Камчатский государственный технический университет

А. Исаков

Физика

Решение задач ЕГЭ
Часть 7

Колебания и волны

Петропавловск-Камчатский
2013

УДК 50(075.8)
ББК 20я73
И85

Рецензент
доктор физико-математических наук,
профессор Дальневосточного Федерального университета
Стоценко Л.Г.

Исаков Александр Яковлевич

И85 Физика. Решение задач ЕГЭ. Часть 7. Колебания и волны. КамчатГТУ, 2013. – 235 с.

Приведены решения типовых задач из электричества и магнетизма. Ряд задач не относятся к, так называемому, «базовому уровню». Это задачи, для решения которых не вполне достаточно знания математических интерпретаций, они требуют более углублённого проникновения в суть физических законов. Решение задач, предваряется краткими теоретическими сведениями, содержащими как основные уравнения, так и их физическую интерпретацию, что позволяет к решению задач подойти более осмысленно.

Условия большинства задач, не являются новыми, они заимствованы из известных сборников задач, в основном из задачника Трубецковой С.В. (часть 7,8), кроме того использованы задачи, помещённые в пособиях под редакцией Н.Е. Савченко, С.М. Козела, Г.Ф. Меледина, А.А. Пинского, Касаткиной И.Л., Степановой Г.Н. и других популярных авторов. Большинство задач снабжены подробными решениями с анализом применяемых законов и определений, для стандартных задач самого начального уровня приведены только схемы решений.

Сборник предназначен, прежде всего, для школьников старших классов, намеревающихся овладеть методиками решения задач, в частности, повышенного уровня «С» в рамках современного ЕГЭ. Приведенные материалы могут быть так же полезными студентам первых курсов, изучающих общую физику в университетском объёме по техническим программам подготовки, особенно студентам заочной формы образования, когда программа осваивается самостоятельно.

Оглавление

1. Гармонические колебания материальной точки

1. По заданным графикам колебаний определить амплитуду, период и частоту колебаний. Записать уравнения колебательных движений.

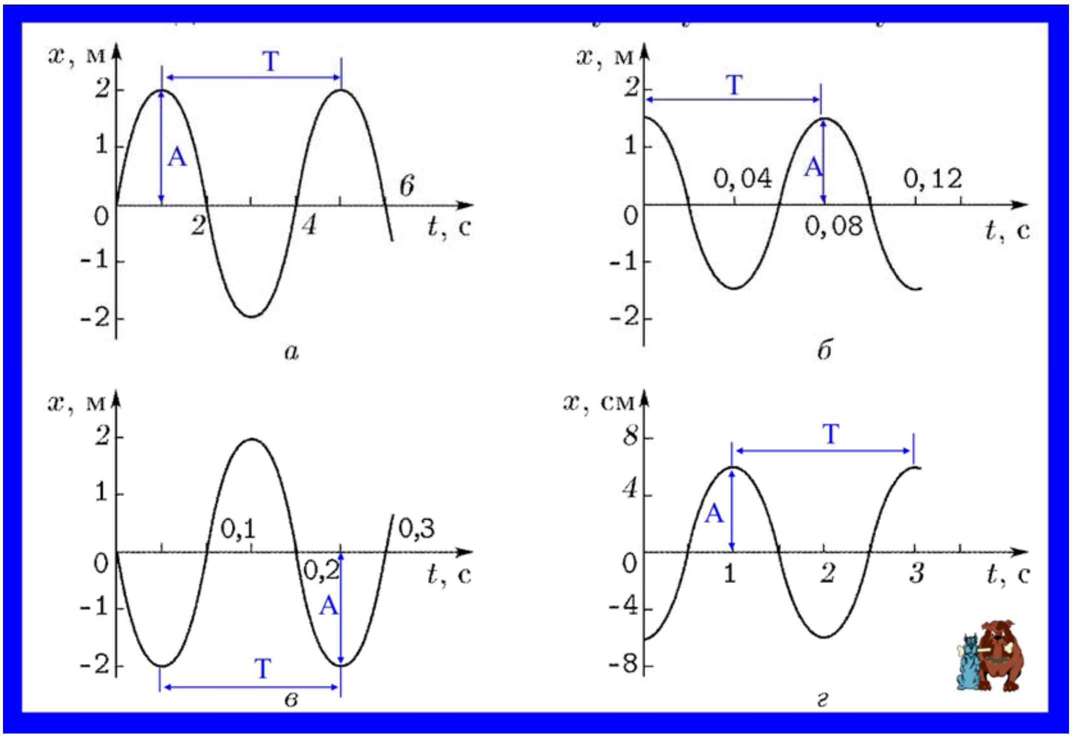


Рис. 1. Графики колебательных движений

Решение

а. Амплитуда A = 2 м, период T = 4 с, частота колебаний $\nu = 1/T \approx 0{,}25$ Гц, циклическая частота $\omega = 2\pi\nu \approx 1{,}57$ рад/с, уравнение колебаний:

$$x(t) = A\sin\omega t = A\sin\frac{2\pi}{T}t = 2\sin 1{,}57t = 2\sin\frac{2\pi}{0{,}25}t \approx 2\sin\frac{\pi}{2}t;$$

