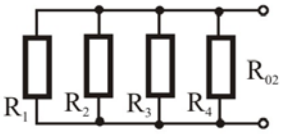
57. Имеется четыре одинаковых резистора сопротивлением R = 1 Ом каждый. Какие магазины сопротивлений можно получить, включая одновременно все резисторы?

Решение



1. Пусть все сопротивления включены последовательно друг другу

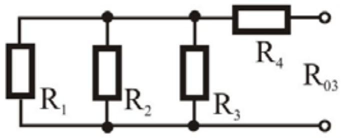
$$R_{01} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 4\,\text{Ом}.$$



2. При параллельном включении всех сопротивлений

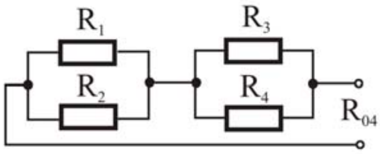
$$\frac{1}{R_{02}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4},$$

$$R_{02} = R/4 = 0{,}25\,\text{Ом}.$$



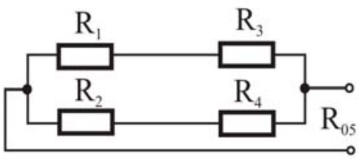
3. Пусть три резистора будут включены параллельно, а один последовательно им

$$R_{03} = R + \frac{R}{3} \cong 1{,}33\,\text{Ом}.$$



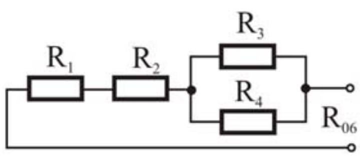
4. Представим далее магазин в виде последовательного соединения двух параллельных сопротивлений

$$R_{04} = \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = 1\,\text{Ом}.$$



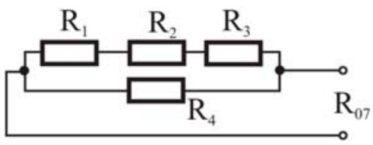
5. Рассмотрим вариант параллельного включения двух пар последовательных соединений

$$R_{05} = \frac{2R \cdot 2R}{2R + 2R} = R = 1\,\text{Ом}.$$



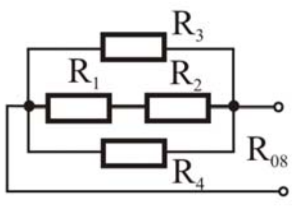
6. Включим два сопротивления параллельно и последовательно с ними остальные два сопротивления

$$R_{06} = 2R + \frac{R}{2} = 2{,}5R = 2{,}5\,\text{Ом}.$$



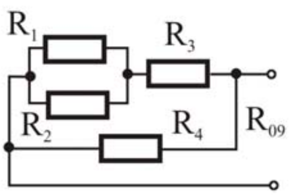
7. Пусть три сопротивления будут включены последовательно, а одно параллельно им

$$R_{07} = \frac{3R \cdot R}{3R + R} = \frac{3}{4}R = 0{,}75\,\text{Ом}.$$



8. Далее к двум последовательно включенным сопротивлениям подсоединим два параллельных сопротивления

$$R_{08} = \frac{0{,}5R \cdot 2R}{0{,}5R + 2R} = 0{,}4R = 0{,}4\,\text{Ом}.$$



9. Последний возможный вариант будет представлять собой комбинацию двух параллельных сопротивлений с последующим включением последовательно им одного сопротивления и параллельным включением четвёртого

$$R_{09} = \frac{(0{,}5R + R)R}{0{,}5R + 2R} = \frac{3}{5}R = 0{,}6\,\text{Ом}.$$

58. Какой шунт нужно присоединить к гальванометру, имеющему шкалу на N = 100 делений с ценой деления i = 1 мкА и внутренним сопротивлением r_A = 180 Ом, чтобы им можно было измерять ток силой до I = 1 мА?

Решение

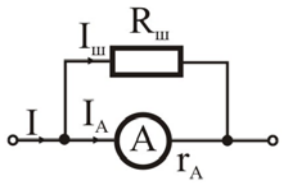


Рис. 58. Схема шунта

1. Определим силу тока, соответствующую отклонению стрелки на полную шкалу

$$I_A = iN = 1\cdot 10^{-6}\cdot 100 = 1\cdot 10^{-4}\,A.$$

2. Определим сопротивление шунта с учётом того, что измеряемый ток I разветвляется на токи $I_ш$ и I_A, которые обратно пропорциональны соответствующим сопротивлениям

$$R_ш(I - I_A) = I_A r_A, \Rightarrow R_ш = \frac{I_A r_A}{I - I_A} = \frac{10^{-4}\cdot 180}{10^{-3} - 10^{-4}} = 20\,Ом.$$

---

59. Вольтметр включён как показано на схеме и показывает U_V = 36 В. Определите отношение силы тока, идущего через измерительную катушку вольтметра I_V и сопротивление R_2 = 6 кОм. Что покажет вольтметр, если сопротивления уменьшить в 1000 раз, т.е. до R_1 = 4 Ом и R_2 = 6 Ом?

Решение

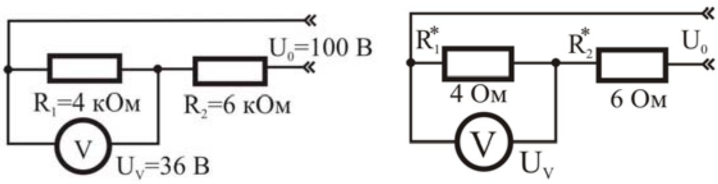


Рис. 59. Варианты включения вольтметра

1. Определим силу тока через резистор R_1

$$I_1 = \frac{U_V}{R_1} = \frac{36}{4\cdot 10^3} = 9\,мА.$$

2. Падение напряжения на резисторе R_2 будет составлять

$$U_2 = U_0 - U_V = 64\,В,$$

ток через этот резистор

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{64}{6\cdot 10^3} \cong 10{,}7\,мА.$$

3. Сила тока, протекающего через измерительную катушку вольтметра

$$I_V = I_2 - I_1 = 1{,}7\,мА,$$

4. Определим искомое отношение сил токов

$$\frac{I_V}{I_2} = \frac{1{,}7}{10{,}7} \cong 0{,}159.$$

5. Определим внутреннее сопротивление вольтметра

$$R_V = \frac{R_1\cdot I_2}{I_V} = \frac{4\cdot 10^3}{0{,}159} \cong 25{,}1\,кОм$$

6. Найдём общее сопротивление вольтметра и сопротивления R_1^*

$$R_3 = \frac{R_1^* \cdot R_V}{R_1^* + R_V} \cong \frac{4 \cdot 25}{29} \cong 3{,}45\,\text{Ом}.$$

7. Общее сопротивление цепи

$$R_0 = R_3 + R_2^* = 9{,}5\,\text{Ом}.$$

8. Суммарная сила тока

$$I_0 = \frac{U_0}{R_0} \cong \frac{100}{9{,}5} \cong 10{,}5\,\text{А}.$$

9. Найдём далее падение напряжения на сопротивлении R_2^*

$$U_2 = I_0 R_2^* = 10{,}5 \cdot 6 = 63\,\text{В}.$$

10. Падение напряжения на вольтметре

$$U_V = U_0 - U_2 = 100 - 63 = 37\,\text{В}.$$

---

60. Чему равна разность потенциалов между клеммами U_x в схеме, если сопротивления равны: R_1 = 2 Ом, R_2 = 8 Ом, R_3 = 8 Ом, R_4 = 2 Ом, а U_0 = 80 В.

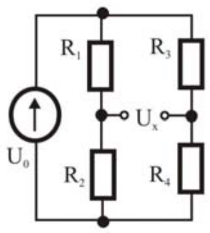


Рис. 60. Цепь с источником тока

Решение

1. Определим общее сопротивление цепи

$$R_0 = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{(R_1 + R_2) + (R_3 + R_4)} = \frac{100}{20} = 5\,\text{Ом}.$$

2. Ток потребляемой всеми сопротивлениями от источника

$$I_0 = \frac{U_0}{R_0} = 16\,\text{А},$$

поскольку сопротивление цепочек R_1, R_2 и R_3,R_4 одинаковы, то через них текут одинаковые по величине токи $I_{1,2} = I_{3,4} = I_0/2 = 8$ А.

3. Определим падение напряжения на сопротивлениях R_1 и R_3

$$U_1 = I_{1,2} \cdot R_1 = 16\,\text{В}, \quad U_3 = I_{1,2} \cdot R_3 = 64\,\text{В}.$$

4. Искомая разность потенциалов U_x

$$U_x = U_3 - U_1 = 48\,\text{В}.$$

---

61. Какой шунт нужно присоединить к гальванометру, имеющему шкалу на N = 100 делений с ценой деления i = 1 мкА и внутренним сопротивлением r = 180 Ом, чтобы им можно было измерить ток I_0 = 1 мА?

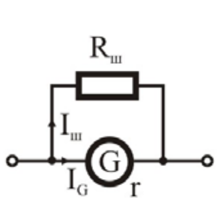


Рис. 11.31. Шунт

Решение

1. Определим предельную силу тока, на которую рассчитана измерительная головка прибора

$$I_G = iN = 1 \cdot 10^{-6} \cdot 100 = 1 \cdot 10^{-4}\,\text{А}.$$

2. Поскольку шунт и гальванометр включены параллельно, то на них будет одинаковое падение напряжения, а для токов можно записать следующие соотношения

$$I_0 = I_G + I_Ш, \Rightarrow I_Ш = I_0 - I_G = 10^{-3} - 10^{-4} = 9 \cdot 10^{-4}\,\text{А}.$$

3. Определим далее падение напряжения на гальванометре и шунте

$$U_G = I_G r = 10^{-4} \cdot 180 = 0{,}018\,\text{В}.$$

4. Сопротивление шунта

$$R_Ш = \frac{U_G}{I_Ш} = \frac{0{,}018}{9 \cdot 10^{-4}} = 20\,\text{Ом}.$$

---

62. Амперметр с внутренним сопротивлением r = 0,1 Ом предназначен для измерения силы тока до I_A = 1 А. Каким образом этим прибором можно измерить силу тока I_0 = 100 А?

Решение

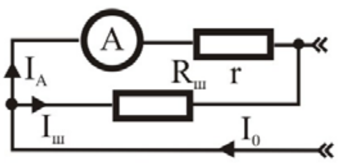


Рис. 62. Измерение тока

1. Расширение пределов измерения амперметров достигается включением параллельно измерительной головки прибора сопротивления – шунта $R_ш$, так чтобы измеряемый ток разветвлялся

$$I_0 = I_A + I_ш.$$

2. Представим измеряемый ток в следующем виде

$$I = nI_A,$$

где $n = I_0/I_A = 100$, в этом случае

$$I_ш = I_0 - I_A = I_A(n-1).$$

3. Поскольку шунт с амперметром включаются параллельно, то падение напряжения на шунте и амперметре одинаковы $I_A R_A = I_ш R_ш$, поэтому

$$R_ш = \frac{r}{n-1} = \frac{0{,}1}{99} \cong 0.001\,\text{Ом}.$$

---

63. Три одинаковых графитовых кольца радиусом r = 1 м и диаметром d = 1 см имеют электрический контакт в точках A,B,C,D,F,E. Определить сопротивление фигуры при включении её в точках A и B.

Решение

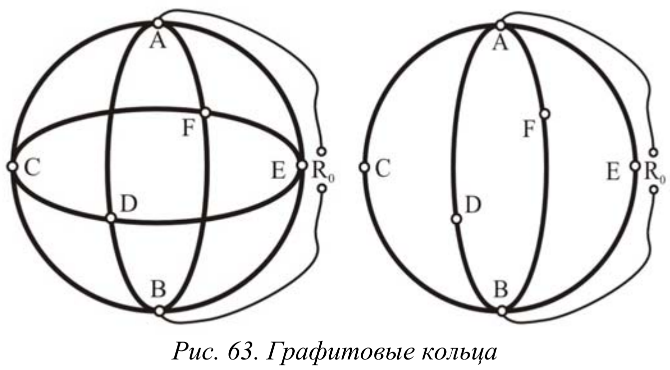


Рис. 63. Графитовые кольца

1. В силу одинаковости геометрических размеров и симметричности включения точки C,D,E,F при подключении к источнику напряжения будут иметь одинаковые потенциалы, т.е. $\varphi_C = \varphi_D = \varphi_E = \varphi_F$. Это значит, что через элементы кольца C,D,E,F ток течь не будет. Схему можно преобразовать к системе, состоящей из параллельно включенных полуколец: A,D,B; A,F,B; A,C,B; A,FB и A,E,B.

2. Определим сопротивление одного полукольца с учётом того что удельное электрическое сопротивление графита $\rho \cong 1 \cdot 10^{-5}$ Ом·м.

$$R_1 = \rho \frac{4r}{d^2} \cong 10^{-5} \frac{4 \cdot 1}{10^{-4}} = 0{,}4\,\text{Ом}.$$

3. Определим далее сопротивление четырёх параллельно включенных одинаковых колец

$$R_0 = \frac{R_1}{4} = 0{,}1\,Ом\,.$$

---

64. Имеется воздушный конденсатор с плоскими пластинами площадью s =100 см^2 и зазором между ними d = 2,5 см. Пространство между пластинами ионизируется рентгеновскими лучами, так что в секунду образуется N = 10^{10} пар ионов. На пластины конденсатора подаётся постоянное напряжение U_0 = 2 кВ. В измерительную схему включены сопротивления R_1 = R_2 = 10^{10} Ом. Ток, какой силы потечёт через измерительный прибор, включенный в цепь источника питания?

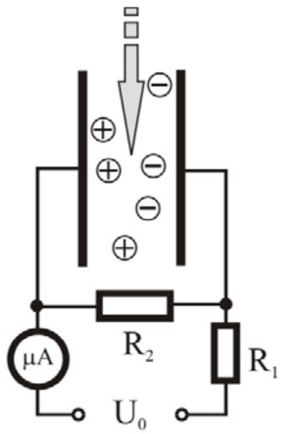


Рис. 64. Образование пар ионов

Решение

1. Возникновение носителей заряда вследствие ионизации электрически нейтральных молекул воздуха вызовет электрический ток, сила которого будет пропорциональна величине заряда, их количеству и объёму конденсатора

$$i_C = NeV_C\,,$$

где e ≅ 1,6·10^{-19} Кл – заряд одного иона, N – число пар ионов образующихся в одну секунду в единице объёма конденсатора.

2. Выразим напряжение источника U_0 в виде суммы падений напряжений на сопротивлениях

$$U_0 = U_{R_1} + U_{R_2} = I_{R_1}R_1 + I_{R_2}R_2\,.$$

3. Сила тока через сопротивление R_1 должна быть равна сумме сил токов через сопротивление R_2 и конденсатор, т.е.

$$I_{R_1} = I_{R_2} + i_C\,.$$

4. Образуем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} U_0 &= I_{R_1}R_1 + I_{R_2}R_2, \\ I_{R_1} &= I_{R_2} + i_C \end{aligned}\right\}.$$

Сила тока через микроамперметр будет равна силе тока через сопротивление R_1, поэтому выразим из первого уравнения системы (4) силу тока I_{R2} и подставим во второе уравнение

$$I_{R_2} = \frac{U_0 - I_{R_1}R_1}{R_2}, \Rightarrow I_{R_1} = \frac{U_0 - I_{R_1}R_1}{R_2} + i_C,$$

$$I_{R_1}R_2 = U_0 - I_{R_1}R_1 + i_C R_2\,,$$

$$I_{R_1}(R_2 + R_1) = U_0 + NeV_C\,,$$

$$I_{R_1} = I_{\mu A} = \frac{U_0 + NeV_C}{R_1 + R_2} \cong \frac{2\cdot 10^3 + 10^{10}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 2{,}5\cdot 10^{-4}}{2\cdot 10^{10}} \cong 1\cdot 10^{-7}\,A\,.$$

---

6. Закон Ома

65. Элемент с ε = 1,5 В и внутренним сопротивлением r = 0,5 Ом замкнут проводником, обладающим сопротивлением R = 3,5 Ом. Найти силу тока в цепи и падение напряжения на элементах схемы.

Решение

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} = \frac{1,5}{4} = 0,375А; \quad U_R = IR \approx 1,31В; \quad U_r = Ir = \varepsilon - U_R \approx 0,19В;$$

---

66. Какую работу совершает ЭДС источника тока при перемещении N = $5\cdot10^{18}$ электронов на участке цепи с разностью потенциалов $\Delta\varphi$ = 20 В?

Решение

$$A = Q\Delta\varphi = eN\Delta\varphi \approx 1,6\cdot10^{-19}\cdot5\cdot10^{18}\cdot20 \approx 16Дж;$$

---

67. Электродвижущая сила источников ε = 6 В. При внешнем сопротивлении цепи R = 1 Ом сила тока равна I = 3 А. Определить силу тока короткого замыкания.

Решение

1. Внутреннее сопротивление источников:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}; \quad IR + Ir = \varepsilon; \quad r = \frac{\varepsilon - IR}{I};$$

2. Сила тока короткого замыкания:

$$I_m = \frac{\varepsilon}{r} = \frac{\varepsilon I}{\varepsilon - IR} = \frac{18}{3} = 6А;$$

---

68. Внутреннее сопротивление аккумулятора r = 0,02 Ом, напряжение на зажимах U = 1,1 В, сила разрядного тока I = 7,5 А. Определить ЭДС аккумулятора.

Решение

$$U = \varepsilon - Ir; \quad \varepsilon = U + Ir = 1,1 + 7,5\cdot0,02 = 1,25 В;$$

---

69. ЭДС аккумулятора ε = 2 В, напряжение на зажимах U = 1,84 В при силе тока в цепи I = 2А. Определить внутренне сопротивление источника и внешнее сопротивление цепи.

Решение

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon = IR + Ir; \\ &R = \frac{U}{I}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &r = \frac{\varepsilon - IR}{I} = \frac{2 - 2\cdot0,92}{2} = 0,08 Ом; \\ &R = 0,92Ом; \end{aligned}\right\}$$

---

70. Два резистора сопротивлением R_1 = 6 Ом и R_2 = 9 Ом соединены параллельно и подключены к батарее с ε = 2 В с внутренним сопротивлением r = 0,4 Ом. Определить силу тока в цепи.

Решение

$$R_0 = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = 3{,}6\ \text{Ом};\quad I = \frac{\varepsilon}{R+r} = \frac{2}{3{,}6+0{,}4} = 0{,}2\text{А};$$

---

71. Два проводника сопротивлением R_1 = 2 Ом и R_2 = 3 Ом соединены между собой последовательно и подключены к батарее с ε = 12 В. Найти внутреннее сопротивление батареи при силе тока в цепи I = 2 А.

Решение

1. Общее сопротивление резисторов:

$$R_O = R_1 + R_2;$$

2. Из закона Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_O + r};\quad \Rightarrow\quad IR_O + Ir = \varepsilon;\quad r = \frac{\varepsilon - IR_O}{I} = \frac{12 - 2\cdot 5}{2} = 1\ \text{Ом};$$

---

72. Внутреннее сопротивление элемента в 5 раз меньше сопротивления внешней нагрузки элемента с ЭДС ε = 10 В. Определить, на сколько напряжение на зажимах элемента отличается от его ЭДС.

Решение

$$\frac{U}{R} = \frac{\varepsilon}{R + \frac{R}{5}};\quad \Rightarrow\quad \frac{U}{\varepsilon} = \frac{R}{\frac{6}{5}R};\quad \frac{\varepsilon}{U} = 1{,}2;$$

---

73. При подключении к батарее гальванических элементов нагрузки R_1 = 16 Ом сила тока в цепи была I_1 = 1 А, а при подключении R_2 = 8 Ом сила тока стала I_2 = 1,8 А. Найти ЭДС и внутреннее сопротивление батареи.

Решение

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{\varepsilon}{R_1 + r};\\ I_2 &= \frac{\varepsilon}{R_2 + r}; \end{aligned}\right\}\ \Rightarrow\ \left.\begin{aligned} \varepsilon &= I_1R_1 + I_1r;\\ I_2 &= \frac{I_1R_1 + I_1r}{R_2 + r}; \end{aligned}\right\}\ \Rightarrow\ r = \frac{I_1R_1 - I_2R_2}{I_2 - I_1} = 2\ \text{Ом};\quad \varepsilon = 18\ \text{В};$$

---

74. К аккумулятору подключают сначала сопротивление R_1 = 1 Ом, а затем R_2 = 2,5 Ом. При этом сила тока в цепи уменьшалась в 2 раза. Определить величину внутреннего сопротивления аккумулятора.

Решение

$$\left.\begin{aligned} I &= \frac{\varepsilon}{R_1 + r};\\ \frac{I}{2} &= \frac{\varepsilon}{R_2 + r}; \end{aligned}\right\}\ \Rightarrow\ 2 = \frac{R_2 + r}{R_1 + r};\quad 2R_1 + 2r = R_2 + r;\quad r = R_2 - 2R_1 = 0{,}5\ \text{Ом};$$

---

75. При внешнем сопротивлении R_1 = 3 Ом сила тока в цепи I_1 = 0,3 А, а при сопротивлении R_2 = 5 Ом – I_2 = 0,2 А. Определить силу тока короткого замыкания аккумуляторной батареи.

Решение

1. Внутреннее сопротивление аккумулятора:

$$\left.\begin{aligned} I = \frac{\varepsilon}{R_1 + r}; \\ 1{,}5I = \frac{\varepsilon}{R_2 + r}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad 1{,}5 = \frac{R_2 + r}{R_1 + r}; \quad 2R_1 + 2r = R_2 + r; \quad r = R_2 - 1{,}5R_1 = 0{,}5\ \text{Ом};$$

2. ЭДС аккумулятора:

$$\varepsilon = I_1(R_1 + r) = 16{,}5\ \text{В};$$

3. Ток короткого замыкания:

$$I_{max} = \frac{\varepsilon}{r} = 33\text{А};$$

---

76. Генератор имеет внутреннее сопротивление r = 0,8 Ом; в его внешнюю цепь включены N = 100 ламп параллельно, сопротивление каждой рапы R = 320 Ом. Каждая лампа находится под напряжением U = 120 В. Определить ЭДС генератора.

Решение

1. Сопротивление внешней нагрузки:

$$R_O = \frac{R}{N} = 3{,}2\ \text{Ом};$$

2. ЭДС генератора:

$$\varepsilon = \frac{U}{R_O}(R_O + r) = \frac{120}{3{,}2}(3{,}2 + 0{,}8) = 150\ \text{В};$$

---

77. Ток в цепи батареи с ε = 30 В, I = 3 А. Напряжение на зажимах батареи U = 18 В. Определить сопротивление внешней цепи и внутреннее сопротивление источника.

Решение

1. Внутреннее сопротивление батареи:

$$U = \varepsilon - Ir; \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\varepsilon - U}{I} == 4\ \text{Ом};$$

2. Внешнее сопротивление цепи:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}; \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = IR + Ir; \quad R = \frac{\varepsilon - Ir}{I} = \frac{\varepsilon}{I} - r = 6\ \text{Ом};$$

---

78. В цепи, состоящей из источника с ЭДС ε = 10 В и внутренним сопротивлением r = 4 Ом, течёт ток силой I_1 = 1 А. Каким станет ток I_2 при уменьшении сопротивления внешней нагрузки в три раза?

Решение

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + r}; \quad \Rightarrow I_1R_1 + I_1r = \varepsilon; \quad R_1 = \frac{\varepsilon - I_1r}{I_1} = \frac{\varepsilon}{I_1} - r = 6\ \text{Ом};$$

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{\frac{R_1}{3} + r} = \frac{10}{2+4} \approx 1{,}7\text{А};$$

---

79. Вольтметр, подключённый к источнику тока с ε = 120 В и внутренним сопротивлением r = 50 Ом, показывает напряжение U = 118 В. Определить внутреннее сопротивление вольтметра.

Решение

1. Сила тока в цепи:

$$U = \varepsilon - Ir; \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\varepsilon - U}{r} = 0{,}04\text{А};$$

2. Внутреннее сопротивление вольтметра:

$$R = \frac{U}{I} = 2{,}95\ \text{кОм};$$

---

80. Определить падение напряжения на проводниках и их сопротивление, если на лампочке с сопротивлением R = 10 Ом напряжение равно U = 1 В. ЭДС источника ε = 1,25 В, его внутреннее сопротивление r = 0,4 Ом.

Решение

1. Сила тока в цепи:

$$I = \frac{U}{R};$$

2. Падение напряжения на проводниках:

$$U_x = \varepsilon - U - \frac{U}{R}r = 1{,}25 - \frac{1}{10} \cdot 0{,}4 = 0{,}21\text{В};$$

3. Сопротивление проводников:

$$R_x = \frac{U_x}{I} = 2{,}1\ \text{Ом};$$

---

81. Четыре элемента с внутренним сопротивлением r = 0,8 Ом и ε = 2В каждый соединены последовательно и замкнуты на сопротивление R = 4,8 Ом. Определить силу тока в цепи.

Решение

1. Внутреннее сопротивление последовательных источников:

$$r_O = 4r;$$

2. ЭДС батареи:

$$\varepsilon_O = 4\varepsilon;$$

3. Сила тока в цепи:

$$I = \frac{4\varepsilon}{R + 4r} = 1A;$$

---

82. Четыре элемента с внутренним сопротивлением r = 0,8 Ом и ε = 2 В каждый соединены параллельно и замкнуты на сопротивление R = 4,8 Ом. Найти силу тока в цепи.

Решение

1. Внутреннее сопротивление параллельных источников:

$$r_O = \frac{r}{4};$$

2. ЭДС батареи:

$$\varepsilon_O = \varepsilon;$$

3. Сила тока в цепи:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + \frac{r}{4}} = 0{,}4A;$$

---

83. Три одинаковых элемента, соединённых последовательно и замкнутых на резистор сопротивлением R_1 = 1,5 Ом дают ток силой I_1 = 2 А. При параллельном соединении этих элементов через резистор течёт ток силой I_2 = 0,9 А. Определить ЭДС и внутреннее сопротивление каждого элемента.

Решение

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{3\varepsilon}{R + 3r}; \\ I_2 &= \frac{3\varepsilon}{3R + r} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{3R + r}{R + 3r}; \quad I_1R + I_1 3r = I_2 3R + I_2 r; \quad 3I_1 r - I_2 r = 3I_2 R - I_1 R;$$

$$r = \frac{R(3I_2 - I_1)}{2I_1 - I_2} \approx 0{,}2\,Ом; \quad \varepsilon = I_1(\frac{R}{3} + r) = 1{,}4\ В;$$

---

84. Определить ЭДС и внутреннее сопротивление батареи, если ЭДС каждого источника ε = 1,8 В, а внутреннее сопротивление r = 0,6 Ом.

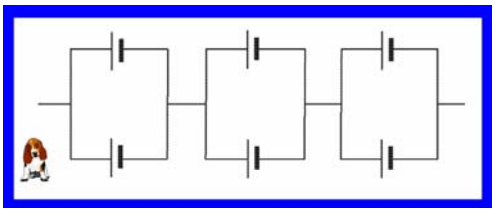


Рис. 84. Соединение источников

Решение

1. ЭДС и внутреннее сопротивление параллельных ячеек:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon; \quad r_1 = \frac{r}{2};$$

2. ЭДС и внутреннее сопротивление последовательно соединённых ячеек:

$$\varepsilon_2 = 3\varepsilon_1 = 3\varepsilon = 5{,}4\ В; \quad r_2 = 3r_1 = \frac{3}{2}r = 0{,}9\ Ом;$$

---

85. Два элемента с ЭДС ε_1 = 1,6 В и ε_2 = 2 В м с внутренними сопротивлениями r_1 = 0,3 Ом и r_2 = 0,9 Ом соединены последовательно и замнуты на ре-

зистор сопротивлением R = 6 Ом. Определить падение напряжения на внутреннем сопротивлении каждого элемента.

Решение

1. Сила тока в цепи:

$$I=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{R+r_1+r_2}=0{,}5А;$$

2. Падение напряжения на внутренних сопротивлениях элементов:

$$U_1=Ir_1=0{,}15В;\quad U_2=Ir_2=0{,}45В;$$

---

86. Определить ЭДС и внутреннее сопротивление каждого элемента батареи, состоящей из пяти одинаковых элементов, соединённых последовательно, при включении одного внешнего сопротивления сила тока и напряжение на нём равны I_1 = 2 А, U_1 = 10 В, а при другом сопротивлении – I_2 = 4 А и U_2 = 5·В.

Решение

$$I_1=\frac{5\varepsilon}{\frac{U_1}{I_1}+5r};\quad\Rightarrow\quad \varepsilon=\frac{U_1}{5}+I_1r=\frac{U_2}{5}+I_2r;\quad r=\frac{U_1-U_2}{5(I_2-I_1)}=0{,}5\ Ом;$$

$$\varepsilon=\frac{U_1}{5}+I_1r_1=3\ В;$$

---

87. Есть две батареи, одна из которых составлена из нескольких одинаковых гальванических элементов, соединённых последовательно, другая – из того же числа элементов, соединённых параллельно. На какие одинаковые сопротивления R надо замкнуть каждую из батарей, чтобы силы токов были одинаковы? Внутреннее сопротивление каждого элемента равно r.

Решение

$$\frac{n\varepsilon}{R+nr}=\frac{\varepsilon}{R+\frac{r}{n}};\quad\Rightarrow\quad R+nr=nr+r;\quad r(n-1)=R(n-1);\quad\Rightarrow\quad R=r;$$

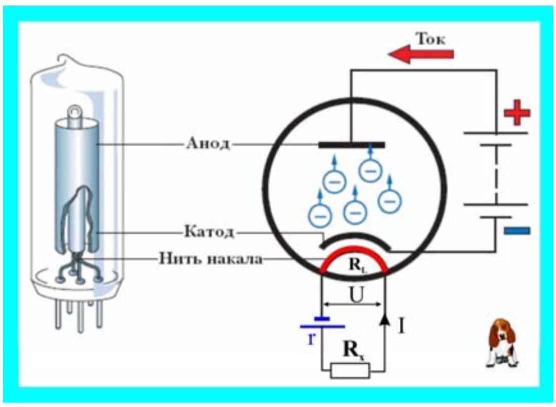


Рис. 88. Питание накала

88. Батарея нити накала электронной лампы имеет: ε = 6 В, r = 0,2 Ом. Для нормальной работы лампы требуется напряжение U = 4 В при силе тока I = 80 мА. Каково должно быть сопротивление R_x последовательного резистора, включенного в цепь питания накала лампы?

Решение

$$I\frac{U}{I}+IR_x+Ir=\varepsilon;$$

$$R_x = \frac{\varepsilon}{I} - R_L - r = 24{,}8 \text{ Ом};$$

---

89. Реостат изготовлен из стальной проволоки площадью поперечного сечения s = 0,75 мм^2 и включён в цепь с элементом питания, обладающим внутренним сопротивлением r = 0,2 Ом и ε = 2,1 В. Определить длину проволоки, если напряжение на зажимах элемента U = 2 В.

Решение

1. Сила тока в цепи:

$$I = \frac{\varepsilon - U}{r} = 0{,}5\text{A};$$

2. Сопротивление проводника:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}; \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\varepsilon - Ir}{I} = 4 \text{ Ом};$$

3. Длина проводника:

$$R = \xi \frac{\ell}{s}; \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{Rs}{\xi} = \frac{4 \cdot 7{,}5 \cdot 10^{-7}}{12 \cdot 10^{-8}} = 25\text{м};$$

---

90. Определить ЭДС источника тока с внутренним сопротивлением r = 0,25 Ом, если при замыкании его железным проводником длиной ℓ = 5 м и сечением s = 0,2 мм^2 в цепи возникает ток силой I = 0,5 А.

Решение

1. Сопротивление стального проводника:

$$R = \xi \frac{\ell}{s} = 3 \text{ Ом};$$

2. ЭДС источника:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}; \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = I(R + r) = 1{,}625 \text{ В};$$

---

91. Амперметр с внутренним сопротивлением R_A = 2 Ом, подключенный к зажимам батареи элементов, показывает силу тока I_A = 5 А. Вольтметр с внутренним сопротивлением R_v = 15 Ом, будучи подключенным в место вольтметра показывает U_v = 12 В. Чему равен ток короткого замыкания?

Решение

1. Сила тока, протекающего через вольтметр и падение напряжения на амперметре:

$$I_v = \frac{U_v}{R_v} = 0{,}8\text{A}; \quad U_A = I_A R_A = 10\text{В};$$

2. Внутреннее сопротивление батареи элементов:

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon = U_A + I_A r;\\ \varepsilon = U_v + I_v r;\end{array}\right\} \Rightarrow \quad U_v + I_v r = U_A + I_A r; \quad r = \frac{U_v - U_A}{I_A - I_v} \approx 0{,}5\ \text{Ом};$$

3. ЭДС батареи:

$$\varepsilon = U_A + I_A r = 12{,}5\ \text{В};$$

4. Сила тока короткого замыкания:

$$I_m = \frac{\varepsilon}{r} = 25\ \text{В};$$

---

92. Какое количество аккумуляторов с ε = 2,1 В и внутренним сопротивлением r = 0,2 Ом необходимо соединить в батарею последовательно, чтобы в проводнике с сопротивлением R = 6 Ом получить силу тока I = 1,5 А?

Решение

$$I = \frac{n\varepsilon}{R + nr}; \quad \Rightarrow \quad n = \frac{IR}{\varepsilon - Ir} = 5;$$

---

93. Три одинаковых элемента, соединённые последовательно и замкнутые на резистор сопротивлением R = 1,5 Ом, дали силу тока I_1 = 2 А. При параллельном соединении элементов, через тот же резистор протекает ток силой I_2 = 0,9 А. Определить ЭДС и внутреннее сопротивление каждого элемента.

Решение

1. Внутреннее сопротивление одного элемента:

$$\left.\begin{array}{l} I_1 = \dfrac{3\varepsilon}{R + 3r};\\ I_2 = \dfrac{\varepsilon}{R + \dfrac{r}{3}};\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{3\left(R + \frac{r}{3}\right)}{R + 3r}; \quad I_1(R + 3r) = 3I_2\left(R + \frac{r}{3}\right);$$

$$I_1R + 3I_1r = 3I_2R + I_2r; \quad 3I_1r - I_2r = 3I_2R - I_1R;$$

$$r = \frac{R(3I_2 - I_1)}{3I_1 - I_2} = \frac{1{,}5(2{,}7 - 2)}{6 - 0{,}9} \approx 0{,}2\ \text{Ом};$$

2. ЭДС элемента:

$$\varepsilon = \frac{1}{3}(I_1R + 3I_1r) = I_1\left(\frac{R}{3} + r\right) = 1{,}4\ \text{В};$$

---

94. Определить силу тока короткого замыкания батареи аккумуляторов ЭДС которой ε = 12 В, если при нормальном режиме работы сила тока в цепи I = 4 А, при этом напряжение на зажимах батареи составляет U = 11 В.

Решение

1. Внутреннее сопротивление батареи:

$$\varepsilon - U = Ir; \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\varepsilon - U}{I};$$

2. Сила тока короткого замыкания:

$$I_m = \frac{\varepsilon}{r} = \frac{\varepsilon I}{\varepsilon - U} = \frac{12 \cdot 4}{1} = 48A;$$

---

95. Чему равно внутреннее сопротивление элемента, если при его замыкании на сопротивление R напряжение на полюсах элемента оказалось равным половине его ЭДС?

Решение

$$\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon - Ir; \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\varepsilon}{2r}; \quad I = \frac{\varepsilon}{R + r}; \quad \Rightarrow \quad \frac{\varepsilon}{2r} = \frac{\varepsilon}{R + r}; \quad \Rightarrow \quad r = R;$$

---

96. Какую часть от ЭДС источника тока составляет разность потенциалов U на его полюсах, если внутреннее сопротивление источника r в n раз меньше внешнего сопротивления R?

Решение

$$U = \varepsilon - I\frac{R}{n}; \quad I = \frac{U}{R}; \quad \Rightarrow \quad U = \varepsilon - \frac{U}{R}\frac{R}{n} = \varepsilon - \frac{U}{n}; \quad U + \frac{U}{n} = \varepsilon; \quad U\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \varepsilon;$$

$$\frac{U}{\varepsilon} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{n}{1 + n};$$

97.При сопротивлении внешней цепи R_1 = 1 Ом разность потенциалов на зажимах аккумулятора U_1 = 1,5 В, при подсоединении сопротивления R_2 = 2 Ом разность потенциалов возросла до U_2 = 2 В. Определить ЭДС и внутреннее сопротивление источника.

Решение

$$\left.\begin{aligned} \frac{U_1}{R_1} = \frac{\varepsilon}{R_1 + r}; \\ \frac{U_2}{R_2} = \frac{\varepsilon}{R_2 + r}; \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{U_1 R_2}{U_2 R_1} = \frac{R_2 + r}{R_1 + r}; \quad \Rightarrow \quad r = \frac{R_1 R_2 (U_2 - U_1)}{U_1 R_2 - U_2 R_1} = 1\ \text{Ом};$$

$$\frac{U_1}{R_1} = \frac{\varepsilon}{R_1 + r}; \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{U_1}{R_1}(R_1 + r) = 3\ \text{В};$$

---

98. Батарея элементов замкнута на два параллельно соединённых резистора сопротивлением R = 4 Ом каждый. Вольтметр, подключенный к клеммам батареи, при этом показывает напряжение U_1 = 6 В. Если один из резисторов отключить, то показания вольтметра станут равными U_2 = 8 В. Определить ЭДС батареи и её внутреннее сопротивление.

Решение

1. Внешняя нагрузка батареи:

$$R_1 = \frac{R}{2} = 2\ \text{Ом}; \quad R_2 = R = 4\ \text{Ом};$$

2. Внутреннее сопротивление батареи:

$$\left.\begin{aligned}\frac{U_1}{R_1}=\frac{\varepsilon}{R_1+r};\\ \frac{U_2}{R_2}=\frac{\varepsilon}{R_2+r};\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad\frac{U_1R_2}{U_2R_1}=\frac{R_2+r}{R_1+r};\quad\Rightarrow\quad r=\frac{R_1R_2(U_2-U_1)}{U_1R_2-U_2R_1}=2\ \text{Ом};$$

3. ЭДС батареи:

$$\frac{U_1}{R_1}=\frac{\varepsilon}{R_1+r};\quad\Rightarrow\quad\varepsilon=\frac{U_1}{R_1}(R_1+r)=12\ \text{В};$$

---

99. Батарея с ε = 6 В и внутренним сопротивлением r = 1,4 Ом питает внешнюю цепь, состоящую из двух параллельных резисторов сопротивлением R_1 = 2 Ом и R_2 = 8 Ом. Определить разность потенциалов на зажимах батареи и силы токов через резисторы.

Решение

1. Величина внешней нагрузки:

$$R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=1{,}6\ \text{Ом};$$

2. Сила тока в цепи:

$$I=\frac{\varepsilon}{R+r}=2\text{А};$$

3. Падение напряжения на параллельных резисторах:

$$U=\varepsilon\text{ - }Ir=3{,}2\text{В};$$

4. Силы токов через резисторы:

$$I_1=\frac{U}{R_1}=1{,}6\text{А};\quad I_2=\frac{U}{R_2}=0{,}4\text{А};$$

---

100. Генератор с ε = 130 В и r = 1,8 Ом питает несколько параллельно соединённых лампочек с общим сопротивлением R_1 = 24 Ом. Сопротивление соединительных проводов R_2 = 0,2 Ом. Определить силу тока в цепи, напряжение на лампах падение напряжения на проводах и напряжение на зажимах генератора.

Решение

1. Сила тока в цепи:

$$I=\frac{\varepsilon}{R_1+R_2+r}=5\text{А};$$

2. Падение напряжения на лампочках:

$$U_1=IR_1=120\ \text{В};$$

3. Падение напряжения на соединительных проводах:

$$U_2=IR_2=1\ \text{В};$$

4. Напряжение на зажимах источника:

$$U_3=\varepsilon-Ir=121\ \text{В};$$

---

101. ЭДС элемента равна ε = 1,6 В, внутреннее сопротивление r = 0,5 Ом. Определить КПД элемента при силе тока I = 2,4 А. Чему равна сила тока короткого замыкания?

Решение

1. Сопротивление цепи:

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r}; \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\varepsilon - Ir}{I} = \frac{1{,}6 - 2{,}4 \cdot 0{,}5}{2{,}4} \approx 0{,}17\ \text{Ом};$$

2. КПД элемента:

$$\eta = \frac{R}{R+r} = \frac{0{,}17}{0{,}67} \approx 0{,}248\,(24{,}8\%);$$

3. Сила тока короткого замыкания:

$$I_m = \frac{\varepsilon}{r} = 3{,}2\text{А};$$

---

102. ЭДС источника ε = 4 В, r = 1 Ом, $R_1 = R_2 = R_3$ = 4,5 Ом. Определить показания идеального вольтметра и идеального амперметра, включённых в цепь.

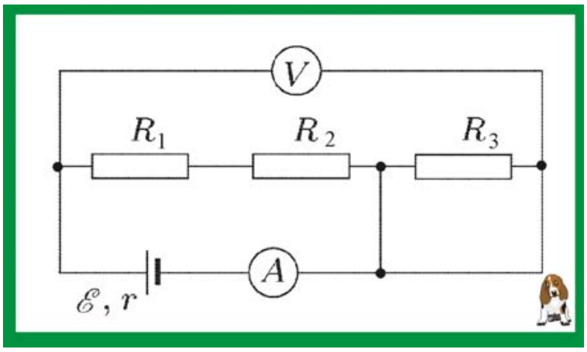


Рис. 102. Электрическая цепь

Решение

1. Резистор R_3 перемкнут проводником, поэтому источник нагружен только на два последовательно включенных сопротивления R_1 и R_2.

2. Сила тока в цепи (показания амперметра):

$$I = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2 + r} = 0{,}4\text{А};$$

2. Показания вольтметра:

$$U = \varepsilon - Ir = 4 - 0{,}4 = 3{,}6\ \text{В};$$

---

103. Проволока изогнута в виде кольца радиуса r. В центре кольца помещён гальванический элемент с ЭДС равной ε. Элемент соединён с точками C и D кольца по диаметру такой же проволокой с удельным сопротивлением ξ. Найти разность потенциалов между точками C и D если площадь поперечного сечения провода s.

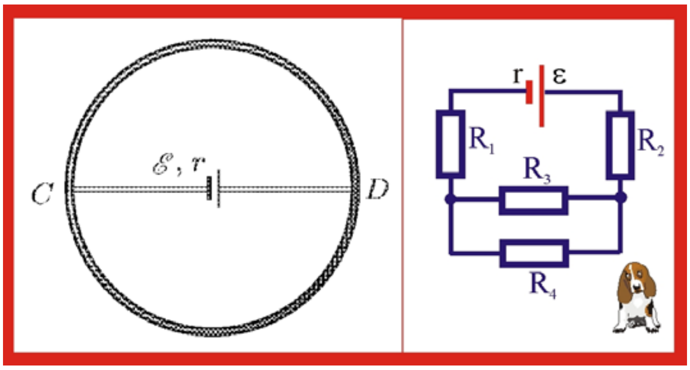


Рис. 103. Проволочное кольцо

Решение

1. Величины сопротивлений:

$$R_1 = R_2 = \xi \frac{r}{s};\quad R_3 = R_4 = \xi \frac{\pi r}{s};$$

2. Суммарная нагрузка источника:

$$R_O = R_{3,4} + R_1 + R_2;\quad R_{3,4} = \frac{R_4 R_3}{R_4 + R_3} = \frac{\xi^2 \frac{\pi^2 r^2}{s^2}}{2\xi \frac{\pi r}{s}} = \xi \frac{\pi r}{2s};$$

$$R_O = \xi \frac{\pi r}{2s} + 2\xi \frac{r}{s} = \frac{\xi r}{s}\left(\frac{\pi}{2} + 2\right) = \frac{\xi r}{s}\frac{\pi + 4}{2};$$

3. Сила тока в цепи:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_O + r} = \frac{\varepsilon}{\frac{\xi r}{s}\left(\frac{\pi + 4}{2}\right) + r};$$

4. Падение напряжения на сопротивлении $R_{3,4}$:

$$U_{CD} = IR_{3,4} = \frac{\varepsilon}{\xi r(\pi + 4) + 2sr}\frac{\xi \pi r}{2s} = \frac{\varepsilon \pi}{4 + \pi + \frac{2rs}{\xi r}};$$

---

104. Батарея состоит из восьми элементов, соединённых последовательно. ЭДС каждого элемента ε_1 = 1,5 В, внутреннее сопротивление элемента r_1 = 0,25 Ом. Внешняя цепь состоит из двух резисторов сопротивлениями R_1 = 10 Ом и R_2 = 50 Ом, соединённых параллельно. Определить напряжение на зажимах батареи.

Решение

1. ЭДС батареи, её внутреннее сопротивление и общее сопротивление нагрузки:

$$\varepsilon = 8\varepsilon_1 = 12\text{В};\quad r = 8r_1 = 2\ \text{Ом};\quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \approx 8{,}3\ \text{Ом};$$

2. Сила тока в цепи:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} \approx 1{,}16\text{А};$$

3. Падение напряжения на зажимах батареи:

$$U = \varepsilon - Ir = 12 - 1{,}16 \cdot 2 \approx 9{,}68\ \text{В};$$

---

7. Работа и мощность электрического тока

105. По проводнику, к концам которого приложено напряжение U = 5 В, прошло Q = 100 Кл электричества. Определить работу тока.

Решение

$$A = QU = 500\ \text{Дж};$$

---

106. Какой заряд пройдёт по проводнику сопротивлением R = 10 Ом за время τ = 20 с, если к его концам приложена разность потенциалов $\Delta\varphi$ = 12 В? Какая при этом будет совершена работа?

Решение

$$I = \frac{\Delta\varphi}{R} = \frac{\Delta Q}{\tau};\quad \Delta\varphi\tau = R\Delta Q;\quad \Delta Q = \frac{\Delta\varphi\tau}{R} = 24\text{Кл};\quad A = \Delta Q\Delta\varphi = 288\text{Дж};$$

---

107. Электрическая плитка при силе тока I = 5А за время τ = 30 мин потребляет E = 1080 кДж энергии. Чему равно сопротивление нагревательного элемента притки?

Решение

1. Мощность нагревательного элемента:

$$N = \frac{E}{\tau} = IU = I^2R;\quad \Rightarrow\quad R = \frac{E}{I^2\tau} = \frac{1{,}08\cdot 10^6}{25\cdot 30\cdot 60} = 24\ \text{Ом};$$

---

108. Каким сопротивлением должен обладать проводник, чтобы при включении в сеть с напряжением U = 220 В в нём выделялось в течении τ = 1 час энергия E = 3700 кДж?

Решение

$$N = \frac{E}{\tau} = IU = \frac{U^2}{R};\quad \Rightarrow\quad R = \frac{U^3\tau}{E} = \frac{4{,}84\cdot 10^4\cdot 3600}{3{,}7\cdot 10^6} \approx 47\ \text{Ом};$$

---

109. Какую работу совершает электрический ток в электродвигателе настольного вентилятора за время τ = 30 с, если при напряжении U = 220 В сила тока в двигателе равна I = 0,1 А?

Решение

$$N = IU;\quad A = N\tau = IU\tau = 0{,}1\cdot 220\cdot 30 = 660\ \text{Дж};$$

---

110. Определить расход энергии за τ = 20 с в автомобильной электрической лампочке напряжением U = 12 В при силе тока I = 3,5 А.

Решение

$$E = IU\tau = 840\ \text{Дж};$$

---

111. При напряжении U = 120 В в электрической лампе в течение τ = 30 с расходуется E = 900 Дж энергии. Определить силу тока через лампу.

Решение

$$E = N\tau = IU\tau; \quad \Rightarrow \quad I = \frac{E}{U\tau} = 0{,}25A;$$

---

112. Электрическая лампочка с напряжением питания U = 220 В при силе тока I = 0,5 А израсходовала E = 330 Дж электроэнергии. В течение какого времени τ горела лампочка?

Решение

$$E = N\tau = IU\tau; \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{E}{UI} = 3c;$$

---

113. Сила тока через паяльник составляет I = 0,9 А при напряжении питания U = 220 В. Какова мощность тока?

Решение

$$N = IU = 198\ \text{Вт};$$

---

114. Вольтметр, включенный параллельно участку цепи с сопротивлением R = 10 Ом показывает напряжение U = 5 В. Определить мощность, потребляемую этим участком цепи.

Решение

$$N = IU = \frac{U^2}{R} = 2{,}5\ \text{Вт};$$

---

115. При ремонте электроплитки спираль была укорочена на ζ = 0,1 своей длины. Во сколько раз изменилась мощность плитки?

Решение

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \frac{U^2}{R}; \\ N_2 &= \frac{U^2}{(1-\zeta)R}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad N_2 = \frac{N_1}{1-\zeta} = 1{,}11N_1;$$

---

116. В паспорте электрического утюга написано: «220 В, 600 Вт». Какое количество теплоты выделяется утюгом за τ = 2 часа при напряжении U = 220 В?

Решение

$$Q = N\tau = 600 \cdot 7200 = 4{,}32\text{МДж};$$

---

117. В паспорте электрического утюга написано: «220 В, 600 Вт». Какое количество теплоты выделяется утюгом за τ = 2 часа при напряжении U = 200 В?

Решение

$$\left.\begin{aligned} N_1 = IU = I^2R = \frac{U_1^2}{R}; \\ N_2 = \frac{U_2^2}{R}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{N_1}{N_2} = \frac{U_1^2}{U_2^2} = 1{,}21;$$

$$N_2 = \frac{N_1}{1{,}21} \approx 496\text{Вт}; \quad \Rightarrow \quad Q = N_2\tau \approx 3{,}6\text{МДж};$$

---

118. Электрический утюг в течение τ = 5 минут нагревался от сети с напряжением U = 220 В при силе тока I = 2 А. Какой заряд прошёл через спираль утюга и какое при этом выделилось количество теплоты?

Решение

$$I = \frac{q}{\tau}; \quad \Rightarrow \quad q = I\tau = 2 \cdot 5 \cdot 60 = 600\ \text{Кл}; \quad Q = IU\tau = 1{,}32 \cdot 10^5\,\text{Дж};$$

---

119. Источник тока с ε = 30 В и r = 5 Ом питает сеть, потребляющую N = 8 Вт. Определить силу тока и сопротивление внешней цепи.