б. Амплитуда A = 1,5 м, период $T = 8\cdot 10^{-2}$ с, частота колебаний $\nu = 1/T \approx$ 12,5 Гц, циклическая частота $\omega = 2\pi\nu \approx 78{,}5$ рад/с, уравнение колебаний:

$$x(t) = 1{,}5\cos\omega t = A\cos\frac{2\pi}{T}t = 1{,}5\cos 78{,}5t = 1{,}5\sin\frac{2\pi}{8\cdot 10^{-2}}t \approx 1{,}5\sin 25\pi t;$$

в. . Амплитуда A = 2 м, период T = 0,15 с, частота колебаний $\nu = 1/T \approx 0{,}67$ Гц, циклическая частота $\omega = 2\pi\nu \approx 4{,}2$ рад/с, уравнение колебаний:

$$x(t) = -A\sin\omega t = -A\sin\frac{2\pi}{T}t = -1{,}5\sin 4{,}2t = -2\sin\frac{2\pi}{0{,}67}t \approx -2\sin 3\pi t;$$

г. Амплитуда $A = 4{,}5\cdot 10^{-2}$ м, период T = 2 с, частота колебаний $\nu = 1/T \approx$ 6,7 Гц, циклическая частота $\omega = 2\pi\nu \approx 42$ рад/с, уравнение колебаний:

$$x(t) = -A\cos\omega t = -A\cos\frac{2\pi}{T}t = -4{,}5\cdot 10^{-2}\cos 3{,}14t = -4{,}5\cdot 10^{-2}\cos\pi t;$$

2. Амплитуда незатухающих колебаний точки струны A = 1 мм, частота ν = 1 кГц. Какой путь пройдёт точка за время τ = 0,2 с?

Решение

1. Период колебаний точки:

$$T = \frac{1}{\nu} = 10^{-3}\text{с};$$

2. Количество периодов, составляющих время τ:

$$\zeta = \frac{\tau}{T} = 200;$$

3. Путь пройденный точкой определится из условия четырёхкратного прохождения расстояния, соответствующего амплитуде колебаний в течение одного периода:

$$S_\tau = 4\zeta A = 4 \cdot 200 \cdot 10^{-3} = 0{,}8\text{м};$$

---

3. Колебания точки заданы уравнением:

$$x(t) = 10\cos\frac{\pi}{3}t.$$

Определить амплитуду, период и частоту колебаний.

Решение

$$A = 10\text{м}; \quad \omega = \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{T}; \quad T = 6\text{с}; \quad \nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167\ \text{Гц};$$

---

4. Координата некоторого тела изменяется в соответствии с уравнением:

$$x(t) = 5\cos\frac{\pi}{6}t.$$

Определить амплитуду, частоту и период колебаний. Найти смещение тела через τ = 2 с после начала колебаний.

Решение

$$A = 5\text{м}; \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{6}; \quad T = 12\text{с}; \quad \nu = \frac{1}{T} \approx 0{,}083\text{Гц};$$

$$x(\tau) = 5\cos\frac{2\pi}{12}2 = 5\cos\frac{\pi}{3} = 2{,}5\text{м};$$

---

5. Уравнение движения колеблющейся точки имеет вид:

$$x(t) = 10\sin 20\pi t, \quad \text{см}.$$

Определить амплитуду колебаний, период, частоту и значение смещения спустя время τ = T/8 после начала движения.

Решение

$$A = 0{,}1\text{м}; \quad \frac{2\pi}{T} = 20\pi; \quad \Rightarrow \quad T = 0{,}1\text{с}; \quad \nu = \frac{1}{T} = 10\text{Гц};$$

$$x(\tau) = 10\sin\frac{2\pi}{T}\frac{T}{8} = 10\sin\frac{2\pi}{8} \approx 7{,}07\text{см};$$

---

6. Уравнение колебаний точки имеет вид:

$$x(t) = 5\sin\pi(t + 1/4), \text{ см.}$$

Определить амплитуду колебаний, частоту, период, начальную фазу и значение смещения в начальный момент времени.