Решение

1. Внешнее сопротивление цепи R:

$$\left.\begin{aligned} N = I^2R; \\ I = \frac{\varepsilon}{R + r}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{N}{R} = \frac{\varepsilon^2}{R^2 + 2Rr + r^2}; \quad \varepsilon^2 R = N\left(R^2 + 2Rr + r^2\right);$$

$$\varepsilon^2 = N\left(R + 2r + \frac{r^2}{R}\right); \quad \frac{\varepsilon^2}{N} - 2r = R + \frac{r^2}{R}; \quad R^2 - 96{,}5R - 64 = 0; \quad R \approx 97\text{Ом};$$

2. Сила тока в цепи:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} = \frac{30}{97 + 8} = 0{,}285\text{А};$$

---

120. Электрический кипятильник рассчитан на напряжение U = 120 В при силе тока I = 4 А. Какой длины и поперечного сечения надо взять нихромовый провод ($\xi = 110 \cdot 10^{-8}$ Ом·м) для изготовления нагревательного элемента, если допустимая плотность тока j = 10,2 А/мм^2?

Решение

1. Площадь поперечного сечения проводника:

$$j = \frac{I}{s}; \quad \Rightarrow \quad s = \frac{I}{j} \approx 0{,}4\ \text{мм}^2 \equiv 4 \cdot 10^{-7}\text{м}^2;$$

2. Длина проволоки нагревательного элемента:

$$R = \frac{U}{I}; \quad \frac{\xi\ell}{s} = \frac{U}{I}; \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{Us}{\xi I} = \frac{120 \cdot 4 \cdot 10^{-7}}{1{,}1 \cdot 10^{-6} \cdot 4} \approx 11\,\text{м};$$

---

121. На одной лампочке написано: «N_1 = 60 Вт, U_1 = 110 В», на другой – «N_2 = 250 Вт; U_2 = 110 В». Лампы включают последовательно в сеть с напряжением U = 220 В. Какое напряжение будет падать на каждой лампе? Какая мощность будет потребляться каждой лампой?

Решение

1. Сопротивление ламп:

$$N_1 = I_1U_1 = \frac{U_1^2}{R_1}; \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{U_1^2}{N_1} \approx 202\text{ Ом};$$

$$N_2 = I_2U_2 = \frac{U_2^2}{R_2}; \quad \Rightarrow \quad R_2 = \frac{U_2^2}{N_2} \approx 48{,}4\text{ Ом};$$

2. Сила пока через последовательно включенные лампы:

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2} = 0{,}878\text{А};$$

3. Падение напряжения на лампах:

$$u_1 = IR_1 \approx 177\text{В}; \quad u_2 = IR_2 \approx 42{,}5\text{В};$$

4. Мощность, потребляемая каждой лампой:

$$P_1 = Iu_1 \approx 155{,}4\text{Вт}; \quad P_2 = Iu_2 \approx 37{,}3\text{Вт};$$

---

122. Две лампы мощностями N_1 = 60 Вт и N_2 = 100 Вт при номинальном напряжении U = 220 В включаются в цепь с одним и тем же напряжением один раз параллельно, а другой – последовательно. Определить количество тепла, выделенного каждой из них за τ = 30 с работы в обоих случаях.

Решение

1. Сопротивления ламп:

$$R_1 = \frac{U^2}{N_1} \approx 807\text{ Ом}; \quad R_2 = \frac{U^2}{N_2} \approx 484\text{ Ом};$$

2. Общее сопротивление ламп при различных способах их включения:

$$R_{O_1} = R_1 + R_2 = 1291\text{ Ом}; \quad R_{O_2} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} = 302{,}5\text{ Ом};$$

3. Сила тока в цепи при последовательном и параллельном включении ламп и токи i_1 и i_2 через лампы при параллельном их включении:

$$I_{O_1} = \frac{U}{R_{O_1}} \approx 0{,}17\text{А}; \quad I_{O_2} = \frac{U}{R_{O_2}} \approx 0{,}73\text{А}; \quad i_1 = \frac{U}{R_1} \approx 0{,}27\text{А}; \quad i_2 = \frac{U}{R_2} \approx 0{,}45\text{А};$$

4. Количество тепла, выделяемое лампами при последовательном включении:

$$Q_1 = I_{O_1}^2 R_1\tau \approx 700\text{Дж}; \quad Q_2 = I_{O_2}^2 R_2\tau \approx 419\text{Дж};$$

5. Количество тепла, выделяемое лампами при параллельном включении:

$$Q_3 = \frac{U^2}{R_1}\tau \approx 1800 Дж; \quad Q_4 = \frac{U^2}{R_2}\tau \approx 3000 Дж;$$

---

123. Имеются три лампы накаливания с мощностями: N_1 = 25 Вт, N_2 = 25 Вт, N_3 = 50 Вт, с номинальным напряжением U = 110 В. Как следует подключить эти лампы с сети U_0 = 220 В, чтобы они работали в нормальном режиме? Определить силы токов в лампах.

Решение

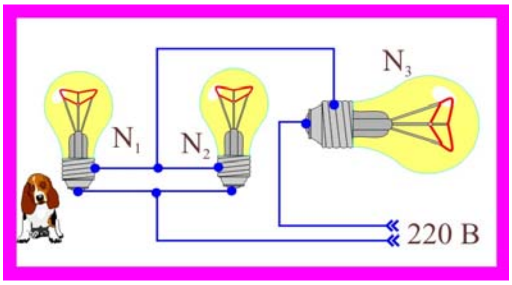


Рис. 123. Соединение ламп

1. Две одинаковые лампочки мощностью по 25 Вт следует соединить параллельно, а лампочку мощностью 50 Вт последовательно с ними, в этом случае на каждой лампе будет падать напряжение U_0 = 110 В.

2. Номинальные сопротивления ламп:

$$R_1 = R_2 = \frac{U^2}{N_2} \approx 484 \text{ Ом}; \quad R_3 = \frac{U^2}{N_3} \approx 242 \text{ Ом};$$

3. Общее сопротивление ламп при смешанном включении:

$$\Re = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} + R_3 = \frac{484}{2} + 242 \approx 484 \text{ Ом};$$

4. Сила тока в последовательно включенной лампе:

$$I_3 = \frac{U_0}{\Re} \approx 0{,}45\text{А};$$

5. Сила тока через параллельно включенные лампочки:

$$I_1 = I_2 = \frac{I_3}{2} \approx 0{,}227\text{А};$$

---

124. Параллельно с лампой мощностью N_1 = 100 Вт включили электроплитку мощностью N_2 = 400 Вт. Напряжение сети U_0 = 127 В. Какое напряжение на лампе до и после подключения плиты, если сопротивление соединительных проводов r = 3 Ом? Номинальные мощности лампы и плитки соответствуют напряжению U_0.

Решение

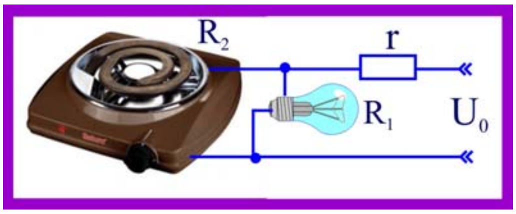


Рис. 124. Электроплитка и лампочка

1. Сопротивление элементов цепи:

$$R_1 = \frac{U_0^2}{N_1} \approx 161 \text{ Ом}; \quad R_2 = \frac{U_0^2}{N_2} \approx 40{,}3 \text{ Ом};$$

2. Общее сопротивление цепи при включении электроплитки:

$$\Re_1 = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} + r = \frac{161 \cdot 40{,}3}{161 + 40{,}3} + 3 \approx 35 \text{ Ом};$$

3. Общее сопротивление цепи без электроплитки:

$$\Re_2 = R_1 + r = 164 \text{ Ом};$$

4. Напряжение на лампе без электроплитки:

$$U_{R_1} = \frac{U_0}{\Re_2} R_1 \approx 124{,}8 \text{ В};$$

2. Напряжение на лампе при подключении электроплитки:

$$I_0 = \frac{U_0}{\Re_1}; \quad U_r = I_0 r = \frac{U_0}{\Re_1} r = \frac{127}{35} \cdot 3 \approx 10{,}88 \text{ В}; \quad U^*_{R_1} = U_0 - U_r \approx 116{,}1 \text{ В};$$

---

125. За время τ_1 = 40 с в цепи, состоящей из трёх одинаковых проводников, соединённых параллельно и включённых в сеть, выделилось некоторое количество теплоты. За какое время выделится такое же количество теплоты, если проводники соединить последовательно?

Решение

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= \frac{3U^2}{R}\tau_1; \\ Q_2 &= \frac{U^2}{3R}\tau_2; \end{aligned}\right\} \quad Q_1 = Q_2; \quad \Rightarrow \quad 3\tau_1 = \frac{\tau_2}{3}; \quad \tau_2 = 9\tau_1 = 360\text{с} \equiv 6\text{мин}.$$

---

126. Ёлка освещается n_1 = 12 электрическими лампочками, соединёнными последовательно и включенными в городскую электрическую сеть напряжением U_0 = 220 В. Как изменится расход энергии, если количество ламп сократить до n_2 =10?

Решение

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{U_0}{12R}; \\ I_2 &= \frac{U_0}{10R}; \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{10}{12} \approx 0{,}833; \quad \left.\begin{aligned} E_1 &= I_1 U_0 \tau; \\ E_2 &= I_2 U_0 \tau; \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad E_2 = 0{,}833 E_1;$$

---

127. В электрической плитке, рассчитанной на напряжение U_0 = 220 В, имеются две спирали сопротивлением R = 120 Ом каждая. С помощью переключателя можно включать в сеть одну спираль, две спирали последовательно или две спирали параллельно. Определить мощность в каждом случае.

Решение

$$N_1 = \frac{U_0^2}{R} \approx 403 \text{ Вт}; \quad N_2 = \frac{U_0^2}{2R} \approx 201{,}5 \text{ Вт}; \quad N_3 = \frac{2U_0^2}{R} \approx 806 \text{ Вт};$$

---

128. Три проводника с одинаковыми сопротивлениями подключаются к источнику постоянного напряжения сначала параллельно, а затем последовательно. Во сколько раз будет отличаться потребляемая ими мощность?

Решение

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \frac{U_0^2}{3R}; \\ N_2 &= \frac{3U_0^2}{R}; \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad N_1 = 9N_2;$$

---

129. Аккумулятор замыкается единожды сопротивлением R_1 а в другой раз сопротивлением R_2. В обоих случаях тепловая мощность, выделяемая на резисторах одинакова. Чему равно внутреннее сопротивление источника?

Решение

$$N_1 = N_2; \quad \Rightarrow \quad I_1^2 R_1 = I_2^2 R_2; \quad \frac{\varepsilon^2}{(R_1 + r)^2} R_1 = \frac{\varepsilon^2}{(R_2 + r)^2} R_2;$$

$$R_1 (R_2 + r)^2 = R_2 (R_1 + r)^2; \quad R_1 R_2^2 + 2R_1 R_2 r + R_1 r^2 = R_1^2 R_2 + 2R_2 R_2 r + R_2 r^2;$$

$$R_1 R_2 (R_1 - R_2) = r^2 (R_1 - R_2); \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{R_1 R_2};$$

---

130. Лампочки, с сопротивлением R_1 = 3 Ом и R_2 = 12 Ом поочерёдно подключаются к источнику тока, потребляя при этом одинаковую мощность. Определить внутреннее сопротивление источника тока.

Решение

$$N_1 = N_2; \quad \Rightarrow \quad I_1^2 R_1 = I_2^2 R_2; \quad \frac{\varepsilon^2}{(R_1 + r)^2} R_1 = \frac{\varepsilon^2}{(R_2 + r)^2} R_2;$$

$$R_1 (R_2 + r)^2 = R_2 (R_1 + r)^2; \quad R_1 R_2^2 + 2R_1 R_2 r + R_1 r^2 = R_1^2 R_2 + 2R_2 R_2 r + R_2 r^2;$$

$$R_1 R_2 (R_1 - R_2) = r^2 (R_1 - R_2); \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{R_1 R_2} = \sqrt{36} = 6\ \text{Ом};$$

---

131. Батарея аккумуляторов с внутренним сопротивление r = 4 Ом замкнута резистором с сопротивлением R_1 = 2 Ом. Найти величину второго сопротивление, при котором на нём будет выделяться такая же тепловая мощность, как и в первом случае.

Решение

$$N_1 = N_2; \quad \Rightarrow \quad I_1^2 R_1 = I_2^2 R_2; \quad \frac{\varepsilon^2}{(R_1 + r)^2} R_1 = \frac{\varepsilon^2}{(R_2 + r)^2} R_2;$$

$$R_1 (R_2 + r)^2 = R_2 (R_1 + r)^2; \quad R_1 R_2^2 + 2R_1 R_2 r + R_1 r^2 = R_1^2 R_2 + 2R_2 R_2 r + R_2 r^2;$$

$$R_1 R_2 (R_1 - R_2) = r^2 (R_1 - R_2); \quad \Rightarrow \quad r^2 = R_1 R_2; \quad R_2 = \frac{r^2}{R_1} = 8\ \text{Ом};$$

---

132. Имеются две лампочки: N_1 = 25 Вт и N_2 = 100 Вт, соединённые последовательно и включенных в сеть. В какой лампочке выделяется больше тепла и во сколько раз?

Решение

$$I_1 = I_2; \quad N_1 = I^2 R_1; \quad N_2 = I^2 R_2; \quad \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = 4; \quad \Rightarrow \quad N_2 = \frac{N_1}{4};$$

---

133. Какая из двух ламп мощностями N_1 = 60 Вт и N_2 = 100 Вт, рассчитанных на одно и то же напряжение, имеет большее сопротивление?

Решение

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \frac{U^2}{R_1}; \\ N_2 &= \frac{U^2}{R_2}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{N_1}{N_2} = \frac{R_2}{R_1} = 0{,}6; \quad R_2 = 0{,}6R_1;$$

---

134. Два проводника сопротивлениями R_1 = 20 Ом и R_2 = 40 Ом соединяют сначала последовательно, а затем параллельно, подключая в обоих случаях к одному и тому же источнику тока. В каком проводнике и во сколько раз выделится большее количество теплоты за одинаковое время?

Решение

1. Выделившаяся теплота за фиксированный промежуток времени пропорциональна мощности:

$$Q \sim N;$$

2. Для случая последовательного соединения проводников:

$$I_1 = I_2 = I; \quad N_1 = I^2R_1; \quad N_2 = I^2R_2; \quad \Rightarrow \quad \frac{N_1}{N_2} = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{2}{4} = 0{,}5;$$

3. Для случая параллельного соединения проводников:

$$U_1 = U_2 = U; \quad N_1 = \frac{U^2}{R_1}; \quad N_2 = \frac{U^2}{R_2}; \quad \Rightarrow \quad \frac{N_1}{N_2} = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_2}{R_1} = 2;$$

---

135. Два проводника сопротивлениями R_1 = 20 Ом и R_2 = 40 Ом соединяют сначала последовательно, а затем – параллельно. При каком виде соединения выделится большее количество теплоты?

Решение

1. Выделившаяся теплота за фиксированный промежуток времени пропорциональна мощности:

$$Q \sim N;$$

2. Для случая последовательного соединения проводников:

$$\Re_1 = R_1 + R_2 = 60 \text{ Ом};$$

3. Для случая параллельного соединения проводников:

$$\Re_2 = \frac{R_1R_2}{R_2 + R_2} = 13{,}3 \text{ Ом};$$

4. Выделение теплоты:

$$N_1 \sim \frac{1}{\Re_1}; \quad N_2 \sim \frac{1}{\Re_2}; \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{\Re_1}{\Re_2} = \frac{60}{13{,}3} = 4{,}5;$$

---

136. В электрической плитке имеются две спирали с одинаковым сопротивлением R. Посредством переключателя можно включить в сеть одну спираль, две спирали включенных последовательно или две спирали, включенные параллельно. Сравнить количество теплоты, выделяемой при последовательном

и параллельном включении с количеством теплоты, выделяемой одной спиралью.

Решение

1. Выделившаяся теплота за фиксированный промежуток времени пропорциональна мощности:

$$Q \sim N;$$

2. Мощность электроплитки при различных режимах включения спиралей:

$$N_1 = \frac{U_0^2}{R};\quad N_2 = \frac{U_0^2}{2R} \approx;\quad N_3 = \frac{2U_0^2}{R};$$

3. Отношение количеств теплоты:

$$\frac{N_1}{N_2} = 2;\quad \frac{N_3}{N_1} = 2;\quad \frac{N_3}{N_2} = 4;$$

---

137. Имеются два одинаковых электрических нагревателя мощностью по N = 200 Вт каждый. Сколько времени будет происходить нагревание m = 0,4 кг воды от t_1 = 15 ^{0}C до температуры кипения, если пользоваться: а) двумя нагревателями, соединёнными параллельно; б) двумя нагревателями, соединёнными последовательно?

Решение

1. Параллельное соединение:

$$(N_1 + N_2)\tau_1 = cm\Delta T;\quad \Rightarrow\quad \tau_1 = \frac{cm\Delta T}{N_1 + N_2} = \frac{4200 \cdot 0{,}4 \cdot (100 - 15)}{400} \cong 595\ \text{с} \approx 6\ \text{мин.}$$

2. Последовательное включение характеризуется тем, что на каждом нагревателе будет падать только половина сетевого напряжения, следовательно:

$$\frac{N_1 + N_2}{4}\tau = cm\Delta T;\quad \tau_2 = \frac{4cm\Delta T}{N_1 + N_2} = \frac{4 \cdot 4200 \cdot 0{,}4 \cdot (100 - 15)}{400} \cong 4\tau_1 = 24\text{мин.}$$

---

138. Электрический чайник имеет две обмотки. При включении одной из них вода в чайнике закипает через τ_1 = 15 минут, при включении другой – через τ_2 = 30 минут. Через какое время закипит вода в чайнике, если включить две обмотки: а) последовательно; б) параллельно?

Решение

1. Отношение сопротивлений обмоток:

$$Q = \frac{U^2}{R_1}\tau_1 = \frac{U^2}{R_2}\tau_2 = \frac{U^2}{R_1 + R_2}\Im_1 = \left(\frac{U^2}{R_1} + \frac{U^2}{R_2}\right)\Im_2;\quad \Rightarrow\quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2};$$

2. Время закипания воды при последовательном соединении обмоток:

$$\Im_1 = \tau_1 + \tau_1 = 45\ \text{мин};$$

3. Время закипания воды при параллельном соединении обмоток:

$$\Im_2 = \frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{15 \cdot 30}{45} = 10\text{мин};$$

---

139. батарея, замкнутая на резистор с R_1 = 2 Ом, даёт ток силой I_1 = 1,6 А. При замыкании её на резистор с R_2 = 1 Ом через него проходит ток силой I_2 = 2 А. Определить внутренние потери мощности на батарее и её КПД при указанных нагрузках.

Решение

1. Внутреннее сопротивление батареи:

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{\varepsilon}{R_1 + r}; \\ I_2 &= \frac{\varepsilon}{R_2 + r}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2 + r}{R_1 + r}; \quad r = \frac{I_1R_1 - I_2R_2}{I_2 - I_1} = 3\ \text{Ом};$$

2. КПД батареи при заданных нагрузках:

$$\eta_1 = \frac{R_1}{R_1 + r} = 0{,}4; \quad \eta_2 = \frac{R_2}{R_2 + r} = 0{,}25;$$

3. Потери мощности на внутреннем сопротивлении батареи:

$$N_1 = I_1^2 r = 7{,}68\ \text{Вт}; \quad N_2 = I_2^2 r = 12\ \text{Вт};$$

---

140. Определить ЭДС и внутреннее сопротивление аккумулятора, если при силе тока I_1 = 4 А он выдаёт во внешнюю цепь мощность N_1 = 7,2 Вт, а при силе тока I_2 = 6 А – мощность N_2 = 9,6 Вт.

Решение

1. Сопротивления внешней нагрузки:

$$N_1 = I_1^2 R_1; \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{N_1}{I_1^2} \approx 0{,}45\ \text{Ом}; \quad N_2 = I_2^2 R_2; \quad \Rightarrow \quad R_2 = \frac{N_2}{I_2^2} \approx 0{,}267\ \text{Ом};$$

2. Внутреннее сопротивление аккумулятора:

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{\varepsilon}{R_1 + r}; \\ I_2 &= \frac{\varepsilon}{R_2 + r}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2 + r}{R_1 + r}; \quad r = \frac{I_1R_1 - I_2R_2}{I_2 - I_1} = 0{,}1\ \text{Ом};$$

3. ЭДС аккумулятора:

$$\varepsilon = I_1(R_1 + r) = 2{,}2\ \text{В};$$

---

141. К источнику тока с напряжение на зажимах U = 127 В подключена нагрузка, по которой течёт ток силой I = 40 А. К полюсам источника подключён вольтметр с внутренним сопротивлением R_v = 12 кОм. Вычислить мощность, которую отдаёт источник в сеть, и мощность, потребляемую вольтметром.

Решение

1. Сила тока, протекающего через вольтметр:

$$I_v = \frac{U}{R_v} \approx 1 \cdot 10^{-2}\ \text{А};$$

2. Мощность, выделяемая на вольтметре:

$$N_v = I_v^2 R_v \approx 1{,}34 \text{Вт};$$

3. Мощность, выделяемая во внешнюю нагрузку:

$$R = \frac{U}{I}; \quad N = \frac{U^2}{R} = IU \approx 5{,}1 \text{ кВт};$$

---

142. Определить силу тока короткого замыкания батареи, если при силе тока I_1 = 2 А во внешней цепи выделяется мощность N_1 = 24 Вт, а при силе тока I_2 = 5 А – мощность N_2 = 30 Вт. Найти максимальную мощность, которая может выделяться во внешней цепи.

Решение

1. Величины сопротивлений внешней нагрузки:

$$N_1 = I_1^2 R_1; \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{N_1}{I_1^2} = 6 \text{ Ом}; \quad N_2 = I_2^2 R_2; \quad \Rightarrow \quad R_2 = \frac{N_2}{I_2^2} = 1{,}2 \text{ Ом};$$

2. Внутренне сопротивление батареи:

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{\varepsilon}{R_1 + r}; \\ I_2 &= \frac{\varepsilon}{R_2 + r}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2 + r}{R_1 + r}; \quad r = \frac{I_1 R_1 - I_2 R_2}{I_2 - I_1} = 2 \text{ Ом};$$

3. ЭДС источника:

$$\varepsilon = I_1 (R_1 + r) = 16 \text{В};$$

4. Ток короткого замыкания:

$$I_m = \frac{\varepsilon}{r} = 8 \text{А};$$

5. Максимальная мощность, выделяемая на нагрузке, определяется из условия:

$$R = r; \quad \Rightarrow \quad N_m = \frac{I_m^2}{r} = 32 \text{Вт};$$

---

143. Батарея состоит из пяти одинаковых элементов, соединённых последовательно. ЭДС каждого элемента ε_1 = 1,5 В, внутреннее сопротивление r_1 = 0,3 Ом. При какой силе тока мощность, отдаваемая во внешнюю цепь, будет максимальной?

Решение

1. ЭДС батареи и её внутреннее сопротивление:

$$\varepsilon = n\varepsilon_1 = 7{,}5 \text{В}; \quad r = nr_1 = 1{,}5 \text{ Ом};$$

2. Максимальная мощность во внешней цепи будет выделяться при условии R = r, при этом том сила тока составит:

$$I = \frac{\varepsilon}{2r} = 2{,}5 \text{А};$$

---

144. Электропечь должна давать количество тепла Q = 10^6 Дж за τ = 10 мин. Какова должна быть длина нихромовой проволоки (ξ = $110 \cdot 10^{-8}$ Ом·м) сечением s = 50 мм^2, если печь питается напряжением U = 36 В?

Решение

1. Мощность печи:

$$N = \frac{Q}{\tau} = \frac{10^6}{600} \approx 1667 \text{ Вт};$$

2. Длина нихромовой проволоки:

$$N = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2 s}{\xi \ell}; \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{U^2 s}{N\xi} = \frac{1296 \cdot 5 \cdot 10^{-5}}{1667 \cdot 110 \cdot 10^{-8}} \approx 35 \text{м};$$

---

145. В электрическом чайнике вода закипает через τ_1 = 12 минут после его включения в сеть. Нагревательный элемент чайника намотан проводом длиной ℓ_1 = 4,5 м. Как следует изменить нагревательный элемент, чтобы вода в чайнике закипала через время τ_2 = 8 минут?

Решение

1. При U = cost, мощность нагревателя определяется силой тока, поэтому для увеличения мощности требуется уменьшить сопротивление нагревателя:

$$\left.\begin{aligned} \frac{U^2}{R_1}\tau_1 = cm\Delta T; \\ \frac{U^2}{R_2}\tau_2 = cm\Delta T; \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{R_2}{R_1} = \frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2}; \quad \ell_2 = \frac{\ell_1 \tau_2}{\tau_1} = 3\text{м};$$

---

146. Через какой промежуток времени τ в электрическом чайнике с КПД η = 0,6, с сопротивлением нагревателя R = 14,4 Ом, питаемым напряжением U = 120 В, вода объёмом V = 0,6 л, взятая при температуре $t_1 = 0\ ^0C$ полностью выкипит?

Решение

1. Физические параметры воды:

$$\rho = 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}; \quad \lambda = 2{,}3 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{К}};$$

2. Время выкипания m = ρV = 0,6 кг воды:

$$c\rho V\Delta T + \lambda\rho V = \eta \frac{U^2}{R}\tau; \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{mR(c\Delta T + \lambda)}{\eta U^2};$$

$$\tau \approx \frac{0{,}6 \cdot 14{,}4\left(4200 \cdot 100 + 2{,}3 \cdot 10^6\right)}{0{,}6 \cdot 1{,}44 \cdot 10^4} \approx 45\text{мин};$$

---

147. Электровоз массой m движется под гору с постоянной скоростью v. Уклон на каждые L метров уменьшается на высоту h. Коэффициент сопротивления движению ζ, КПД тепловоза η, напряжение питания электродвигателя U. Определить силу потребляемого тока.

Решение

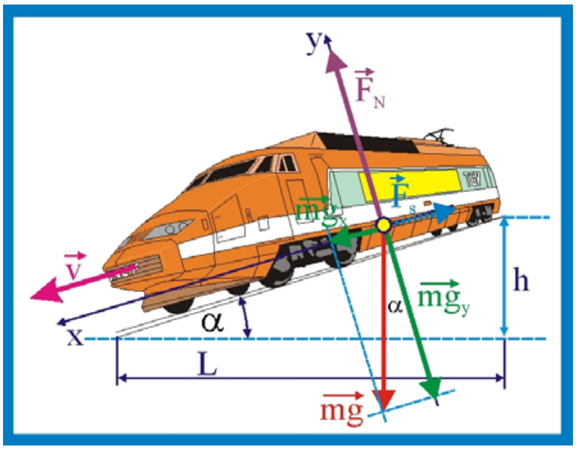


Рис. 147. Электровоз на спуске

1. Мощность проекций на направление движения сил, действующих на тепловоз:

$$N_m = \sum_{i=1}^{i=2} F_x \cdot v;$$

2. Электрическая мощность двигателей электровоза:

$$N_E = \eta UI;$$

3. Угол наклона полотна к горизонту:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{h}{L};$$

4. Геометрическая сумма проекций действующих сил на направление движения:

$$\sum_{i=1}^{i=2} F_x = mg\sin\alpha - \zeta mg\cos\alpha;$$

5. Сила потребляемого электродвигателями тока:

$$N_E = N_m; \quad \eta IU = vmg(\sin\alpha - \zeta\cos\alpha);$$

$$I = \frac{mgv(\sin\alpha - \zeta\cos\alpha)}{\eta U};$$

8. Ток в электролитах

148. Через раствор медного купороса $CuSO_4$ прошло n = 2·10⁴ Кл электричества. Сколько меди выделилось?

Решение

1. Молярная масса медного купороса:

$$\mu_{CuSO_4} \approx (63{,}55 + 32 + 64)\cdot 10^{-3} \approx 0{,}16\frac{\text{кг}}{\text{моль}};$$

2. Постоянная Майкла Фарадея;

$$F \approx 9{,}65\cdot 10^4\,\frac{\text{Кл}}{\text{моль}};$$

3. Второй закон Майкла Фарадея:

$$m_{Cu} = \frac{\mu_{Cu}}{ZF}ne \approx \frac{64\cdot 10^{-3}\cdot 2\cdot 10^4}{2\cdot 9{,}65\cdot 10^4} \approx 6{,}6\cdot 10^{-3}\text{кг};$$

---

149. Сколько выделится алюминия ($\mu \approx 27\cdot 10^{-3}$ кг/моль, Z = 3) за время τ = 30 мин, при силе тока через электролит I = 2 A?

Решение

$$m_{Cu} = \frac{\mu_{Al}}{ZF}I\tau \approx \frac{27\cdot 10^{-3}\cdot 2\cdot 1800}{3\cdot 9{,}65\cdot 10^4} \approx 3{,}36\cdot 10^{-4}\text{кг};$$

---

150. Сколько времени длилось никелирование, если на изделии осел слой никеля ($\mu_{Ni} \approx 59\cdot 10^{-3}$ кг/моль), Z = 2) массой m = 1,8 г при силе тока I = 2 A?

Решение

$$m_{Ni} = \frac{\mu_{Ni}}{ZF}I\tau; \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{m_{Ni}ZF}{\mu_{Ni}I} \approx \frac{1{,}8\cdot 10^{-3}\cdot 2\cdot 9{,}65\cdot 10^4}{59\cdot 10^{-3}\cdot 2} \approx 50\text{мин};$$

---

151. Какое количество железа ($\mu_{Fe} \approx 56\cdot 10^{-3}$ кг/моль, Z = 3) и хлора ($\mu_{Cl} \approx 35\cdot 10^{-3}$ кг/моль, Z = 1) осело на электродах электролитической ванны с раствором хлористого железа $FeCl_3$ при пропускании тока силой I = 10A в течение времени τ = 2 часа?

Решение

$$\left.\begin{aligned} m_{Fe} &= \frac{\mu_{Fe}I\tau}{Z_{Fe}F} \approx \frac{56\cdot 10^{-3}\cdot 10\cdot 7200}{3\cdot 9{,}65\cdot 10^4} \approx 1{,}4\cdot 10^{-2}\text{кг};\\ m_{Cl} &= \frac{\mu_{Cl}I\tau}{Z_{Cl}F} \approx \frac{35\cdot 10^{-3}\cdot 10\cdot 7200}{1\cdot 9{,}65\cdot 10^4} \approx 2{,}6\cdot 10^{-3}\text{кг};\end{aligned}\right\}$$

---

152. Цинковый анод ($\mu_{Zn} \approx 65$ кг/моль, Z = 2) массой m = 5 г поставлен в электролитическую выну, через которую проходит ток силой I = 2 А. Через какое время τ анод полностью израсходуется на покрытие металлических изделий?

Решение

$$m_{Ni} = \frac{\mu_{Zn}}{Z_{Zn}F} I\tau; \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{m_{Zn}ZF}{\mu_{Zn}I} \approx \frac{5\cdot 10^{-3}\cdot 2\cdot 9{,}65\cdot 10^{4}}{65\cdot 10^{-3}\cdot 2} \approx 2\text{часа};$$

---

153. Тонкая прямоугольная пластина размером a × b = 3 × 4 см покрыта с двух сторон слоем золота толщиной h = 0,001 см. Сколько времени пропускали через электролит ток силой I = 1,5 А?

Решение

1. Масса выделившегося на пластине золота ($\mu \approx 197\cdot 10^{-3}$ кг/моль, $\rho = 19{,}3\cdot 10^{3}$ кг/м^3, Z = 3):

$$m = \rho V = ab2h \approx 4{,}64\cdot 10^{-4}\text{кг};$$

2. Время выделения золота:

$$m_{Au} = \frac{\mu_{Au}}{Z_{Au}F} I\tau; \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{m_{Au}ZF}{\mu_{Au}I} \approx \frac{4{,}64\cdot 10^{-4}\cdot 3\cdot 9{,}65\cdot 10^{4}}{197\cdot 10^{-3}\cdot 1{,}5} \approx 7{,}56\text{мин};$$

---

154. При пропускании через электролит тока силой I = 1,5 А за время τ = 5 мин на катоде выделилось m = 137 мг вещества. Что это за вещество?

Решение

1. Из второго закона Майкла Фарадея:

$$m = \frac{\mu}{Z}\frac{I\tau}{F}; \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\mu}{Z} = \frac{mF}{I\tau} \approx \frac{1{,}37\cdot 10^{-7}\cdot 9{,}65\cdot 10^{4}}{1{,}5\cdot 300} \approx 3\cdot 10^{-7}\,\frac{\text{кг}}{\text{Кл}};$$

2. Это значение электрохимического эквивалента соответствует двухвалентному никелю.

---

155. Через какое время медный анод($\mu \approx 64\cdot 10^{-3}$ кг/моль, Z = 2, $\rho = 8{,}9\cdot 10^{3}$ кг/м^3) станет тоньше на Δh = 0,03 мм, если плотность тока при электролизе j = 2 А/дм^2?

Решение

$$m_{Cu} = \frac{\mu_{Cu}}{Z_{Cu}F} I\tau; \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{m_{Cu}ZF}{\mu_{Cu}I} = \frac{\rho_{Cu}\Delta hsZ_{Cu}F}{\mu_{Cu}js} \approx \frac{\rho_{Cu}\Delta hZ_{Cu}F}{\mu_{Cu}\cdot j};$$

$$\tau \approx \frac{8{,}9\cdot 10^{3}\cdot 3\cdot 10^{-5}\cdot 2\cdot 9{,}65\cdot 10^{4}}{64\cdot 10^{-3}\cdot 200} \approx 67\text{мин};$$

---

156. Для серебрения ложек ток силой I = 1,8 А пропускают через раствор соли серебра в течение времени τ = 5 часов. В качестве катода использовались n = 12 ложек, каждая из которых имела поверхность s_1 = 50 см^2. Какой толщины Δh отложится на ложках слой серебра?

Решение

1. Физические характеристики серебра:

$$\mu \approx 108\cdot 10^{-3}\ \text{кг/моль},\ \rho \approx 10{,}5\cdot 10^{3}\ \text{кг/м}^3,\ Z = 1;$$

2. Суммарная площадь катода:

$$s = ns_1 = 12\cdot 5\cdot 10^{-3} = 60\cdot 10^{-3}\,\text{м}^2;$$

3. Толщина слоя отложившегося серебра:

$$\rho_{Ag} s\Delta h = \frac{\mu_{Ag} I\tau}{Z_{Au}F};\quad \Rightarrow\quad \Delta h = \frac{\mu_{Ag} I\tau}{Z_{Ag}F\rho_{Ag}s};$$

$$\tau \approx \frac{108\cdot 10^{-3}\cdot 1{,}8\cdot 1{,}8\cdot 10^{4}}{1\cdot 9{,}65\cdot 10^{4}\cdot 10{,}5\cdot 10^{3}\cdot 6\cdot 10^{-2}} \approx 5{,}8\cdot 10^{-5}\,\text{м};$$

---

157. Никелирование изделия продолжалось τ = 4 часа при плотности тока j = 0,4 А/дм^2. Какой толщины получился слой никеля на изделии?

Решение

1. Физические характеристики никеля:

$$\mu \approx 59\cdot 10^{-3}\ \text{кг/моль},\ \rho \approx 8{,}75\cdot 10^{3}\ \text{кг/м}^3,\ Z = 2;$$

2. Толщина слоя:

$$\rho_{Ni} s\Delta h = \frac{\mu_{Ni} I\tau}{Z_{Ni}F};\quad \Rightarrow\quad \Delta h = \frac{\mu_{Ni} js\tau}{Z_{Ni}F\rho_{Ni}s} = \frac{\mu_{Ni} j\tau}{Z_{Ni}F\rho_{Ni}};$$

$$\Delta h \approx \frac{59\cdot 10^{-3}\cdot 40\cdot 1{,}44\cdot 10^{4}}{2\cdot 9{,}65\cdot 10^{4}\cdot 8{,}75\cdot 0^{3}} \approx 2\cdot 10^{-5}\,\text{м};$$

---

158. При электролизе раствора сернокислого цинка в течение τ = 60 мин выделилось m = 2,45 г цинка. Найти сопротивление электролита, если напряжение на электродах U = 6 В.

Решение

1. Физические характеристики цинка:

$$\mu \approx 65\cdot 10^{-3}\ \text{кг/моль},\ \rho \approx 6{,}92\cdot 10^{3}\ \text{кг/м}^3,\ Z = 2;$$

2. Сила тока в электролитической ванне:

$$m_{Zn} = \frac{\mu_{Zn}}{Z_{Zn}F} I\tau;\quad \Rightarrow\quad I = \frac{m_{Zn}\cdot Z_{Zn}\cdot F}{\mu_{Zn}\tau} \approx \frac{2{,}45\cdot 10^{-3}\cdot 2\cdot 9{,}65\cdot 10^{4}}{65\cdot 10^{-3}\cdot 3600} \approx 2\text{А};$$

3. Сопротивление электролита:

$$R = \frac{U}{I} = 3\ \text{Ом};$$

---

159. Последовательно с электролитической ванной включен амперметр, показывающий силу тока I_A = 1,5 А. Какую поправку надо внести в показания амперметра, если за время τ = 10 мин на катоде выделилось m = 0,316 г меди?

Решение

1. Физические характеристики меди:

$$\mu \approx 64\cdot 10^{-3}\ \text{кг/моль},\ \rho \approx 8{,}93\cdot 10^{3}\ \text{кг/м}^3,\ Z = 2;$$

2. Сила тока через электролитическую ванну:

$$m_{Cu} = \frac{\mu_{Cu}}{Z_{Cu}F} I\tau; \quad \Rightarrow \quad I = \frac{m_{Cu}\cdot Z_{Cu}\cdot F}{\mu_{Cu}\tau} \approx \frac{3{,}16\cdot 10^{-4}\cdot 2\cdot 9{,}65\cdot 10^{4}}{64\cdot 10^{-3}\cdot 600} \approx 1{,}588\text{A};$$

3. В показания амперметра следует внести поправку:

$$\Delta I = I - I_A \approx +0{,}088\text{A};$$

---

160. При электролизе $ZnSO_4$ была совершена работа A = 10 кВт·ч. Определить количество полученного цинка, если на зажимах ванны поддерживалось напряжение U = 4 В.

Решение

1. Физические характеристики цинка:

$$\mu \approx 65\cdot 10^{-3}\ \text{кг/моль},\ \rho \approx 6{,}92\cdot 10^{3}\ \text{кг/м}^3,\ Z = 2;$$

2. Масса полученного цинка:

$$m_{Zn} = \frac{\mu_{Zn}}{Z_{Zn}F} I\tau = \frac{\mu_{Zn}}{Z_{Zn}F}\frac{A}{U\tau}\tau = \frac{\mu_{Zn}A}{Z_{Zn}FU} \approx \frac{65\cdot 10^{-3}\cdot 3{,}6\cdot 10^{7}}{2\cdot 9{,}65\cdot 10^{4}\cdot 4} \approx 0{,}3\text{кг};$$

---

161. При электролизе медного купороса расходуется мощность N. В течение времени τ выделяется масса m меди. Определить сопротивление электролита.

Решение

1. Физические характеристики меди:

$$\mu \approx 64\cdot 10^{-3}\ \text{кг/моль},\ \rho \approx 8{,}93\cdot 10^{3}\ \text{кг/м}^3,\ Z = 2;$$

2. Сила тока в электролитической ванне:

$$m = \frac{\mu}{ZF}\sqrt{\frac{N}{R}}\tau; \quad \Rightarrow \quad mZF\sqrt{R} = \mu\sqrt{N}\tau; \quad R = \frac{\mu^2 N\tau^2}{m^2 Z^2 F^2} = N\left(\frac{\mu\tau}{mZF}\right)^2;$$

---

161. Через электролитическую ванну в течение времени τ протекает ток силой I. Под каким давлением будет находиться выделившийся в сосуд Объёмом V кислород при температуре Т?

Решение

1. Давление кислорода в заданном объёме в соответствии с уравнение состояния:

$$pV = \frac{m}{\mu}RT; \quad \Rightarrow \quad p = \frac{mRT}{\mu V};$$

2. Масса выделившегося кислорода:

$$m = \frac{\mu I\tau}{ZF};$$

3. Давление кислорода в заданном объёме после электролиза в течение времени τ:

$$p = \frac{I\tau RT}{ZFV};$$

---

162. В электролитической ванне, содержащей раствор азотнокислого серебра $AgNO_3$, течёт ток силой I. Сколько атомов серебра выделится в течение времени τ?

Решение

1. Масса выделившегося серебра:

$$m = \frac{\mu I\tau}{ZF};$$

2. Число атомов серебра, соответствующее данной массе:

$$\frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_A}; \quad \Rightarrow \quad N = \frac{mN_A}{\mu} = \frac{I\tau N_A}{ZF};$$

---

163. При силе ока I за время τ в электролитической ванне выделилась масса m металла с валентностью Z. Какова атомная масса металла?

Решение

$$m = \frac{\mu I\tau}{ZF}; \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{mZF}{I\tau};$$

---

164. Сколько атомов хлора Cl и железа Fe выделится из раствора хлористого железа $FeCl_2$ при пропускании через электролит в течение времени τ силы тока I?

Решение

1. Масса и число атомов элементов, выделяющихся на катоде:

$$\frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_A}; \quad \Rightarrow \quad N = \frac{mN_A}{\mu} = \frac{I\tau N_A}{ZF};$$

$$\left.\begin{aligned} N_{Cl} &= \frac{I\tau N_A}{Z_{Cl}F}; \\ N_{Fe} &= \frac{I\tau N_A}{Z_{Fe}F}; \end{aligned}\right\}$$

Электромагнитные явления

9. Индукция магнитного поля. Сила Ампера

1. Найти величину максимального момента сил, действующих на рамку с током силой I = 2 A, если площадь рамки составляет s = 100 см^2, а индукция магнитного поля B = 0,05 Тл.

Решение

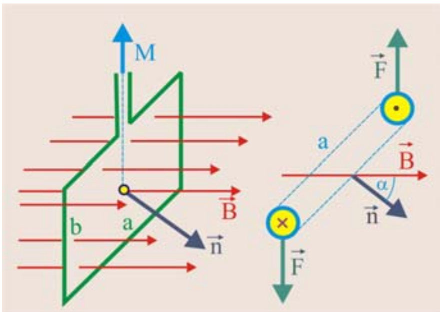


Рис. 1. Контур в магнитном поле

1. Важное прикладное значение имеет анализ механических сил, действующих на внесённый в магнитное поле замкнутый контур с током. Во многих технических устройствах осуществляется преобразование энергии магнитного поля в кинетическую энергию вращения.

2. Рассмотрим контур в виде прямоугольной рамки, по которой течёт постоянный ток величиной I, рамка помещена в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ (рис. 1).

3. Силы, действующие на стороны *a*, в соответствие с законом Ампера будут стремиться растянуть или сжать рамку в вертикальных направлениях. Силы, действующие на стороны *b*, стремятся вращать рамку вокруг вертикальной оси z, т.к. по сути это типичная пара сил с моментом $M_z(F_1, F_2)$. Если магнитный момент контура $p_m = IS$ считать постоянным, то элементарная механическая работа, производимая силами Ампера при повороте контура на угол $d\alpha$, определится как:

$$\delta A = M_z(\vec{F}_1, \vec{F}_2)d\alpha .$$

4. Поскольку магнитный поток, проходящий через площадь контура s равен

$$\Phi_B = SB\cos\alpha ,$$

то его изменение при повороте контура на угол $d\alpha$ запишется следующим образом:

$$d\Phi_B = SB\sin\alpha d\alpha .$$

5. Используя уравнение магнитного потока последнее уравнение можно переписать так:

$$M_z(\vec{F}_1, \vec{F}_2)d\alpha = ISB\sin\alpha d\alpha ,$$

откуда:

$$M_z(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = ISB\sin\alpha = p_m B\sin\alpha ,$$

или в векторной форме:

$$\vec{M}_z(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = (\vec{p}_m \times \vec{B}).$$

6. Таким образом:

$$M_{z(max)}\left(\vec{F}_1,\vec{F}_2\right) = ISB = 2\cdot 5\cdot 10^{-2}\cdot 10^{-2} = 10^{-3}\,Н\cdot м;$$

2. Найти максимальный момент пары сил, действующих на рамку с током силой I = 5 А, если длина рамки a = 20 см, а ширина b = 10 см. Индукция магнитного поля B = 0,2 Тл. Определить направление вращения рамки.

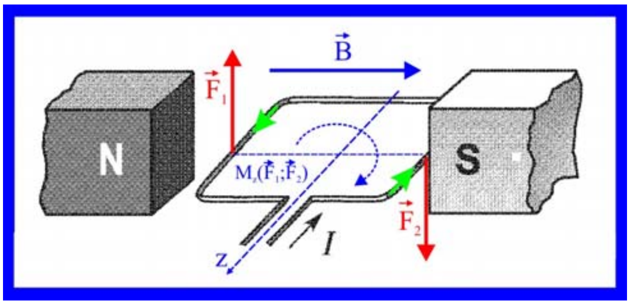


Рис. 2. Направление вращения

Решение

1. Площадь контура, образованного рамкой:

$$s = ab\,;$$

2. Момент сил, действующий на рамку:

$$M_{z(max)}\left(\vec{F}_1,\vec{F}_2\right) = ISB;$$

$$M_{z(max)}\left(\vec{F}_1,\vec{F}_2\right) = 5\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1\cdot 0{,}2 = 2\cdot 10^{-2}\,Н\cdot м;$$

3. Направление сил Ампера определяется правилом векторного произведения или по правилу левой руки: если левую руку расположить так, чтобы раскрытую ладонь «пронизывал» вектор магнитной индукции, а четыре вытянутых пальца совпадали с направление тока в проводнике, то отведенный в сторону большой палец укажет направление силы Ампера.

3. Определить индукцию магнитного поля, если максимальный вращающий момент сил, действующих на рамку, площадью s = 1 см^2, $M_z\left(\vec{F}_1;\vec{F}_2\right)$ = 5·10^{-4} Н·м при силе тока I = 1 А. На рамке намотано n = 100 витков провода.

Решение

$$M_{z(max)}\left(\vec{F}_1,\vec{F}_2\right) = nISB; \quad \Rightarrow \quad B = \frac{M_{z(max)}\left(\vec{F}_1;\vec{F}_2\right)}{nIS} = \frac{5\cdot 10^{-4}}{100\cdot 1\cdot 10^{-4}} = 5\cdot 10^{-2}\,Тл;$$

4. По n = 50 виткам плоской рамки площадью S = 40 см^2 течёт ток силой I = 5 А. Рамка расположена в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,12 Тл. Какой максимальный механический момент действует на рамку?

Решение

$$M_{z(max)}\left(\vec{F}_1,\vec{F}_2\right) = nISB = 50\cdot 5\cdot 4\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}12 = 0{,}12\ Н\cdot м;$$

5. Плоская прямоугольная катушка с n = 200 витками проволоки со сторонами a = 10 см, b = 5 см находится целиком в однородном магнитном поле с

индукцией B = 50 мТл. Какой максимальный вращающий момент может действовать на катушку, если по ней пропускать ток силой I = 2 А?

Решение

$$M_{z(max)}\left(\vec{F}_1,\vec{F}_2\right) = nIabB = 200\cdot 2\cdot 0{,}1\cdot 0{,}05\cdot 5\cdot 10^{-2} = 0{,}1\ \text{Н}\cdot\text{м};$$

---

6. Определить направление силы Ампера, действующей на проводник с током.

Решение

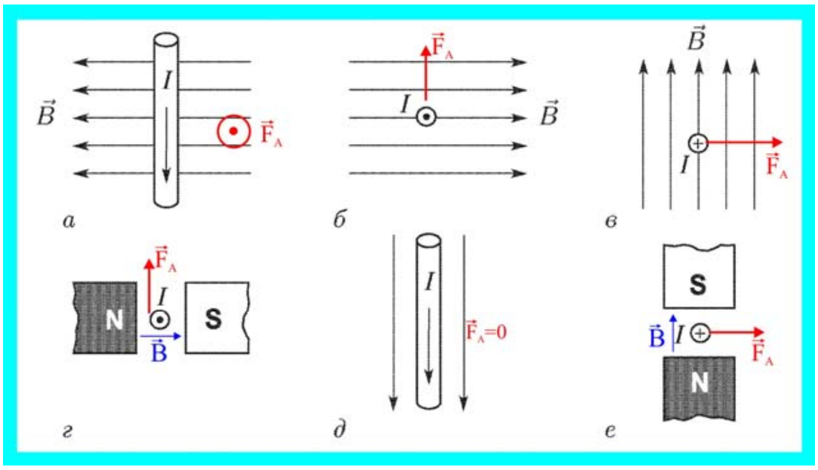


Рис. 6. Направление силы Ампера

7. Определить направление вектора магнитной индукции.

Решение

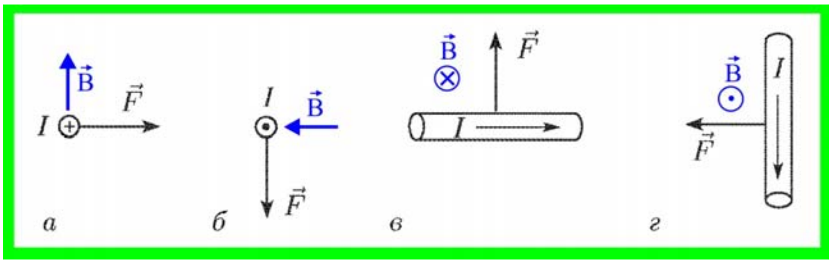


Рис. 7. Направление вектора магнитной индукции

8. Определить направление тока в проводниках.

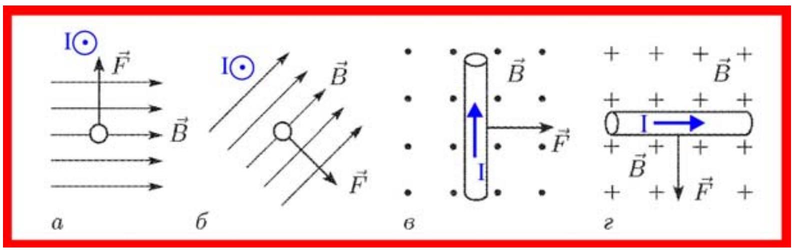


Рис. 8. Направление тока в проводниках

9. Определить направление силы тока в соленоиде и в проводнике при заданных взаимодействиях.

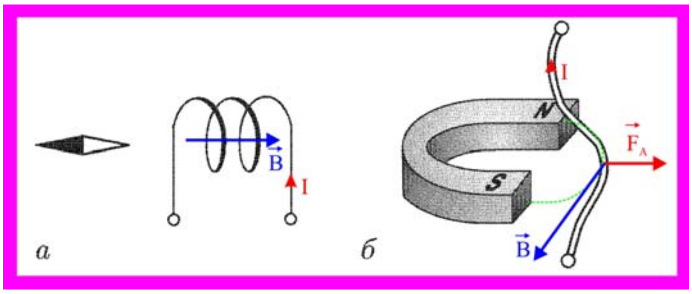


Рис. 9. Взаимодействия с магнитным полем

10. Какова индукция магнитного поля, если на перпендикулярный вектору магнитной индукции проводник с током силой I = 250 А и с активной длиной ℓ = 6 м действует сила F = 180 Н?

Решение

$$\vec{F}_A = I(\vec{B}\times\vec{\ell}); \quad |\vec{F}_A| = IB\ell\sin(\vec{B};\vec{\ell}); \quad \sin(\vec{B};\vec{\ell}) = 1; \quad F_A = IB\ell; \quad B = \frac{F_A}{I\ell} = 0{,}12\text{Тл};$$

---

11. Проводник с током силой I = 5 А помещён в магнитное поле с индукцией B = 10 Тл. Угол между направлением тока и поля составляет $\alpha = 60^0$. Найти активную длину проводника, если на него действует сила F_A = 20 Н.

Решение

$$\vec{F}_A = I(\vec{B}\times\vec{\ell}); \quad |\vec{F}_A| = IB\ell\sin\alpha; \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{F_A}{IB\sin\alpha} = \frac{20}{5\cdot 10\cdot 0{,}87} \approx 0{,}46\text{м};$$

---

12. На проводник длиной ℓ = 50 см с силой тока I = 2 А в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,1 Тл действует сила F = 0,05 Н. Найти величину угла между направлением тока и вектором магнитной индукции.

Решение

$$\vec{F}_A = I(\vec{B}\times\vec{\ell}); \quad |\vec{F}_A| = IB\ell\sin\alpha; \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arcsin\left(\frac{F_A}{IB\ell}\right) = \arcsin\left(\frac{0{,}05}{2\cdot 0{,}1\cdot 0{,}5}\right) = 30^0;$$

---

13. С какой силой действует однородное магнитное поле с индукцией B = 0,15 Тл на прямолинейный проводник длиной ℓ = 0,2 м, если его сопротивление R = 0,01 Ом, электрическая мощность N = 4 Вт? Вектор индукции поля перпендикулярен проводника.

Решение

$$I = \sqrt{\frac{N}{R}}; \quad F_A = IB\ell = \sqrt{\frac{N}{R}}B\ell = 0{,}6\text{Н};$$

---

14. Прямолинейный проводник длиной ℓ = 0,2 м и массой $m = 5\cdot 10^{-3}$ кг подвешен на двух лёгких нитях в однородном магнитном поле, вектор индукции которого имеет горизонтальное направление и перпендикулярен проводнику. Какой величины и какого направления надо пропустить через проводник ток, чтобы нити разорвались? Индукция магнитного поля составляет B = 0,5 Тл. Каждая нить разрывается при нагрузке $\Im$ = 0,4 Н.

Решение

1. Максимально допустимая нагрузка на нити:

$$\vec{\mathfrak{I}} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2;$$

2. Условие равновесия проводника в условиях четырёх действующих сил $\{\vec{N}_1; \vec{N}_2; m\vec{g}; \vec{F}_A\}$ в проекции на вертикальную ось:

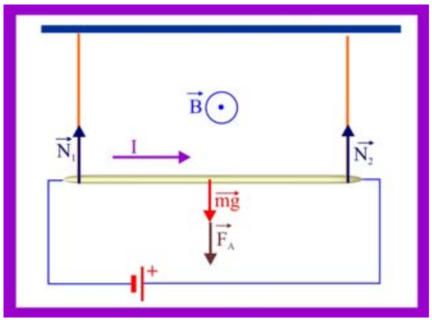


Рис. 14. Разрыв нитей

$$\mathfrak{I} \le mg + F_A = mg + IB\ell;$$

$$\mathfrak{I} - mg = IB\ell;$$

$$I = \frac{\mathfrak{I} - mg}{B\ell} = \frac{0{,}8 - 0{,}05}{0{,}01} = 7{,}5A;$$

---

15. Проводник длиной ℓ и массой m подвешен на тонких проволочках. При прохождении по проводнику тока силой I проволочки отклоняются от вертикали на угол α. Определить величину индукции магнитного поля.

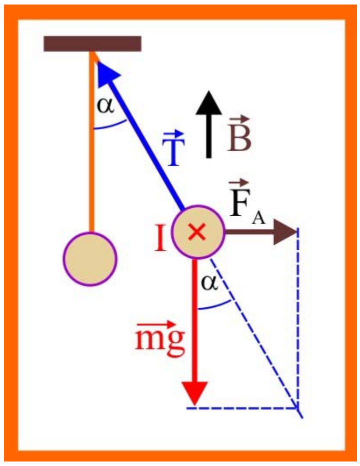


Рис. 15. Отклонение проводника

Решение

1. Условия равновесия проводника в отклонённом состоянии:

$$\left.\begin{aligned} T\cos\alpha - mg = 0; \\ F_A - T\sin\alpha = 0; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{F_A}{mg} = \operatorname{tg}\alpha;$$

2. Выразим силу Ампера через характеризующие её величины

$$\frac{IB\ell}{mg} = \operatorname{tg}\alpha; \quad \Rightarrow \quad B = \frac{mg\operatorname{tg}\alpha}{I\ell};$$

---

16. На горизонтальных рельсах, расстояние между которыми ℓ = 0,5 м, перпендикулярно им лежит стержень массой m = 0,5 кг. Рельсы и стержень помещены в магнитное поле с индукцией B = 40 мТл. Коэффициент трения между рельсами и стержнем μ = 0,1. Ток какой силы нужно пропускать по проводнику, чтобы он начал равномерно передвигаться.

Решение

$$\mu mg = IB\ell; \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\mu mg}{B\ell} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}5 \cdot 9{,}82}{4 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}5} \approx 24{,}55A;$$

---

17. Прямолинейный проводник длиной ℓ = 2 м, по которому пропущен ток силой I = 4,5 А, помещён в однородное магнитное поле с индукцией B = 0,5 Тл перпендикулярно линиям магнитной индукции. Проводник сместился на расстояние r = 0,2 м. Вычислить работу сил поля при указанном смещении проводника.

Решение

$$A = F_A r = IB\ell r = 4{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}9\text{Дж};$$

---

18. Проводник длиной ℓ = 0,3 м стоком силой I = 20 А расположен под углом α = 30^0 к однородному магнитному полю с индукцией B = 0,4 Тл. Определить работу, совершённую полем при перемещении проводника на расстояние r = 0,25 м перпендикулярно магнитному полю.

Решение

$$A = F_A r\sin\alpha = IB\ell r\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = 20 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}5 \approx 0{,}3\text{Дж};$$

---

19. Два параллельных проводника с одинаковыми силами токов, находящимися на расстоянии r = 8,7 см друг от друга, притягиваются друг к другу с силой F = 25 мН. Определить силу тока в проводниках, если длина каждого из них ℓ = 320 см.

Решение

$$F = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{2I_1I_2}{r}\ell; \quad \mu \approx 1; \quad I_1 = I_2; \quad \Rightarrow \quad F = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi r}\ell; \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\frac{\text{Гн}}{\text{м}};$$

$$I = \sqrt{\frac{2\pi rF}{\mu_0\ell}} = \sqrt{\frac{6{,}28 \cdot 0{,}087 \cdot 25 \cdot 10^{-3}}{12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot 3{,}2}} \approx 58{,}3\text{А};$$

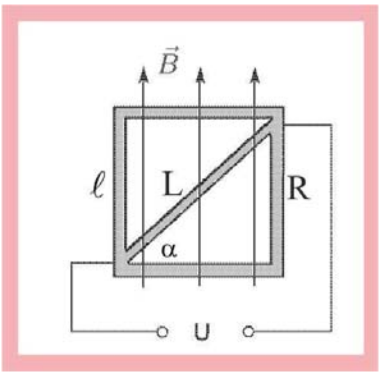


Рис. 20. Контур с диагональю

20. К источнику постоянного напряжения U = 130 В подключен алюминиевый проволочный квадратный контур с диагональю, выполненный проводом с площадью поперечного сечения s. Плоскость контура расположена параллельно линиям индукции магнитного поля. Определить модуль силы, действующей со стороны поля на контур, если индукция магнитного поля равна В.

Решение

1. Обозначим длину стороны квадрата через ℓ а её электрическое сопротивление через R, длину диагонали – L, тогда:

$$L = R\sqrt{2};$$

2. Электрическое сопротивление стороны квадрата:

$$R_\ell = \frac{\xi\ell}{s};$$

3. Электрическое сопротивление диагонали квадрата:

$$R_L = \frac{\sqrt{2}\xi\ell}{s};$$

4. Суммарное сопротивление двух сторон квадрата:

$$R_{2\ell} = 2R_\ell = \frac{2\xi\ell}{s};$$

5. Сила тока через стороны квадрата и его диагональ:

$$I_\ell = \frac{Us}{2\xi\ell}; \quad I_L = \frac{Us}{\sqrt{2}\xi\ell};$$

6. Сила Ампера будет действовать только на стороны, перпендикулярные полю и на диагональ:

$$F_A = \frac{Us}{\xi\ell}B\ell + \frac{Us}{\sqrt{2}\xi\ell}B\sin\alpha\sqrt{2}\ell = \frac{UsB}{\xi}\left(1+\sin 45^0\right);$$

---

21. Металлический шарнирно закреплённый в точке O стержень массой m = 1 кг и длиной ℓ = 0,5 м прислонён к опоре так, что образует с горизонтом угол α = 60^0. Индукция магнитного поля равна B = 2 Тл. Ток какой силы надо пропустить по стержню, чтобы он перестал оказывать давление на вертикальную опору?

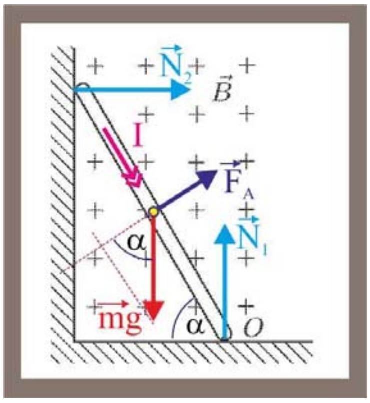


Рис. 21. Опёртый стержень

Решение

1. Сила Ампера перпендикулярна стержню и приложена в его середине. Величина N_2 = 0 при равенстве модуля силы Ампера проекции силы тяжести на перпендикуляр к стержню:

$$IB\ell\sin\alpha = mg\cos\alpha; \quad \Rightarrow \quad I = \frac{mg}{B\ell\,tg\alpha}; \quad I \approx \frac{1\cdot 10\cdot 0{,}5}{2\cdot 0{,}5\cdot 1{,}8} \approx 2{,}7A;$$

---

22. Стержень массой m лежит перпендикулярно рельсам, расстояние между которыми ℓ. Рельсы составляют с горизонтом угол α. Какой должна быть индукция магнитного поля, перпендикулярная плоскости рельсов, чтобы стержень пришёл в движение при пропускании по нему тока силой I. Коэффициент трения скольжения стержня о рельсы равен μ.

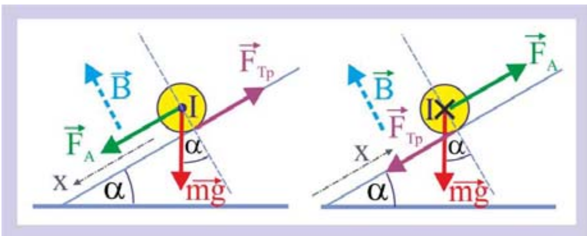


Рис. 22. Стержень на рельсах

Решение

$$IB_1\ell + mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = 0; \quad \Rightarrow \quad B_1 = \frac{mg(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}{I\ell};$$

$$IB_1\ell - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = 0; \quad \Rightarrow \quad B_1 = \frac{mg(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)}{I\ell};$$

---

10. Сила Лоренца

23. Электрон влетает в однородное магнитное поле, индукция которого B = 0,5 Тл, со скоростью v = 2·10^4 км/с перпендикулярно линиям индукции. Определить силу, с которой магнитное поле действует на электрон. Чему равна работа этой силы?

Решение

1. Значение силы Лоренца, действующей на электрон:

$$\vec{F}_L = e(\vec{v}\times\vec{B});\quad |\vec{F}_L| = evB\sin(\vec{v};\vec{B});\quad (\vec{v};\vec{B}) = \frac{\pi}{2};$$

$$F_L = evB = 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 2\cdot 10^{7}\cdot 0{,}5 = 1{,}6\cdot 10^{-12}\,\text{Н};$$

2. Работа силы Лоренца:

$$A_{1\to 2} = \vec{F}\cdot\vec{r}_{1\to 2};\quad A_{1\to 2} = |\vec{F}|\cdot|\vec{r}_{1\to 2}|\cdot\cos(\vec{F};\vec{r}_{1\to 2});\quad (\vec{F};\vec{r}_{1\to 2}) = \frac{\pi}{2};\quad \Rightarrow\quad A_{1\to 2} = 0;$$

---

24. В однородное магнитное поле с индукцией B = 0,8 Тл влетает протон со скоростью v = 5·10^5 м/с под углом α = 30^0 к линиям индукции. Определить силу, действующую на протон со стороны магнитного поля.

Решение

$$\vec{F}_L = e(\vec{v}\times\vec{B});\quad |\vec{F}_L| = evB\sin(\vec{v};\vec{B});\quad \sin(\vec{v};\vec{B}) = 0{,}5;$$

$$F_L = evB = 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 5\cdot 10^{5}\cdot 0{,}8\cdot 0{,}5 = 1{,}6\cdot 10^{-14}\,\text{Н};$$

---

25. Определить удельный заряд электрона, влетающего в однородное магнитное поле с индукцией B = 2·10^{-3}Тл перпендикулярно линиям индукции со скорость. v = 3,6·10^6 м/с и продолжающего движение по круговой орбите радиусом r = 1 см.

Решение

$$\vec{F}_L + \vec{F}_i = 0;\quad \Rightarrow\quad evB = \frac{m_e v^2}{r};\quad \zeta = \frac{e}{m_e} = \frac{v}{Br} = \frac{3{,}6\cdot 10^{6}}{2\cdot 10^{-3}\cdot 1\cdot 10^{-2}} = 1{,}8\cdot 10^{11}\,\frac{\text{Кл}}{\text{кг}};$$

---

26. Протон, прошедший ускоряющую разность потенциалов U, влетает в однородное магнитное поле с индукцией B и движется по окружности. Определить радиус окружности r. Будет ли изменяться энергия электрона при движении в магнитном поле?

Решение

1. Скорость протона после разгона электрическим полем:

$$q_p U = \frac{m_p v^2}{2};\quad \Rightarrow\quad v = \sqrt{\frac{2q_p U}{m_p}};$$

2. Радиус траектории протона в магнитном поле:

$$q_p vB = \frac{m_p v^2}{r}; \quad \Rightarrow \quad r = \frac{m_p v}{q_p B} = \frac{m_p}{q_p B}\sqrt{\frac{2q_p U}{m_p}} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{m_p U}{q_p}};$$

3. Энергия протона в магнитном поле:

$$K_p = \frac{m_p v^2}{2} = q_p U = \text{const};$$

---

27. В однородное магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции влетает электрон со скоростью v. Определить индукцию поля, если электрон описал окружность радиусом r.

Решение

$$\vec{F}_L + \vec{F}_i = 0; \quad \Rightarrow \quad evB = \frac{m_e v^2}{r}; \quad B = \frac{m_e v}{e};$$

---

28. Электрон и протон, двигаясь с одинаковой скоростью, попадают в однородное поле. Сравнить радиусы кривизны траекторий протона и электрона.

Решение

$$\left.\begin{aligned} r_e &= \frac{m_e v}{eB}; \\ r_p &= \frac{m_p v}{eB}; \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{r_p}{r_e} = \frac{m_p}{m_e} = \frac{1{,}67\cdot 10^{-27}}{9{,}11\cdot 10^{-31}} \approx 1833;$$

---

29. Электрон и протон, удалённые друг от друга на значительное расстояние, находятся в однородном магнитном поле. Сравнить угловые скорости частиц.

Решение

$$\left.\begin{aligned} ev_e B &= \frac{m_e v_e^2}{r_e}; \\ ev_p B &= \frac{m_p v_p^2}{r_p}; \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} eB &= \frac{m_e \omega_e r_e}{r_e}; \\ eB &= \frac{m_p \omega_p r_p}{r_p}; \end{aligned}\right\} \quad \frac{\omega_e}{\omega_p} = \frac{m_p}{m_e} \approx \frac{1{,}67\cdot 10^{-27}}{9{,}11\cdot 10^{-31}} \approx 1833;$$

---

30. Электрон движется по окружности в однородном магнитном поле с индукцией B = 12 мТл со скоростью $v = 3\cdot 10^4$ м/с. Определить период обращения электрона.

Решение

$$evB = \frac{m_e v^2}{r}; \quad eB = \frac{m_e v}{r} = \frac{m_e \omega r}{r} = m_e \omega = \frac{2\pi m_e}{T};$$

$$T = \frac{2\pi m_e}{eB} \approx \frac{6{,}28\cdot 9{,}11\cdot 10^{-31}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 12\cdot 10^{-3}} \approx 3\cdot 10^{-9}\,\text{с};$$

---

31. Электроны, летящие в телевизионной трубке, обладают энергией K_e = $1{,}92 \cdot 10^{-15}$ Дж. Трубка ориентирована так, что электроны движутся с юга на север. Вертикальная составляющая земного магнитного поля направлена вниз, его индукция составляет B = $55 \cdot 10^{-6}$ Тл. В каком направлении будет отклоняться электронный луч? Каково ускорение каждого электрона. На сколько отклонится луч по вертикали , пролетев расстояние L = 0,2 м внутри трубки?

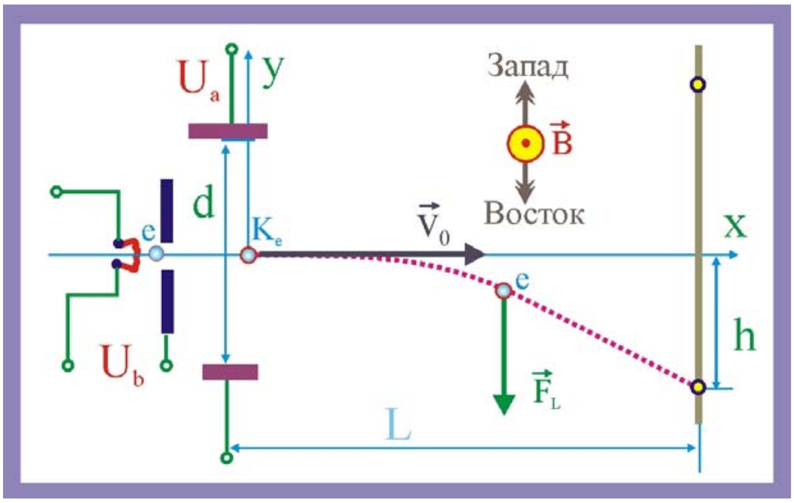


Рис. 31. Отклонение электрона

Решение

1. Начальная скорость электрона:

$$K_e = \frac{m_e v^2}{2}; \quad v = \sqrt{\frac{2K_e}{m_e}} \approx \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}92 \cdot 10^{-15}}{9{,}11 \cdot 10^{-31}}} \approx 6{,}5 \cdot 10^7 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

2. Ускорение электрона:

$$evB = m_e a; \quad a = \frac{evB}{m_e} \approx \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 6{,}5 \cdot 10^7 \cdot 55 \cdot 10^{-6}}{9{,}11 \cdot 10^{-31}} \approx 6{,}5 \cdot 10^{14} \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

3. Отклонение электрона к востоку вследствие действия силы Лоренца:

$$\left.\begin{aligned} L &= v_0 \tau; \\ h &= \frac{a\tau^2}{2}. \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} \tau &= \frac{L}{v_0}; \\ h &= \frac{aL^2}{2v_0^2}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad h \approx \frac{6{,}5 \cdot 10^{14} \cdot 0{,}04}{2 \cdot 4{,}2 \cdot 10^{15}} \approx 5{,}4 \cdot 10^{-3}\text{м};$$

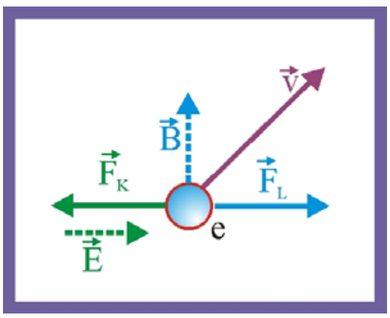


Рис. 32. Полёт электрона

32. Напряжённость однородного электрического поля равна E = 500 В/м, а индукция однородного магнитного поля составляет B = 1 мТл, причём $\vec{E} \perp \vec{B}$. С какой скоростью должен лететь электрон, чтобы двигаться прямолинейно?

Решение

$$eE = eBv; \quad v = \frac{E}{B} = \frac{500}{10^{-3}} = 5 \cdot 10^5 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

---

33. Протон влетает в однородное магнитное поле, индукция которого B, со скоростью v, под углом α к линиям магнитной индукции. Определить радиус и шаг спирали, по которой движется частица.

Решение

1. Для однородного магнитного поля уравнение движения заряженной частицы можно представить векторным уравнением:

$$\vec{F} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) = m\frac{d\vec{v}}{dt}.$$

2. В данном случае сила, действующая на заряженную частицу, всегда направлена перпендикулярна вектору скорости, поэтому она оказывает влияние только на направление вектора скорости. Умножим правую и левую часть уравнения на вектор скорости $\vec{v}$

$$m\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v}\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) = 0,$$

откуда видно, что

$$\frac{d\vec{v}^2}{dt} = 0; \quad \Rightarrow \quad \vec{v}^2 = \text{const}; \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{v}\right| = \text{const}.$$

3. Пусть положительно заряженная частица массой m влетает в магнитное поле, так что вектор её начальной скорости $\vec{v}_0$ перпендикулярен вектору магнитной индукции $\vec{B}$. Движение частицы, с позиций механики, будет являться плоским. Частица будет двигаться в плоскости перпендикулярной вектору индукции.

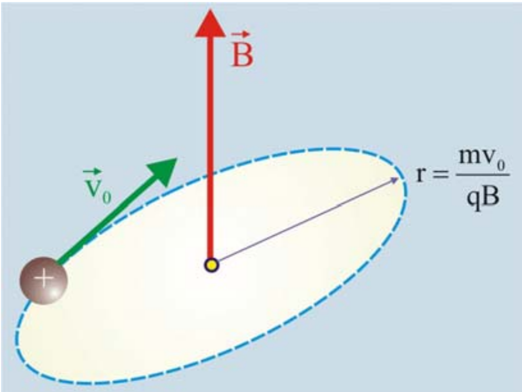


Рис. 33.1. Положительно заряженная частица в однородном магнитном поле

4. Модуль скорости остаётся, таким образом, постоянным, меняется только направление, т.е. движение по круговой траектории будет ускоренным, причём нормальное ускорение определится как

$$a_n = \frac{mv^2}{r} = qvB,$$

откуда, в частности, можно определить радиус стационарной орбиты частицы

$$r = \frac{mv}{qB},$$

и период обращения частицы

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB},$$

частоту и циклическую частоту вращения

$$f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}; \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{qB}{m}.$$

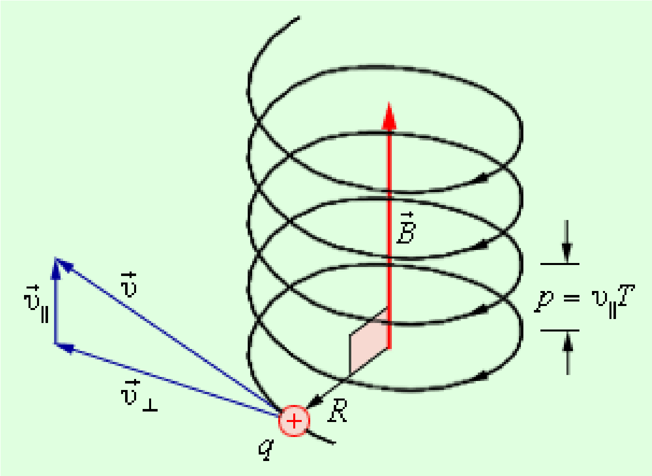


Рис. 33.2. Скорость частицы не перпендикулярна вектору магнитной индукции

5. Следует отметить, что угловая скорость частицы не зависит от её линейной скорости, а определяется исключительно массой частицы и индукцией магнитного поля. Определим далее энергию вращающейся частицы

$$W = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m\left(\frac{qBr}{m}\right)^2 = \frac{q^2B^2r^2}{2m}.$$

6. Рассмотрим далее движение заряженной частицы под произвольным углом к вектору магнитной индукции. Вектор скорости в этом случае разложить на две составляющих, параллельную вектору индукции и перпендикулярную $\vec{B}$, т.е. представить $\vec{v}_0$ в виде $v_{x(0)}$ и $v_{y(0)}$. Скорость частицы в любой момент времени можно представить как:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}.$$

7. Уравнение движения в этом случае примет вид

$$m\frac{d\left(\vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}\right)}{dt} = q\left[\left(\vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}\right)\times\vec{B}\right],$$

или

$$m\frac{d\left(\vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}\right)}{dt} = q\left(\vec{v}_{\perp}\times\vec{B}\right).$$

8. Ввиду перпендикулярности вектора $\vec{v}_{\perp}$ к $\vec{B}$ можно записать следующие соотношения

$$\frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = 0; \quad \vec{v}_{\parallel} = \mathrm{const}.$$

9. С другой стороны

$$\frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = -\frac{q}{m}\left(\vec{B}\times\vec{v}_{\perp}\right).$$

10. Если ввести в рассмотрение вектор круговой частоты $\vec{\omega}$, то:

$$\vec{\omega} = -\frac{q}{m}\vec{B},$$

то уравнение можно записать следующим образом:

$$\frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = \left(\vec{\omega}\times\vec{v}_{\perp}\right).$$

11. Составляющая скорости $\vec{v}_{\perp}$ обеспечивает движение частицы по круговой траектории, а проекция $\vec{v}_{\parallel}$ перемещает положительно заряженную частицу в направлении вектора $\vec{B}$, таким образом, траектория движения частицы будет представлять собой винтовую спираль с шагом

$$p = Tv_{\parallel} = \frac{2\pi m}{qB}v_{\parallel},$$

откуда:

$$p \approx \frac{2\pi m}{qB} v\cos\alpha .$$

12. Радиус кривизны траектории частицы:

$$r = \frac{mv\sin\alpha}{qB};$$

---

34. Протон влетает со скоростью v = 1 км/с в магнитное поле с индукцией B = 1 мТл мод углом α = 30^0 к направлению вектора индукции. Определить радиус и шаг винтовой траектории.

Решение

1. Радиус кривизны траектории протона:

$$r = \frac{m_p v\sin\alpha}{eB} \approx \frac{1{,}67\cdot10^{-27}\cdot10^{3}\cdot0{,}5}{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot10^{-3}} \approx 5{,}22\cdot10^{-3}\text{м};$$

2. Шаг винтовой траектории:

$$p = \frac{2\pi m_p}{eB} v\cos\alpha \approx \frac{6{,}28\cdot1{,}67\cdot10^{-27}\cdot10^{3}\cdot0{,}87}{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot10^{-3}} \approx 0{,}057\text{м};$$

---

35. Электрон движется в вакууме в однородном магнитном поле с индукцией B = 9,4·10^{-5} Тл, так, что вектор его скорости составляет угол α = 30^0 с направлением поля. Определить радиус витков траектории электрона и расстояние, пройденное им вдоль линий магнитной индукции за три полных витка спирали, если скорость электрона v = 2,5·10^6 м/с.

Решение

1. Радиус траектории электрона:

$$r = \frac{m_e v\sin\alpha}{eB} \approx \frac{9{,}11\cdot10^{-31}\cdot2{,}510^{6}\cdot0{,}5}{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot9{,}4\cdot10^{-5}} \approx 7{,}6\cdot10^{-3}\text{м};$$

2. Шаг винтовой спирали:

$$h \approx \frac{2\pi m_e}{eB} v\cos\alpha \approx \frac{6{,}28\cdot9{,}11\cdot10^{-31}\cdot2{,}5\cdot10^{6}\cdot0{,}87}{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot9{,}4\cdot10^{-5}} \approx 2{,}48\text{м};$$

---

36. α-частица, ускоренная в электрическом поле с разностью потенциалов U, пролетает горизонтальное магнитное поле с индукцией B. Ширина области с магнитным полем d. Определить угол отклонения частицы φ от первоначального направления.

Решение

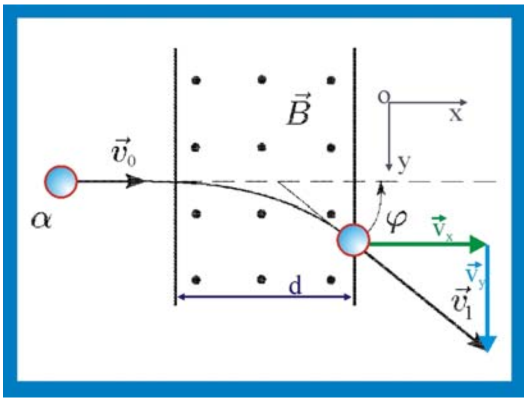


Рис. 36. Отклонение частицы

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{v_y}{v_x};$$

$$q_\alpha U = \frac{mv_0^2}{2}; \quad 2eU = \frac{mv_0^2}{2};$$

$$v_x = v_0 = 2\sqrt{\frac{eU}{m}};$$

$$v_y = a\tau = \frac{2ev_xB}{m}\frac{d}{v_x} = \frac{2eBd}{m};$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{\frac{2eBd}{m}}{2\sqrt{\frac{eU}{m}}}\right);$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\left(Bd\sqrt{\frac{e}{mU}}\right);$$

---

11. Явление электромагнитной индукции

37. Какой магнитный поток пронизывает плоскую поверхность площадью s = 3 м^2 при индукции поля B = 0,24 Тл, если нормаль к поверхности расположена под углом α = 60 ^{0} к вектору индукции?

Решение

$$\Phi_B = Bs\cos\alpha = 3 \cdot 0{,}24 \cdot 0{,}5 = 0{,}36 \text{ Вб};$$

---

38. Какой магнитный поток пронизывает плоскую поверхность площадью S = 2,4 м^2, помещённую в однородное магнитное поле с индукцией B = 1,5$\cdot$10 $^{-12}$ Тл? Плоская поверхность находится в воздухе и составляет с направлением силовых линий угол α = 30^0.

Решение

$$\Phi_B = Bs\cos(90-\alpha) = BS\sin\alpha = 1{,}5 \cdot 10^{-12} 2{,}4 \cdot 0{,}5 = 1{,}8 \cdot 10^{-12} \text{ Вб};$$

---

39. Определить магнитный поток, пронизывающий плоскую поверхность площадью S = 100 см^2 при индукции поля B = 0,2 Тл, если поверхность:

а) перпендикулярна вектору магнитной индукции;
б) параллельна вектору магнитной индукции;
в) расположена под углом α = 45^0 к вектору индукции;
г) расположена под углом α = 30^0 к вектору индукции?

Решение

а) $\Phi_B = BS\cos0^o = 10^{-2} \cdot 0{,}2 \cdot 1 = 2 \cdot 10^{-3}$Вб;

б) $\Phi_B = BS\cos 90^0 = 0$;

в) $\Phi_B = BS\cos45^o = 10^{-2} \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}707 = 1{,}41 \cdot 10^{-3}$Вб;

г) $\Phi_B = BS\cos60^o = 10^{-2} \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 1 \cdot 10^{-3}$Вб;

---

40. Определить ЭДС индукции ε_i, возникающую в проводнике, если его пронизывает магнитный поток, изменяющийся со скоростью $d\Phi_B/dt$ = 4 Вб/с.

Решение

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_B}{dt} = 4\text{В};$$

---

41. Определить электродвижущую силу индукции ε_i, возбуждаемую в контуре, если за время τ = 0,01 с магнитный поток линейно уменьшается от Φ_{max} = 0,5 Вб до Φ_{min} = 0,45 Вб.

Решение

$$\varepsilon_i = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = -\frac{\Phi_{max} - \Phi_{min}}{\Delta t} = \frac{0{,}5 - 0{,}45}{0{,}01} = 5 \text{ В};$$

---

42. Какой поток магнитной индукции создавался в контуре электрическим током, если при его исчезновении за время τ = 0,01 с в контуре возникает ЭДС самоиндукции, равная ε_i = 30 В?

Решение

$$\varepsilon_i = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = -\frac{\Phi_{max} - \Phi_{min}}{\Delta t}; \quad \Phi_{min} = 0; \quad \Phi_{max} = \varepsilon_i \tau = 0{,}3 \text{Вб};$$

---

43. В каком случае ЭДС индукции в проводнике будет больше и во сколько раз: при изменении пронизывающего его магнитного потока от Φ_1 = 10 Вб до нуля в течение τ_1 = 5 с или при изменении его от Φ_2 = 1 Вб до нуля в течение τ_2 = 0,1 с?

Решение

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -\frac{\Phi_1}{\tau_1}; \\ \varepsilon_2 &= -\frac{\Phi_2}{\tau_2}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\Phi_2 \tau_1}{\Phi_1 \tau_2} = \frac{1 \cdot 5}{10 \cdot 0{,}1} = 5;$$

---

44. Рамка, на которую намотано N = 20 витков провода, находится в магнитном поле. Определить ЭДС индукции, возникающей в рамке при изменении магнитного потока в ней от Φ_{min} = 0,1 Вб до Φ_{max} = 0,2 Вб за время τ = 0,16 с?

Решение

$$\varepsilon_i = -N\frac{\Phi_{max} - \Phi_{min}}{\tau} = 20\frac{0{,}2 - 0{,}1}{0{,}16} = 12{,}5 \text{В};$$

---

45. В замкнутом проводнике за время τ = 0,3 с магнитный поток изменяется на $\Delta\Phi$ = 0,006 Вб. Какова скорость изменения магнитного потока? Какова ЭДС в контуре? При каком условии ЭДС в контуре будет постоянной?

Решение

1. Скорость изменения магнитного потока:

$$< \frac{d\Phi_B}{dt} > \approx \frac{\Delta\Phi_B}{\tau} = \frac{0{,}06}{0{,}3} = 0{,}2\frac{\text{Вб}}{\text{с}};$$

2. ЭДС индукции в контуре:

$$\varepsilon_i = -\frac{\Delta\Phi_B}{\tau} = 0{,}2 \text{В};$$

3. Условие постоянства ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = \text{const} \quad \text{при} \quad < \frac{d\Phi_B}{dt} > = \text{const};$$

---

46. Сколько витков должна иметь катушка, чтобы при изменении магнитного потока внутри неё от Φ_1 = 0,024 Вб до Φ_2 = 0,056 Вб за τ = 0,32 с создавалась ЭДС 10 В?

Решение

$$\varepsilon_i = -N\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\tau}; \quad \Rightarrow \quad N = \frac{\varepsilon\tau}{\Phi_2 - \Phi_1} = \frac{10\cdot 0{,}32}{0{,}056 - 0{,}024} = 100;$$

---

47. Как изменился в течение τ = 0,01 с магнитный поток через катушку, если она имеет N = 2000 витков и в ней возникла ЭДС индукции ε_I = 200 В?

Решение

$$\varepsilon_i = -N\frac{\Delta\Phi_B}{\tau}; \quad \Rightarrow \quad \Delta\Phi_B = \frac{\varepsilon_i\tau}{N} = \frac{200\cdot 0{,}01}{2000} = 1\text{мВб};$$

---

48. В однородном магнитном поле находится медное проволочное кольцо, радиусом R = 0,1 м при радиусе провода r = 1 мм. Вектор индукции магнитного поля перпендикулярен плоскости витка. С какой скоростью должна изменяться магнитная индукция магнитного поля, чтобы в кольце возникал индукционный ток силой I = 10 А?

Решение

1. Сопротивление кольца:

$$\Re = \xi\frac{\ell}{S} = \xi\frac{2\pi R}{\pi r^2} \approx \frac{2\cdot 1{,}7\cdot 10^{-8}\cdot 0{,}1}{1\cdot 10^{-6}} \approx 3{,}4\cdot 10^{-3}\text{Ом};$$

2. ЭДС индукции в кольце:

$$I = \frac{\varepsilon_i}{\Re}; \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_i = I\Re \approx 3{,}4\cdot 10^{-2}\text{В};$$

3. Скорость изменения магнитной индукции:

$$\varepsilon_i = -\frac{dB}{dt}S = -\frac{dB}{dt}\pi R^2; \quad \Rightarrow \quad \frac{dB}{dt} = \frac{\varepsilon_i}{\pi R^2} = \frac{3{,}4\cdot 10^{-2}}{3{,}14\cdot 10^{-2}} \approx 1{,}1\frac{\text{Тл}}{\text{с}};$$

---

49. Металлическое кольцо радиусом R = 4,8 см расположено в магнитном поле с индукцией B = 12 мТл перпендикулярно силовым линиям. На его удаление из пространства, занятого полем затрачивается τ = 0,025 с. Какой величины ЭДС индукции при этом возникает в кольце?

Решение

$$\varepsilon_i = -\frac{dB}{dt}S \approx -\frac{B}{\tau}\pi R^2 \approx \frac{12\cdot 10^{-3}}{0{,}025}\cdot 3{,}14\cdot 2{,}3\cdot 10^{-4} \approx 3{,}47\text{мВ};$$

---

50. Магнитный поток, пронизывающий проводящий контур линейно изменился от Φ_B = 0,6 Вб до нуля, при этом в контуре, обладающим сопротивлением R = 0,24 Ом возникла ЭДС индукции ε_i = 1,2 В. Определить силу индукционного тока и время изменения магнитного потока.

Решение

1. Сила индукционного тока:

$$i_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = 5\text{А};$$

2. Время изменения магнитного потока:

$$\varepsilon_i = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}; \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta\Phi_B}{\varepsilon_i} = 0{,}5c;$$

---

51. Однослойная катушка площадью S = 10 см^2, содержащая N = 100 витков провода, помещена в однородное магнитное поле с индукцией B = 8 мТл параллельно линиям магнитной индукции. Сопротивление катушки R = 10 Ом. Найти величину заряда, прошедшего через катушку после отключения магнитного поля.

Решение

1. ЭДС индукции в катушке:

$$q_i = i_i\Delta t = \frac{\varepsilon_i}{R}\Delta t = -N\frac{\Delta B}{\Delta t R}S\Delta t = \frac{NBS}{R} = \frac{100\cdot 8\cdot 10^{-3}\cdot 10^{-3}}{10} = 8\cdot 10^{-5}\,\text{Кл};$$

---

52. Катушка с сопротивлением R= 100 Ом и площадью сечения S = 5 см^2, состоящая из N = 1000 витков, внесена в однородное магнитное поле. В течение некоторого времени индукция магнитного поля уменьшается отΦ_2 = 0,9 Тл до Φ_1 = 0,8 Тл. Какой заряд прошёл по проводнику за это время?

Решение

$$q_i = i_i\Delta t = \frac{\varepsilon_i}{R}\Delta t = -N\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t R}\Delta t = \frac{N(\Phi_2 - \Phi_1)S}{R} = \frac{10^3\cdot 0{,}1\cdot 5\cdot 10^{-4}}{100} = 5\cdot 10^{-4}\,\text{Кл};$$

---

53. Соленоид, содержащий N = 1000 витков медной проволоки сечением s = 0,2 мм^2, расположен в однородном магнитном поле параллельно линиям магнитной индукции. Индукция магнитного поля линейно изменяется со скоростью dB/dt = 10 мТл/с. Радиус соленоида R = 5 см. Определить тепловую мощность, выделяющуюся в соленоиде, концы которого замкнуты.

Решение

1. Сопротивление соленоида:

$$\Re = \xi\frac{\ell}{s} = \xi\frac{N2\pi R}{s} = 1{,}7\cdot 10^{-8}\frac{1000\cdot 6{,}28\cdot 0{,}05}{2\cdot 10^{-7}} \approx 26{,}7\ \text{Ом};$$

2. ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = -N\frac{dB}{dt}S = N\frac{dB}{dt}\pi R^2 = 10^3\cdot 10^{-2}\cdot 3{,}14\cdot 2{,}5\cdot 10^{-3} \approx 8\cdot 10^{-2}\,\text{В};$$

3. Тепловая мощность:

$$P = \frac{\varepsilon_1^2}{\Re} = 2{,}4\cdot 10^{-4}\,\text{Вт};$$

---

54. Однослойная катушка радиусом R = 2,5 см помещена в однородное магнитное поле, параллельное её оси. Индукция магнитного поля линейно изменяется со скоростью dB/dt = 10^{-2} Тл/с. Катушка содержит N = 10^3 витков

медной проволоки сечением s = 0,2 мм^2. К концам катушки подключён конденсатор ёмкостью С = 10 мкФ. Определить заряд на конденсаторе.

Решение

1. Сопротивление катушки:

$$\Re = \xi\frac{\ell}{s} = \xi\frac{N2\pi R}{s} \approx \frac{1{,}7\cdot 10^{-8}\cdot 10^{3}\cdot 6{,}28\cdot 2{,}5\cdot 10^{-2}}{2\cdot 10^{-7}} \approx 13{,}4\ \text{Ом};$$

2. ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = -N\frac{dB}{dt}S = N\frac{dB}{dt}\pi R^2 = 10^3\cdot 10^{-2}\cdot 3{,}14\cdot 6{,}25\cdot 10^{-4} \approx 1{,}96\cdot 10^{-2}\,\text{В};$$

3. Сила индукционного тока:

$$i_i = \frac{\varepsilon_i}{\Re} \approx \frac{2\cdot 10^{-2}}{13{,}4} \approx 1{,}46\cdot 10^{-3}\,\text{А};$$

4. Падение напряжения на катушке:

$$U_L = i_1\Re \approx 1{,}96\cdot 10^{-2}\,\text{В};$$

5. Заряд конденсатора:

$$Q_C = U_L C \approx 196\ \text{нКл};$$

---

55. В однородном магнитном поле с индукцией В расположены вертикально на расстоянии ℓ друг от друга два металлических прута, замкнутых наверху. Плоскость прутов перпендикулярна направлению вектора магнитной индукции магнитного поля. По прутьям без трения с постоянной скоростью v,не нарушая контакта, скользит вниз перемычка *ab* массой m. Определить сопротивление перемычки, пренебрегая сопротивлением остальной части схемы.

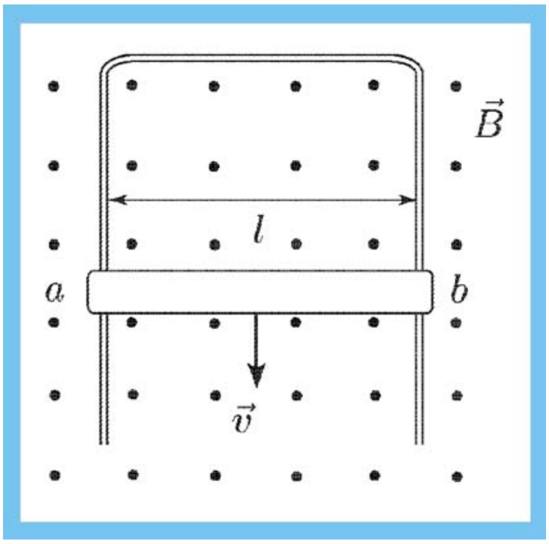


Рис. 55. Сопротивление перемычки

Решение

1. Движение перемычки с постоянной скоростью будет иметь место при равенстве модулей силы тяжести и силы Ампера:

$$i_i B\ell = mg; \quad \Rightarrow \quad i_i = \frac{mg}{B\ell};$$

2. Сопротивление перемычки:

$$\Re = \frac{\varepsilon_i}{i_i} = \frac{\dfrac{B\ell v\Delta t}{\Delta t}}{i_i} = \frac{\dfrac{B\Delta s}{\Delta t}}{i_i} - \frac{\dfrac{B\ell v\Delta t}{\Delta t}}{i_i};$$

$$\Re = \frac{B^2\ell^2 v}{mg};$$

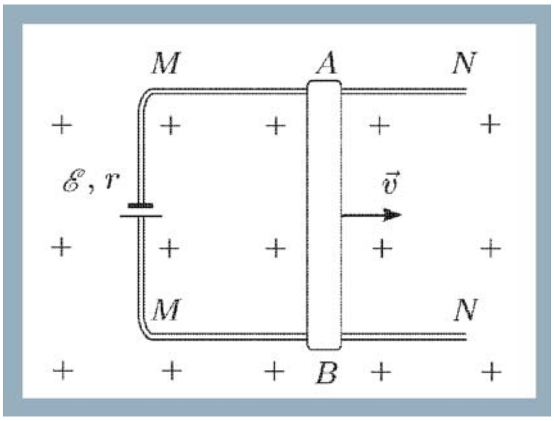


Рис. 56. Сила тока в проводнике

56. Проводник АВ движется с постоянной скоростью v = 0,5 м/с по медным шинам MN под действием силы со стороны магнитного поля. Длина проводника АВ ℓ = 0,6 м, его сопротивление R = 0,02 Ом, величина индукции магнитного поля B = 1,6 Тл. Шины подключены к источнику ЭДС ε = 0,96 В и внутренним сопротивлением r = 0,01 Ом. Индукция магнитного поля перпендикулярна к плоскости, в которой лежат медные шины и проводник. Определить силу тока в проводнике.

Решение

1. ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = B\ell v = 0{,}48\ В;$$

2. Сила тока в проводнике:

$$I = \frac{\varepsilon - \varepsilon_i}{R + r} = \frac{0{,}96 - 0{,}48}{0{,}02 + 0{,}03} = 16А;$$

---

57. Прямолинейный проводник длиной ℓ = 1,5 м находится в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,14 Тл, направленной перпендикулярно плоскости рисунка. Проводник подключён к батарее с ε = 8,5 В. Полное сопротивление внешней цепи R = 3,2 Ом. На сколько изменится сила тока в цепи, если проводник начнёт двигаться с постоянной скоростью v = 16 м/с?

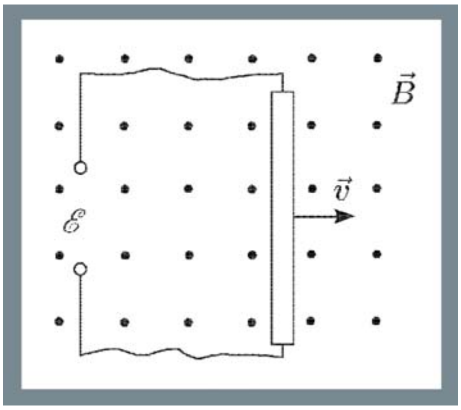


Рис. 57. Изменение силы тока

Решение

1. Сила тока в неподвижном проводнике:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R};$$

2. ЭДС индукции, возникающей при движении проводника:

$$\varepsilon_i = B\ell v;$$

3. Сила тока в движущемся проводнике:

$$I_2 = \frac{\varepsilon - \varepsilon_i}{R};$$

4. Изменение силы тока:

$$\Delta I = I_1 - I_2 = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{B\ell v}{R} = \frac{0{,}14 \cdot 1{,}5 \cdot 16}{3{,}2} = 1{,}05А;$$

---

58. Прямолинейный проводник длиной ℓ = 1,2 м с помощью гибких проводов присоединён к источнику тока с ε = 24 В и внутренним сопротивление r = 0,5 Ом. Проводник помещают в однородное магнитное поле с индукцией B = 0,8 Тл, направленное перпендикулярно плоскости рисунка. Сопротивление

внешней цепи R = 2,5 Ом. Определить силу тока в проводнике при его равномерном движении перпендикулярно силовым линиям со скоростью v = 12,5 м/с. Как изменится сила тока, когда проводник остановится?

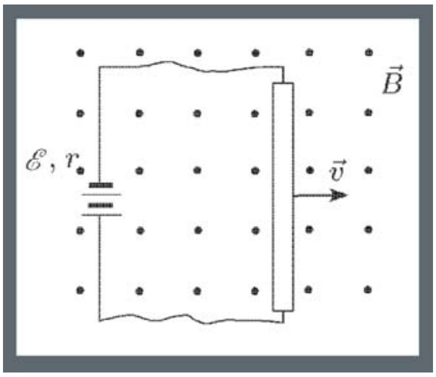


Рис. 58. Проводник в магнитном поле

Решение

1. Сила тока в неподвижном проводнике:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R + r} = \frac{24}{2{,}5 + 0{,}5} = 8A;$$

2. ЭДС индукции при движении проводника:

$$\varepsilon_i = B\ell v = 0{,}8 \cdot 1{,}2 \cdot 12{,}5 = 12B;$$

3. Сила тока в движущемся проводнике:

$$I_2 = \frac{\varepsilon - \varepsilon_i}{R + r} = \frac{24 - 12}{3} = 4A;$$

---

59. Проводник движется так, что при изменении направления движения проводника без изменения модуля его скорости сила тока в цепи изменилась на ΔI = 0,4 А. Определить скорость движения проводника длиной ℓ = 0,5 м в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,1 Тл, если полное сопротивление цепи R = 1 Ом.

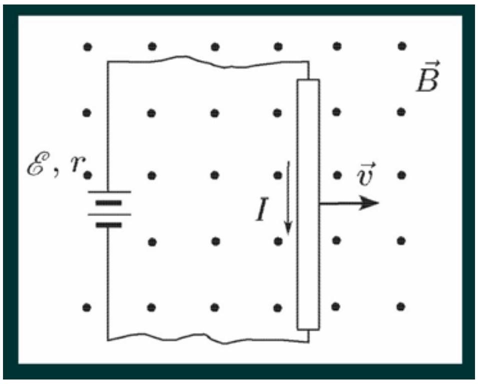


Рис. 59. Движение проводника

Решение

1. Сила тока в неподвижном проводнике:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R};$$

2. ЭДС индукции в проводнике, движущемся со скоростью v:

$$\varepsilon_i = B\ell 2v;$$

3. Падение напряжения на проводнике во время его движения:

$$U_L = \varepsilon - \varepsilon_i;$$

4. Разность силы тока в проводнике:

$$\Delta I = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{\varepsilon - \varepsilon_i}{R} = \frac{B\ell 2v}{R}; \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\Delta IR}{2B\ell} = \frac{0{,}4 \cdot 1}{2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}5} = 4\frac{м}{с};$$

---

60. Короткозамкнутая катушка, состоящая из N витков проволоки, помещена в магнитное поле, линии индукции которого направлены вдоль оси катушки. Площадь поперечного сечения катушки S, её сопротивление R. Найти мощность тепловых потерь в витках катушки, если индукция магнитного поля линейно изменяется со скоростью dB/dt.

Решение

1. ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = N\frac{dB}{dt}S;$$

2. Сила индукционного тока в катушке:

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{NS}{R}\frac{dB}{dt};$$

3. Мощность тепловых потерь в катушке:

$$P = I_i^2 R = \frac{N^2 S^2}{R}\left(\frac{dB}{dt}\right)^2;$$

---

61. Проволочную катушку из N витков помещают в магнитное поле так, что линии индукции перпендикулярны плоскости витков, и с помощью гибких проводников подсоединяют к гальванометру. При быстром удалении катушки из магнитного поля по цепи протекает заряд q, измеряемый гальванометров. Найти величину индукции магнитного поля B, считая, что все витки имеют одинаковое сечение S, а полное сопротивление цепи R.

Решение

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = N\frac{\Delta B}{\Delta t}S\frac{1}{R}; \quad \Delta q = N\frac{BS}{R}; \quad \Rightarrow \quad B = \frac{qR}{SN};$$

---

62. В однородном магнитном поле с индукцией B = 0,1 Тл расположен проволочный виток так, что его плоскость перпендикулярна линиям индукции. Виток замкнут на гальванометр. Полный заряд, прошедший по проволоке витка равен q = 7,5 мКл. На какой угол был повёрнут виток? Площадь витка S = 10 дм^2, сопротивление R = 2 Ом.

Решение

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{1}{R}(\frac{\Delta B}{\Delta t}S - \frac{\Delta B}{\Delta t}S\cos\varphi);$$

$$\Delta q = \frac{BS}{R}(1-\cos\varphi); \quad \Rightarrow \quad (1-\cos\varphi) = \frac{qR}{BS};$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{qR}{BS} = -0{,}5; \quad \varphi = \text{aek}\cos(-0{,}5) = 120^0;$$

---

63. Рамка из провода сопротивлением R = 0,01 Ом равномерно поворачивается в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,05 Тл. Ось вращения рамки лежит в её плоскости и перпендикулярна линиям индукции. Площадь рамки S = 10^{-2} м^2. Определить, какой заряд протекает через рамку при повороте её на угол: а) от 0^0 до 30^0; б) от 30^0 до 60^0; в) от 60^0 до 90^0. Угол указан между направлением вектора индукции и внешней нормалью к плоскости рамки.

Решение

а)

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{1}{R}(\frac{\Delta B}{\Delta t}S\cos 0^0 - \frac{\Delta B}{\Delta t}S\cos 30^0);$$

$$\Delta q = \frac{BS}{R}(\cos 0^0 - \cos 30^0) = \frac{0{,}05\cdot 10^{-2}}{0{,}01}\left(1-0{,}87\right) \approx 6{,}5\cdot 10^{-3}\,\text{Кл};$$

б)

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{1}{R}(\frac{\Delta B}{\Delta t}S\cos 30^0 - \frac{\Delta B}{\Delta t}S\cos 60^0);$$

$$\Delta q = \frac{BS}{R}(\cos 30^0 - \cos 60^0) = \frac{0{,}05\cdot 10^{-2}}{0{,}01}\left(0{,}87-0{,}5\right) \approx 1{,}85\cdot 10^{-3}\,\text{Кл};$$

в)

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{1}{R}(\frac{\Delta B}{\Delta t} S\cos 60^0 - \frac{\Delta B}{\Delta t} S\cos 90^0);$$

$$\Delta q = \frac{BS}{R}(\cos 60^0 - \cos 90^0) = \frac{0{,}05 \cdot 10^{-2}}{0{,}01} 0{,}5 \approx 2{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{Кл};$$

---

64. Проволочная рамка, содержащая N = 40 витков, имеет площадь поперечного сечения $S = 2{,}4{\cdot}10^{-2}$ м^2. Вокруг рамки создаётся однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости рамки. При повороте рамки на 1/4 оборота за время τ = 0,15 с в ней наводится ЭДС со средним значением ε_i = 160 мВ. Определить величину индукции магнитного поля.

Решение

1. Угол поворота рамки

$$\varphi = \frac{360^0}{4} = 90^0;$$

2. ЭДС индукции при повороте рамки на угол φ

$$\varepsilon_i = N\frac{\Delta B}{\tau}S - \frac{\Delta B}{\tau}S\cos\varphi; \quad \varepsilon_i\tau = N\Delta BS(1-\cos\varphi); \quad \cos\varphi = 0;$$

$$\Delta B = \frac{\varepsilon_i\tau}{NS} = \frac{0{,}16\cdot 0{,}15}{40\cdot 2{,}4\cdot 10^{-2}} \approx 25\ \text{мТл};$$

---

65. Катушка, состоящая из N = 80 витков проволоки, имеющая радиус r = 4 см, находится в однородном магнитном поле индукция которого B = 60,3 мТл. Катушка поворачивается на угол $\varphi = 180^0$ в течение времени τ = 0,2 с. Найти среднее значение ЭДС индукции, возникающей в катушке, если её ось до поворота направлена вдоль поля.

Решение

1. ЭДС индукции при повороте рамки на угол $\Delta\varphi_1 = 90^0$:

$$\varepsilon_i = N\frac{\Delta B}{\tau}\pi r^2 - \frac{\Delta B}{\tau}\pi r^2\cos\Delta\varphi_1; \quad \varepsilon_i\tau = N\Delta B\pi r^2(1-\cos\Delta\varphi_1); \quad \cos\Delta\varphi_1 = 0;$$

$$<\varepsilon_{i(1)}> = \frac{N\Delta B\pi r^2}{\tau} = \frac{80\cdot 60{,}3\cdot 10^{-3}\cdot 3{,}14\cdot 16\cdot 10^{-4}}{0{,}2} \approx 127\text{мВ};$$

2. При повороте рамки на угол $90^0 - 180^0$ магнитный поток через плоскость рамки будет изменяться от нуля до максимального значения, причём:

$$\left|<\varepsilon_{i(1)}>\right| = \left|<\varepsilon_{i(2)}>\right|; \quad \Rightarrow \quad <\varepsilon> = 2\left|<\varepsilon_{i(1)}>\right| = 254\text{мВ};$$

---

66. Алюминиевое кольцо ($\xi = 2{,}8{\cdot}10^{-8}$ Ом/м) расположено в магнитном поле так, что его плоскость перпендикулярна вектору магнитной индукции поля. Радиус кольца R = 12,5 см, радиус провода r = 1 мм. Величина магнитной индукции поля B = 50 мТл. За время τ = 0,5 с кольцо поворачивают на угол $\varphi = 90^0$. Определить среднюю величину возникшего в кольце индукционного тока.

Решение

1. Сопротивление кольца:

$$\Re = \xi\frac{\ell}{S} = \frac{\xi 2\pi R}{\pi r^2} = \frac{2\xi R}{r^2};$$

2. Средняя величина ЭДС индукции, возникающей в кольце при его повороте на 90^0:

$$<\varepsilon_i> = \frac{\Delta B}{\tau}\pi R^2;$$

3. Средняя величина силы возникшего индукционного тока:

$$<i_i> = \frac{<\varepsilon_i>}{\Re} = \frac{\Delta B\pi R^2 r^2}{\tau 2\xi R} \approx \frac{\pi B R r^2}{2\xi\tau} \approx \frac{3{,}14\cdot 50\cdot 10^{-3}\cdot 12{,}5\cdot 10^{-2}\cdot 10^{-6}}{2\cdot 2{,}8\cdot 10^{-8}\cdot 0{,}5} \approx 0{,}7\text{А};$$

---

67. Рамка, имеющая форму равностороннего треугольника, помещена в однородное магнитное поле с индукцией В = 0,03 Тл. Перпендикуляр к плоскости рамки составляет с направлением магнитного поля угол α = 30^0. Рамка поворачивается до положения, когда её плоскость станет перпендикулярной линиям индукции за время τ = 0,02 с, при этом в рамке возникает ЭДС индукции ε_i = 10 мВ. Найти длину стороны рамки.

Решение

1. Площадь равностороннего треугольника:

$$S = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} \approx 0{,}43a^2;$$

2. Средняя величина ЭДС индукции при повороте рамки на угол α:

$$\varepsilon_i = \frac{B}{\tau}S - \frac{B}{\tau}S\cos\alpha = \frac{B}{\tau}S\left(1-\cos 30^0\right) \approx \frac{0{,}37B}{2\tau}a^2;$$

$$2\tau\varepsilon_i = 0{,}37Ba^2; \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{\frac{2\tau\varepsilon_i}{0{,}37B}} \approx \sqrt{\frac{0{,}02\cdot 10^{-2}}{0{,}37\cdot 0{,}03}} \approx 13{,}4\text{см};$$

---

68. Из проволоки длиной ℓ = 2 м сделан квадрат, который расположен горизонтально. Какой заряд пройдёт по проводнику, если его потянуть за две диагонально расположенные вершины так, что он сложился? Сопротивление провода R = 0,1 Ом. Вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли составляет $\vec{B}_\perp$ = 50 мкТл.

Решение

1. Сторона и площадь квадрата:

$$a = \ell/4; \quad S = a^2 = \ell^2/16;$$

2. ЭДС индукции будет возникать вследствие изменения во времени площади контура от величины S до нуля:

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = B\frac{\Delta S}{\Delta t}\frac{1}{R}; \quad \Delta q = \frac{BS}{R} = \frac{B\ell^2}{16R} = \frac{5\cdot 10^{-5}\cdot 4}{1{,}6} = 1{,}25\cdot 10^{-4}\text{Кл};$$

---

69. Кольцо из гибкой проволоки радиусом R = 0,4 м находится в магнитном поле, линии, индукции которого перпендикулярны плоскости кольца. Кольцо быстро складывают в двойной прямолинейный провод, стягивая за две диаметрально противоположные точки за время τ = 0,2 с. Найти возникающую при этом величину ЭДС магнитной индукции, если поле характеризуется индукцией B = 0,1 Тл.

Решение

$$\varepsilon_i = B\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{B}{\tau}\pi R^2 = \frac{0{,}1\cdot 3{,}14\cdot 0{,}16}{0{,}2} \approx 0{,}25\ \text{В};$$

---

70. Какова индуктивность витка провода, если при силе тока i = 6 А создаётся магнитный поток Φ_B = 12 мВб. Зависит ли индуктивность витка от силы протекающего по нему тока?

Решение

$$|\varepsilon_S| = \frac{d\Phi_B}{dt} = L\frac{di}{dt}; \quad \Rightarrow \quad \Phi_B = Li; \quad L = \frac{\Phi_B}{i} = \frac{12\cdot 10^{-3}}{6} = 2\text{мГн};$$

---

71. Индуктивность катушки с железным сердечником L = 25 Гн. Определить ЭДС самоиндукции в катушке в момент замыкания и размыкания цепи, если скорость изменения силы тока di/dt = 100 А/с.

Решение

$$|\varepsilon_S| = \frac{d\Phi_B}{dt} = L\frac{di}{dt} = 2{,}5\cdot 10^3\ \text{В};$$

---

72. Задан график изменения силы тока от времени в цепи, содержащей катушку индуктивностью L = 12 Гн при размыкании цепи. Определить величину ЭДС самоиндукции и объяснить ход графика.

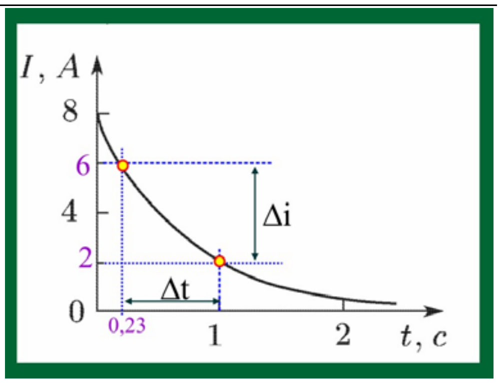


Рис. 72.1. ЭДС самоиндукции

Решение

1. Явление электромагнитной индукции наблюдается во всех случаях изменения магнитного потока через контур.

2. В частности ЭДС индукции может генерироваться в самом контуре при изменении в нём величины тока, что приводит к появлению дополнительных токов. Это явление получило название самоиндукции, а дополнительно возникающие токи называются экстратоками или токами самоиндукции.

3. Исследовать явление самоиндукции можно на установке, принципиальная схема которой приведена на рис. 72.2.

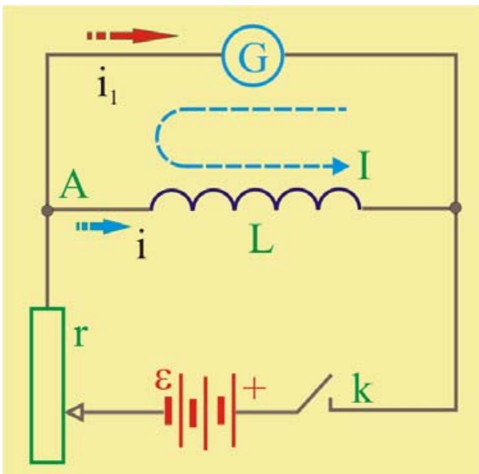


Рис. 72.2. Самоиндукция

4. Катушка L с большим числом витков, через реостат r и переключатель k подсоединяются к источнику ЭДС ε. До-

полнительно к катушке подключён гальванометр G.

5. При закороченном переключателе в точке A ток будет ветвится, причём ток величиной i будет протекать через катушку, а ток i_1 через гальванометр. Если затем переключатель разомкнуть, то при исчезновении в катушке магнитного потока возникнет экстраток размыкания I. По закону Ленца экстраток будет препятствовать уменьшению магнитного потока, т.е. будет направлен в сторону убывающего тока, а вот через гальванометр экстраток пройдёт в направлении противоположном первоначальному, что приведёт к броску стрелки гальванометра в обратном направлении.

6. Если катушку снабдить железным сердечником, то величина экстратока увеличивается. Вместо гальванометра в этом случае можно включить лампочку накаливания, при возникновении тока самоиндукции лампочка будет ярко вспыхивать.

7. Известно, что магнитный поток, сцепленный с катушкой пропорционален величине протекающего по ней тока

$$\psi = Li\,,$$

коэффициент пропорциональности L называется индуктивностью контура. Размерность индуктивности определяется уравнением:

$$L = \frac{d\psi}{i}, \quad [L] = \frac{Вб}{А} = Гн(генри).$$

8. Получим уравнение ЭДС самоиндукции ε_{si} для катушки:

$$\varepsilon_{si} = -\frac{d\psi}{dt} = -\frac{d}{dt}(Li) = -\left(L\frac{di}{dt} + \frac{dL}{dt}i\right).$$

9. В общем случае индуктивность, наряду с геометрией катушки в средах может зависеть от силы тока, т.е. $L = f(i)$, это можно учесть при дифференцировании

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{di}\frac{di}{dt}.$$

10. ЭДС самоиндукции с учётом последнего уравнения представится следующим соотношением:

$$\varepsilon_{si} = -\left(L + \frac{dL}{di}\right)\frac{di}{dt}.$$

11. Если индуктивность не зависит от величины тока, что на практике встречается наиболее часто, уравнение упрощается:

$$\varepsilon_{si} = -L\frac{di}{dt}.$$

12. ЭДС самоиндукции пропорциональна скорости изменения тока.

13. Возвращаясь к данным рис. 72.1, можно записать:

$$|\,\varepsilon_{si}\,| \approx L\frac{\Delta i}{\Delta t} \approx L\frac{i_1 - i_2}{t_2 - t_1} \approx 12\cdot\frac{6-2}{1-0{,}2} \approx 60В;$$

14. Для объяснения поведения силы тока в цепи в функции времени рассмотрим схему, состоящую из последовательно соединённых активного сопротивления R и кfтушки индуктивности L (рис. 72.3).

15. При подаче питания на схему в цепи величина тока будет увеличиваться от нулевого значения до номинала в течение некоторого промежутка времени вследствие явления самоиндукции.

16. Возникающие экстратоки в соответствие с правилом Ленца всегда направлены противоположно, т.е. они препятствуют вызывающей их причине. Они препятствуют в данном случае увеличению тока в цепи.

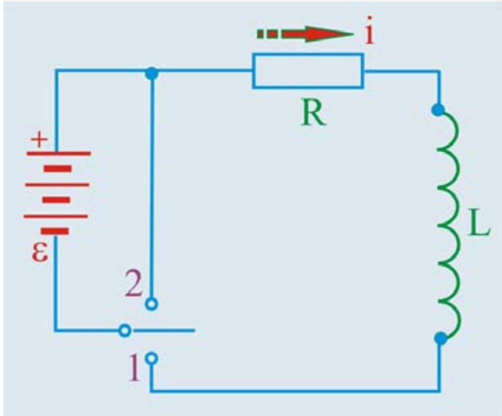


Рис. 72.3. Токи замыкания и размыкания

17. При подключении коммутатора в положение 1 экстратоки станут препятствовать увеличению тока в цепи, а в положении 2, наоборот, экстратоки будут замедлять уменьшение основного тока. Будем считать для простоты анализа, что включённое в цепь сопротивление R характеризует сопротивление цепи, внутреннее сопротивление источника и активное сопротивление катушки L. Закон Ома в этом случае примет вид:

$$\varepsilon + \varepsilon_{si} = iR\,,$$

где ε – ЭДС источника, ε_{si} – ЭДС самоиндукции, i – мгновенное значение величины тока, который является функцией времени.

18. Подставим в закон Ома уравнение ЭДС самоиндукции:

$$L\frac{di}{dt} + iR = \varepsilon\,.$$

19. Разделим в уравнении переменные:

$$Ldi = (\varepsilon - iR)dt, \quad \frac{Li}{(\varepsilon - iR)} = dt\,,$$

и проинтегрируем, считая L постоянной величиной

$$L\int\frac{di}{\varepsilon - iR} = \int dt\,,$$

$$\frac{L}{R}\ln(\varepsilon - iR) = t + const\,.$$

20. Таким образом, общее решение дифференциального уравнения можно представить в виде

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} - cons \cdot te^{-\frac{R}{L}t}\,.$$

21. Постоянную интегрирования определим из начальных условий. При t =0 в момент подачи питания ток в цепи равен нулю i(t) = 0. Подставляя нулевое значение тока в уравнение i(t), получим:

$$const = \frac{\varepsilon}{R}\,.$$

Решение уравнения i(t) примет вид:

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{L}{R}t}\right),$$

т.е. сила тока в рассматриваемой цепи с индуктивностью может либо нарастать по экспоненциальному закону от нуля до величины, определяемой законом Ома, либо спадать, опять же по экспоненциальному закону от значения, определяемого законом Ома до нуля.

73. Определить индуктивность катушки, если при увеличении силы тока в ней на ΔI = 2,2 А за время Δt = 50 мс возникает ЭДС самоиндукции со средним значением $<\varepsilon_S>$ = 1,1 В.

Решение

$$<\varepsilon_S>= L\frac{\Delta I}{\Delta t}; \quad \Rightarrow \quad L = \frac{<\varepsilon_S>\Delta t}{\Delta I} = \frac{1{,}1\cdot 5\cdot 10^{-2}}{2.2} = 0{,}025\text{Тл};$$

---

74. Проволочная прямоугольная рамка со сторонами: a = 20 см и b = 30 см, расположена перпендикулярно в однородном магнитном поле перпендикулярно к силовым линиям. Определить величину индукции магнитного поля, если при его исчезновении за Δt = 12 мс в рамке наводится ЭДС средней величины $<\varepsilon_S>$ = 3,5 мВ.

Решение

$$<\varepsilon_S>= \frac{\Delta B}{\Delta t}S = \frac{\Delta B}{\Delta t}(ab); \quad \Rightarrow \quad \Delta B = \frac{<\varepsilon_S>\Delta t}{ab} = \frac{3{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 12\cdot 10^{-3}}{0{,}2\cdot 0{,}3} \approx 7\cdot 10^{-4}\text{Тл};$$

---

75. Определить величину ЭДС самоиндукции в обмотке электромагнита индуктивностью L = 0,4 Гн при линейном изменении силы тока в ней на Δi_1 = 5А за время Δt = 20 мс.

Решение

$$<\varepsilon_S>= L\frac{\Delta i}{\Delta t} = 0{,}4\frac{5}{2\cdot 10^{-2}} = 100\ \text{В};$$

---

76. Какая ЭДС самоиндукции возникает в катушке с индуктивностью L = 68 мГн, если ток силой i = 3,8 А исчезает за время τ = 12 мс?

Решение

$$<\varepsilon_S>= L\frac{i}{\tau} = 68\cdot 10^{-3}\frac{3{,}8}{12\cdot 10^{-3}} = 21{,}53\ \text{В};$$

---

77. Ток в короткозамкнутой катушке с малым сопротивлением витков изменяется в результате плохого контакта. Создаваемое этим витком поле уменьшается на ζ = 2% в час. Определить сопротивление контакта, если индуктивность катушки L = 1 Гн.

Решение

$$iR = L\frac{i\zeta}{\Delta t}; \quad \Rightarrow \quad R = \frac{L\zeta}{\Delta t} = \frac{1\cdot 0{,}02}{3600} \approx 5{,}56\cdot 10^{-6}\text{Ом};$$

---

78. Катушку с малым сопротивлением $R \to 0$ и индуктивностью L = 3 Гн присоединили к источнику тока с ε = 15 В и $r \to 0$. Через какое время сила тока в катушке достигнет силы i – 50 А?

Решение

1. Закон Ома для цепи с индуктивностью:

$$\varepsilon + \varepsilon_{si} = iR;$$

2. Подставим в закон Ома уравнение ЭДС самоиндукции:

$$L\frac{di}{dt}+iR=\varepsilon.$$

3. Разделим в дифференциальном уравнении переменные и разрешим его относительно τ при $R \to 0$:

$$Ldi=(\varepsilon-iR)dt, \quad \Rightarrow \quad \frac{Ldi}{(\varepsilon-iR)}=dt,$$

$$\int_0^i \frac{Ldi}{\varepsilon-iR}=\int_0^\tau dt; \quad R\to 0; \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{\varepsilon}\int_0^i di=\int_0^\tau dt; \quad \Rightarrow \quad \tau=\frac{Li}{\varepsilon}=10c;$$

---

79. Определить скорость изменения силы тока в катушке индуктивностью L = 0,2 Гн, если в ней возникла ЭДС самоиндукции ε_{si} = 25 В.

Решение

1. Из уравнения ЭДС самоиндукции:

$$L\frac{di}{dt}=\varepsilon_{si}; \quad \Rightarrow \frac{di}{dt}=\frac{\varepsilon_{si}}{L}=\frac{25}{0,2}=125\frac{A}{c};.$$

---

80. За какой промежуток времени в идеальном контуре с индуктивностью L = 2·10^{-2} Гн при изменении силы тока на Δi = 0,5 А возникнет ЭДС самоиндукции ε_{si} = 10 В?

Решение

$$L\frac{di}{dt}=\varepsilon_{si}; \quad \Rightarrow \frac{\Delta i}{\Delta t}\approx\frac{\varepsilon_{si}}{L}; \quad \Delta t\approx\frac{\Delta iL}{\varepsilon_{si}}\approx\frac{0,5\cdot 2\cdot 10^{-2}}{10}\approx 1\cdot 10^{-3}c;$$

---

81. Поток магнитной индукции через площадь поперечного сечения катушки, имеющей N = 1000 витков, изменился на $\Delta\Phi_B$ = 2 мВб в результате изменения силы тока от i_1 = 4 А до i_2 = 20 А. Определить коэффициент самоиндукции катушки.

Решение

$$N\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}=L\frac{i_2-i_1}{\Delta t}; \quad \Rightarrow \quad L=\frac{N\Delta\Phi_B}{i_2-i_1}=\frac{10^3\cdot 2\cdot 10^{-3}}{16}=0,125\text{Гн};$$

---

82. По данным, приведенным на рис. 82 определить величину ЭДС индукции ε_l в проводнике MN и направление движения свободных электронов в нём, если он перемещается в плоскости рисунка перпендикулярно линиям магнитной индукции.

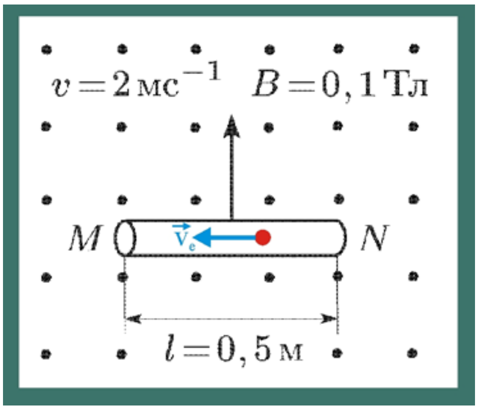


Рис. 82. Перемещение проводника

Решение

1. Величина возникающей ЭДС индукции при движении проводника в магнитном поле с постоянной скоростью v, с учё-

том перпендикулярности направления движения и силовых линий поля:

$$\varepsilon_i = B\frac{\Delta S}{\Delta t} = B\frac{\ell\Delta x}{\Delta t} = B\ell v = 0{,}1\cdot 2\cdot 0{,}5 = 0{,}1B;$$

2. Направление индукционного тока определяется правилом правой руки (в соответствии с законом Эмилия Хрисофоровича Ленца).

---

83. Какую длину активной части должен иметь прямолинейный проводник, чтобы при перемещении его с постоянной скоростью v = 15 м/с перпендикулярно вектору магнитной индукции, равной B = 0,4 Тл, в нём возбуждалась ЭДС индукции ε_I = 3 В?

Решение

$$\varepsilon_i = B\frac{\Delta S}{\Delta t} = B\frac{\ell\Delta x}{\Delta t} = B\ell v; \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{\varepsilon_i}{Bv} = \frac{3}{0{,}4\cdot 15} = 0{,}5\text{м};$$

---

84. С какой скоростью надо перемещать проводник, длина активной части которого ℓ = 1 м, под углом α = 60^0 к вектору магнитной индукции, модуль которого B = 0,2 Тл, чтобы в проводнике возбудилась ЭДС индукции ε_I = 1 В?

Решение

$$\varepsilon_i = B\frac{\Delta S}{\Delta t}\sin\alpha = B\frac{\ell\Delta x}{\Delta t}\sin\alpha = B\ell v\sin\alpha; \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\varepsilon_i}{B\ell\sin\alpha} \approx \frac{1}{0{,}2\cdot 1\cdot 0{,}87} \approx 5{,}77B;$$

---

85. Под каким углом к линиям индукции однородного магнитного поля с индукцией B = 0,5 Тл надо перемещать проводник длиной ℓ = 0,4 м с постоянной скоростью v = 15 м/с, чтобы в нём возникла ЭДС индукции ε_I = 1,5 В?

Решение

$$\varepsilon_i = B\frac{\Delta S}{\Delta t}\sin\alpha = B\frac{\ell\Delta x}{\Delta t}\sin\alpha = B\ell v\sin\alpha; \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arcsin\left(\frac{\varepsilon_i}{B\ell v}\right) \approx \frac{\pi}{6} = 30^0;$$

---

86. Реактивный самолёт Ту – 160, имеющий размах крыльев $\ell \approx$ 58 м летит со скоростью v = 2230 км/ч. Определить разность потенциалов, возникающую между оконечностями крыльев, если вертикальная составляющая магнитного поля Земли $\vec{B}_\perp$ = 5·10^{-5} Тл. Модно ли использовать эту разность потенциалов для измерения скорости стратегического ракетоносца?

Рис. 86. Стратегический ракетоносец Ту – 160

Решение

1. Величина ЭДС индукции между концами крыльевого оперения:

$$\varepsilon_i = B\frac{\Delta S}{\Delta t} = B\frac{\ell\Delta x}{\Delta t} = B\ell v = \frac{5\cdot 10^{-5}\cdot 58\cdot 2230}{3,6} \approx 1,8B;$$

2. Использовать величину ЭДС индукции для измерения скорости самолёта не представляется возможным, т.к. при подключении измерительного прибора, например, вольтметра, получается контур с фиксированной площадью, который пронизывает стационарный магнитный поток, ЭДС индукции будет равна нулю. Для появления ЭДС должна меняться какая-то величина, например вертикальная составляющая магнитного поля при изменении угла между плоскостью крыла и вертикальной составляющей магнитного поля Земли, при совершении виражей с наклоном крыльев к плоскости горизонта.

---

87. Чему равна индукция однородного магнитного поля, если при вращении в нём прямолинейного проводника длиной ℓ вокруг одного из его концов с угловой скоростью ω на концах стержня возникает разность потенциалов U? Плоскость вращения проводника перпендикулярна вектору индукции магнитного поля.

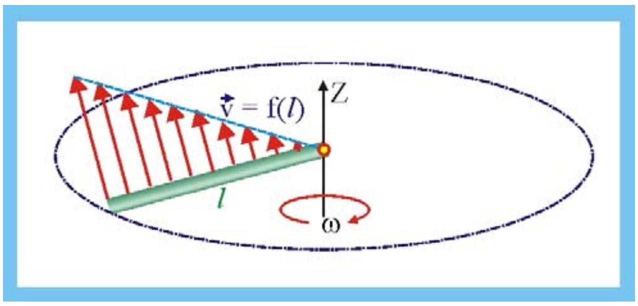


Рис. 87. Вращение стержня

Решение

1. В соответствие с теоремой Леонарда Эйлера угловая скорость всех точек стержня одинакова, а линейная скорость зависит от их положения.

2. Точка стержня, совпадающая с осью вращения Z, имеет нулевую скорость, концевая точка имеет скорость $v = \omega\ell$, поэтому в качестве расчетной необходимо выбрать скорость $< v >= \omega\ell/2$.

3. ЭДС индукции между концами вращающегося стержня:

$$\varepsilon_i = U = B\frac{\Delta S}{\Delta t} = B\frac{\ell\Delta x}{\Delta t} = B\ell < v >= B\ell\frac{\omega\ell}{2}; \quad \Rightarrow \quad B = \frac{2U}{\omega\ell^2};$$

---

88. Прямолинейный проводник длиной ℓ = 1,4 м находится в однородном магнитном поле с индукцией B = 74 мТл. Определить разность потенциалов на концах проводника при его вращении в плоскости, перпендикулярной силовым линиям, с угловой скоростью ω = 75 рад/с. для случаев прохождения оси вращения: а) через середину проводника; б) через один из концов проводника; в) на расстоянии x = ¼ ℓ от одного из концов проводника.

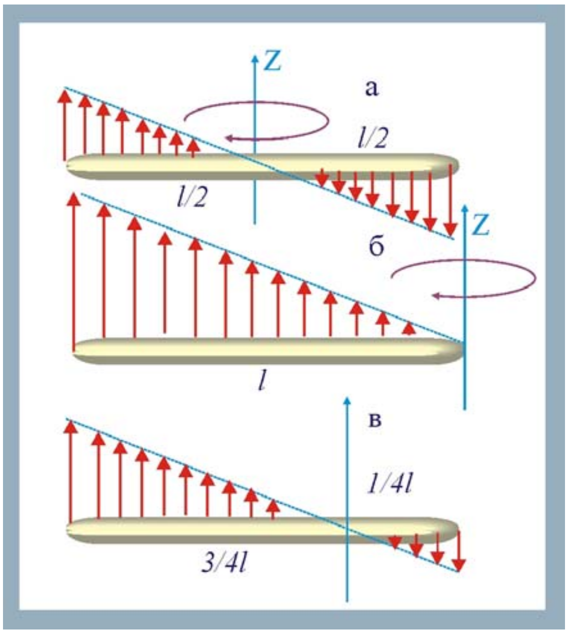


Рис. 88. Вращение проводника

Решение

а) При вращении проводника – стержня вокруг оси, проходящей через его середину, ЭДС индукции будет равна нулю, потому что:

$$\varepsilon_i = U = B\frac{\Delta S}{\Delta t} = B\frac{\ell \Delta x}{\Delta t} = B\ell < v >;$$

$$< v >= \frac{\omega\ell}{4} - \frac{\omega\ell}{4} = 0;$$

б) ЭДС индукции между концами вращающегося вокруг одного из торцов стержня:

$$\varepsilon_i = U = B\frac{\Delta S}{\Delta t} = B\frac{\ell \Delta x}{\Delta t} = B\ell < v >;$$

$$U = B\frac{\omega\ell^2}{2} = \frac{74 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}96 \cdot 75}{2} \approx 5{,}5\text{В};$$

в) При вращении проводника вокруг оси, проходящей на расстоянии x = 1/4 ℓ от правого торца стержня:

$$< v >= \frac{1}{2}\omega\ell\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\omega\ell}{4}; \quad U = B\frac{\omega\ell^2}{4} \approx 2{,}76\text{В};$$

---

89. Проводник длиной ℓ = 1 м равномерно вращается в горизонтальной плоскости с частотой ω = 10 с$^{-1}$. Ось вращения проходит через конец стержня. Вертикальная составляющая магнитного поля Земли В = 50 мкТл. Определить разность потенциалов между концами проводника.

Решение

$$\varepsilon_i = U = B\frac{\Delta S}{\Delta t} = B\frac{\ell \Delta x}{\Delta t} = B\ell < v >= B\frac{\omega\ell^2}{2} = \frac{10 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 10^{-5}}{2} = 2{,}5 \cdot 10^{-4}\text{В};$$

---

90. Горизонтальный металлический стержень длиной ℓ = 0,5 м вращается вокруг вертикальной оси в магнитном поле Земли, проходящей через один из его концов. Период вращения стержня Т = 0,5 с. Определить ε_i?

Решение

$$\omega = \frac{2\pi}{T}; \quad \varepsilon_i = U = \frac{B\pi\ell^2}{T} = \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}25}{0{,}5} = 7{,}85 \cdot 10^{-4}\text{В};$$

---

91. Электромагнит с индуктивностью L = 5 Гн подключен к источнику тока с ε = 110 В. Определить ЭДС, измеряемую идеальным вольтметром при размыкании цепи, если сила тока убывает со скоростью di/dt = 8 А/с.

Решение

1. Будем считать, что включённое в цепь сопротивление R характеризует сопротивление цепи, внутреннее сопротивление источника и активное сопротивление катушки L. Закон Ома в этом случае примет вид:

$$\varepsilon + \varepsilon_{si} = iR\,,$$

где ε – ЭДС источника, ε_{si} – ЭДС самоиндукции, i – мгновенное значение величины тока, который является функцией времени.

2. Подставим в закон Ома уравнение ЭДС самоиндукции:

$$U - L\frac{di}{dt} = \varepsilon\,.$$

7. По условию задачи $R \to 0$, поэтому из закона Ома следует:

$$U = \varepsilon + \varepsilon_{si} = \varepsilon - L\frac{di}{dt} = 110 + 40 = 150\text{В};$$

---

92. В катушке с активным сопротивлением R = 5 Ом течёт ток силой I = 17 А. Индуктивность катушки L = 50 мГн. Каким будет напряжение на зажимах катушки, если ток в ней начнёт линейно убывать со скоростью di/dt = 1000 А/с?

Решение

$$IR + L\frac{di}{dt} = U; \quad U = 85 + 5\cdot 10^{-2}\cdot 10^{3} = 135\ \text{В};$$

---

93. Катушку с активным сопротивлением R = 10 Ом и индуктивностью L = 3 Гн подсоединили к идеальному источнику тока с ЭДС ε = 150 В и пренебрежимо малым сопротивлением. Через какое время сила тока в катушке станет равным i(t) = 5 А?

Решение

1. Зависимость силы тока от времени при замыкании цепи с индуктивностью:

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{L}{R}t}\right); \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{i(t)R}{\varepsilon} = e^{-\frac{L}{R}t}; \quad \ln\left(1 - \frac{i(t)R}{\varepsilon}\right) = -\frac{L}{R}t;$$

$$-\frac{R}{L}\ln\left(1 - \frac{i(t)R}{\varepsilon}\right) = t; \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{10}{3}\ln\left(1 - \frac{5\cdot 10}{150}\right) = 1{,}33\text{с};$$

---

12. Энергия электромагнитного поля

94. Определить энергию магнитного поля катушки, если её индуктивность L = 0,2 Гн, а сила тока I = 12 А?

Решение

1. При рассмотрении вопросов, связанных с энергией магнитного поля,уместно провести некоторые аналогии с механикой. Напомним, что в механике наличие сил, как правило, свидетельствует о возможности совершения работы, которая количественно эквивалентна изменению энергетического состояния рассматриваемой системы.

2. При рассмотрении особенностей взаимодействия магнитного поля с проводниками тоже обнаружились силы, способные совершать работу, из чего следует, что магнитное поле обладает энергией. Возвратимся к уравнению закона Ома при наличии в цепи индуктивности. Умножим правую и левую его часть на произведение idt

$$L\frac{di}{dt} + iR = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \varepsilon idt = i^2Rdt + iLdi.$$

3. Левая часть уравнения характеризует работу, производимую источником тока за время dt. Первое слагаемое правой части уравнения i^2Rdt тоже выражает работу, трансформируемую в нагревание проводника, естественно, что по правилам размерности, второе слагаемое $Lidi$ тоже должно иметь размерность работы или работы, т.е. измеряться в джоулях.

4. Действительно, величина $Lidi$ количественно характеризует работу, производимую источником тока против ЭДС самоиндукции, о чём свидетельствует наличие в этом произведении индуктивности катушки. Очевидно, предположить, что совершаемую против ЭДС самоиндукции работу можно рассматривать как электромагнитную энергию, концентрируемую в катушке.

5. Если ток в цепи возрастает от нуля до некоторого значения I, то полная энергия накапливаемая магнитным полем за время dt определится в виде интеграла

$$W_m = L\int_0^I idi = \frac{LI^2}{2} = \frac{0,2\cdot 144}{2} = 14,4\text{Дж}.$$

---

95. Найти магнитную энергию W, запасаемую в соленоиде когда по обмотке течёт ток силой I = 10 А, который обуславливает магнитный поток Ф = 1 Вб.

Решение

1. Энергия, запасаемая магнитным полем определяется уравнением

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

2. Выразим далее величину магнитного потока через индуктивность соленоида и силу протекающего по катушке тока

$$\Phi = LI, \Rightarrow L = \frac{\Phi}{I}.$$

3. Подставим значение магнитного потока в уравнение энергии

$$W = \frac{\Phi I^2}{2I} = \frac{\Phi I}{2} = 5\,Дж.$$

---

96. Соленоид содержит N = 10^3 витков провода, по которому течёт постоянный ток силой I = 1 A. Магнитный поток через поперечное сечение соленоида составляет Ф = 0,1 Вб. Определить энергию магнитного поля W.

Решение

1. Каждый виток катушки соленоида будет вносить свой вклад в энергетику магнитного поля, численно определяемый уравнением

$$W = \frac{\Phi I^2}{2I} = \frac{\Phi I}{2}.$$

2. Энергия, вызванная всеми N витками, запишется следующим очевидным образом

$$W = N\frac{\Phi I}{2} = 10^3 \cdot \frac{0{,}1 \cdot 1}{2} = 50\,Дж.$$

---

97. Индуктивность в виде железного кольца и N = 200 витков, провода, намотанного в один слой. При силе тока I = 2,5 A магнитный поток в железе составляет Ф =0,5 мВб. Определить энергию магнитного поля W.

Решение

1. В соответствие с уравнением энергии магнитного поля:

$$W = N\frac{\Phi I}{2} = \frac{200 \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot 2{,}5}{2} = 0{,}125\,Дж.$$

---

98. На цилиндр из немагнитного материала длиной l =1 м и площадью поперечного сечения s = 10^{-3} м^2 намотан провод, так что на каждом сантиметре длины уместилось 10 витков в один слой. Определить энергию магнитного поля W, при пропускании по обмотке постоянного тока I = 2 A.

Решение

1. Определим индуктивность катушки

$$L = \mu_0 n^2 V,$$

где n = 10^3 м$^{-1}$ – приведённое число витков, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Ф/м – магнитная постоянная, V = sl – объём соленоида.

2. Запишем уравнение магнитной энергии, запасаемой в соленоиде

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu_0 n^2 s\ell I^2}{2} \cong \frac{12{,}56\cdot 10^{-7}\cdot 10^6\cdot 10^{-3}\cdot 1\cdot 2^2}{2} \cong 2{,}5\,\text{мВб}.$$

---

99. Обмотка электромагнита с индуктивностью L = 1 Гн и активным сопротивлением R = 10 Ом подключена к источнику постоянного напряжения. Найти время, в течение которого в обмотке выделится количество тепла, численно равное энергии магнитного поля, сосредоточенного в сердечнике.

Решение

1. Количество тепла, выделяемое при прохождении электрического тока по проводнику, определяется уравнением

$$Q = I^2 Rt,$$

где t – время, в течение которого выделяется тепло, I – сила тока.

2. Энергия магнитного поля в цепи, содержащей индуктивность, определится уравнением

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

3. Приравняем уравнения, поскольку по условию количество выделившегося тепла численно равно величине энергии поля

$$\frac{LI^2}{2} = I^2 Rt, \Rightarrow t = \frac{L}{2R} = \frac{1}{20} = 50\,\text{мс}.$$

---

100. Соленоид длиной ℓ = 1 м с площадью поперечного сечения s = 10^{-3} м^2 обладает индуктивностью L = 0,1 Гн. Объёмная плотность энергии магнитного поля при этом составляет ϖ = 0,1 Дж/м^3. Ток, какой силы протекает по обмотке соленоида?

Решение

1. Объём соленоида V = ls входит в уравнение плотности энергии магнитного поля

$$\varpi = \frac{W}{\ell s} = \frac{LI^2}{s\ell},$$

откуда

$$I = \sqrt{\frac{2\varpi s\ell}{L}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0{,}1\cdot 10^{-3}\cdot 1}{0{,}1}} \cong 45\,\text{мА}.$$

---

101. Соленоид содержит N = 10^3 витков провода, по которому течёт постоянный ток силой I = 1 А. Магнитный поток через поперечное сечение соленоида составляет Ф = 0,1 Вб. Определить энергию магнитного поля W.

Решение

1. Каждый виток катушки соленоида будет вносить свой вклад в энергетику магнитного поля, численно определяемый уравнением (3) предыдущей задачи.

Энергия, вызванная всеми N витками, запишется следующим очевидным образом

$$W = N\frac{\Phi I}{2} = 10^3 \cdot \frac{0{,}1 \cdot 1}{2} = 50\,\text{Дж}\,.$$

---

102. Индуктивность в виде железного кольца и N = 200 витков, провода, намотанного в один слой. При силе тока I = 2,5 А магнитный поток в железе составляет Ф =0,5 мВб. Определить энергию магнитного поля W.

Решение

1. В соответствие с уравнением энергии поля предыдущего примера

$$W = N\frac{\Phi I}{2} = \frac{200 \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot 2{,}5}{2} = 0{,}125\,\text{Дж}\,.$$

---

103. На цилиндр из немагнитного материала длиной l =1 м и площадью поперечного сечения s = 10^{-3} м^2 намотан провод, так что на каждом сантиметре длины уместилось 10 витков в один слой. Определить энергию магнитного поля W, при пропускании по обмотке постоянного тока I = 2 А.

Решение

1. Определим индуктивность катушки

$$L = \mu_0 n^2 V\,,$$

где $n = 10^3$ м$^{-1}$ – приведённое число витков, $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Ф/м – магнитная постоянная, $V = sl$ – объём соленоида.

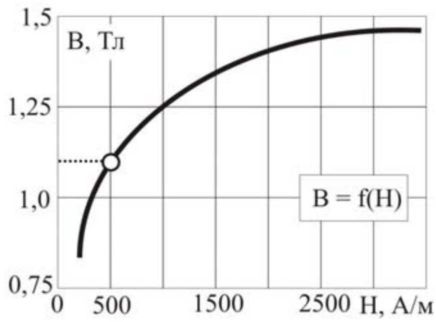
2. Запишем уравнение магнитной энергии, запасаемой в соленоиде

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu_0 n^2 s\ell I^2}{2} \cong \frac{12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot 10^6 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 2^2}{2} \cong 2{,}5\,\text{мВб}\,.$$

---

104. Соленоид имеет стальной железный сердечник, по обмотке которого пропускается постоянный ток силой I = 1 А. На каждом сантиметре длины цилиндрической катушки умещается 5 витков провода. Найти объёмную плотность энергии магнитного поля в сердечнике.

Решение



1. Определим напряжённость магнитного поля

$$H = nI = 500 \cdot 1 = 5 \cdot 10^2\ \text{А/м}\,.$$

2. По приведенной зависимости B = f(H), найдём величину магнитной индукции

$$B \cong 1{,}1\,\text{Тл}\,.$$

3. Объёмная плотность энергии магнитного поля в железном сердечнике определится уравнением

$$\varpi = \frac{BH}{2\mu_0} = \frac{500 \cdot 1{,}1}{2 \cdot 12{,}56 \cdot 10^{-7}} \cong 220 \frac{МДж}{м^3}.$$

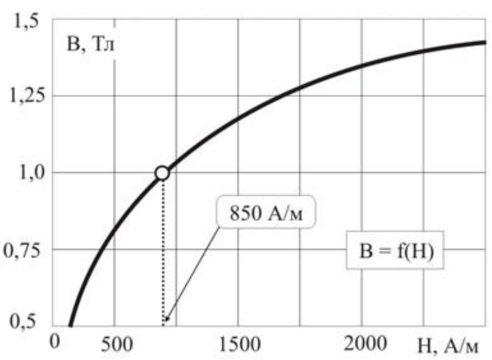
105. Известно, что в железном образце при создании поля с магнитной индукцией B = 1,3 Тл объёмная плотность энергии составляет ϖ = 200 Дж/м^3. Найти магнитную проницаемость железа.

Решение

1. По графику B = f(H) предыдущей задачи найдём, что напряжённость поля в образце составляет H $\cong$ 1750 А/м.

2. Используя далее уравнение взаимосвязи индукции и напряжённости магнитного поля, определим проницаемость железа

$$B = \mu\mu_0 H, \Rightarrow \mu = \frac{B}{\mu_0 H} = \frac{1{,}3}{12{,}56 \cdot 10^{-7} \cdot 1750} \cong 591.$$



106. Индукция магнитного поля в стальном образце равна B = 1 Тл. Определить объёмную плотность энергии магнитного поля в образце.

Решение

1. По приведённому графику зависимости индукции магнитного поля от напряжённости определим величину H = 850 А/м.

2. Определим объёмную плотность энергии магнитного поля

$$\varpi = \frac{BH}{2\mu_0} = \frac{850 \cdot 1{,}0}{2 \cdot 12{,}56 \cdot 10^{-7}} \cong 338 \frac{МДж}{м^3}.$$

107. Обмотка электромагнита с индуктивностью L = 1 Гн и активным сопротивлением R = 10 Ом подключена к источнику постоянного напряжения. Найти время, в течение которого в обмотке выделится количество тепла, численно равное энергии магнитного поля, сосредоточенного в сердечнике.

Решение

1. Количество тепла, выделяемое при прохождении электрического тока по проводнику, определяется уравнением

$$Q = I^2 Rt,$$

где t – время, в течение которого выделяется тепло, I – сила тока.

2. Энергия магнитного поля в цепи, содержащей индуктивность, определится уравнением

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

3. Приравняем уравнения, поскольку по условию количество выделившегося тепла численно равно величине энергии поля

$$\frac{LI^2}{2} = I^2Rt, \Rightarrow t = \frac{L}{2R} = \frac{1}{20} = 50\,\text{мс}.$$

---

108. Соленоид длиной l = 1 м с площадью поперечного сечения s = 10^{-3} м^2 обладает индуктивностью L = 0,1 Гн. Объёмная плотность энергии магнитного поля при этом составляет ϖ = 0,1 Дж/м^3. Ток, какой силы протекает по обмотке соленоида?

Решение

1. Объём соленоида V = *l*s входит в уравнение плотности энергии магнитного поля

$$\varpi = \frac{W}{\ell s} = \frac{LI^2}{s\ell},$$

откуда

$$I = \sqrt{\frac{2\varpi s\ell}{L}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0{,}1\cdot 10^{-3}\cdot 1}{0{,}1}} \cong 45\,\text{мА}.$$

---

109. По катушке тороида с воздушным сердечником течёт ток силой I = 10 А. Объёмная плотность энергии магнитного поля составляет – $\varpi \cong$ 30 Дж/м^3. Определить приведённое число витков n, обеспечивающих заданный режим.

Решение

1. Плотность энергии магнитного поля тороида может быть определена уравнением:

$$\varpi = \frac{B^2}{2\mu_0},$$

где B – индукция магнитного поля, $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная.

2. Индукция магнитного поля тороида:

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I,$$

где N – число витков катушки, *l* – длина катушки.

3. Подставим значение величины магнитной индукции из уравнения B в уравнение ϖ с учётом того, что (N/*l*) = n

$$\varpi = \frac{\mu_0^2 I^2 n^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2 n^2}{2}, \Rightarrow n = \sqrt{\frac{2\varpi}{\mu_0 I^2}} = \sqrt{\frac{2\cdot 30}{12{,}56\cdot 10^{-7}\cdot 100}} \cong 691\,\text{м}^{-1}.$$