Решение

$$x(t) = 5\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right); \quad \Rightarrow A = 5\text{ см}; \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{4}; \quad \pi = \frac{2\pi}{T}; \quad T = 2\text{с}; \quad \nu = 0{,}5\text{ Гц};$$

$$x(0) = 5\sin\frac{\pi}{4} \approx 3{,}5\text{см};$$

---

7. Смещение точки от положения равновесия зависит от времени следующим образом:

$$x(t) = 0{,}5\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right);$$

Определить амплитуду, частоту, период и начальную фазу колебаний. Чему равно значение смещения точки от положения равновесия в начальный момент времени и спустя время τ = 1/24 с от начала колебаний?

Решение

$$A = 0{,}5\text{м}; \quad 4\pi = \frac{2\pi}{T}; \quad T = 0{,}5\text{с}; \quad \nu = 2\text{Гц}; \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{6};$$

$$x(0) = 0{,}5\cos\frac{\pi}{6} \approx 0{,}433\text{м}; \quad x(\tau) = 0{,}5\cos\left(\frac{4\pi}{24} + \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}5\cos\frac{\pi}{3} = 0{,}25\text{м};$$

---

8. Небольшой груз совершает гармонические колебания в соответствие с уравнен6ием:

$$x(t) = 0{,}02\sin\pi(t + 0{,}5);$$

Определить амплитуду, частоту, начальную фазу колебаний, а так же максимальную скорость и ускорение груза. Через какое время τ_1 груз будет проходить первый раз положение равновесия? За какое время после начала движения τ_2 груз сместится на расстояние, равное половине амплитуды ζ = A/2?

Решение

1. Амплитуда, частота и начальная фаза колебаний:

$$A = 0{,}02\text{м}; \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = 0{,}5\text{Гц}; \quad \varphi_0 = 0{,}5\pi;$$

2. Максимальное значение скорости точки:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = 0{,}02\pi\cos(\pi t + 0{,}5\pi); \quad \dot{x}_{max} = 0{,}02\pi = 6{,}28\cdot 10^{-2}\,\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

3. Максимальное значение ускорения точки:

$$\ddot{x}(t) = \frac{d\dot{x}}{dt} \equiv \frac{d^2x}{dt^2} = -0{,}02\pi^2\sin(\pi t + 0{,}5\pi); \quad \ddot{x}_{max} = -0{,}02\pi^2 \approx -0{,}197\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

4. Время, прошедшее от начала движения до прохождения положения равновесия τ_1:

$$\tau_1 = \frac{T}{4}; \quad \Rightarrow \quad \tau_1 = \frac{1}{4\nu} = 0{,}5\text{с};$$

5. Время смещения на расстояние ζ = A/2:

$$\frac{A}{2} = A\sin\left(\pi\tau_2 + \frac{\pi}{2}\right); \quad \sin\left(\pi\tau + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}; \quad \left(\pi\tau_2 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{6}; \quad \Rightarrow \quad \tau_2 = \frac{1}{3}c;$$

---

9. Записать уравнение гармонических колебаний точки, если частота колебаний ν = 0,5 Гц, амплитуда колебаний A = 80 см. В начальный момент времени отклонение максимально.

Решение

1. Заданное начальное положение точки указывает на то, что колебания развиваются по закону косинуса:

$$x(t) = A\cos\omega t = 0{,}8\cos(2\pi\nu t) = 0{,}8\cos(\pi t);$$

---

10. Период гармонических колебаний точки T = 2,4 с, амплитуда колебаний A = 5 см. Определить значение смещения колеблющейся точки через время τ = 0,6 с после начала колебаний, если в начальный момент времени смещение точки из положения равновесия максимально.

Решение

$$x(\tau) = 0{,}05\cos\left(\frac{2\pi}{T}\tau\right) = 0{,}05\cos\left(\frac{2\pi}{2{,}4}\cdot 0{,}6\right) = 0{,}05\cos\frac{\pi}{2} = 0;$$

---

11. Записать уравнение гармонических колебаний, если амплитуда A = 5 см, период колебаний T = 0,5 с. Колебания начинаются из состояния статического равновесия.

Решение

$$x(t) = 0{,}05\sin\frac{2\pi}{T}t = 0{,}05\sin(4\pi t);$$

---

12. Напишите уравнение гармонических колебаний, протекающих по закону косинуса, если частота ν = 2 Гц, амплитуда A = 5 см, начальная фаза колебания составляет φ_0 = 0,25π.

Решение

$$x(t) = 0{,}05\cos\left(2\pi\nu t \times \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}05\cos\left(4\pi t \pm \frac{\pi}{4}\right);$$

---

13. Записать уравнение колебания материальной точки, если значение наибольшего смещения точки из положения статического равновесия A = 40 см, период колебаний T = 2 с. Как изменится уравнение, если чистота колебаний увеличится в ζ = 2 раза?

Решение

$$x_1(t) = 0{,}4\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = 0{,}4\sin\pi t; \quad x_2(t) = 0{,}4\sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right) = 0{,}4\sin 2\pi t;$$

---

14. Амплитуда колебаний точки A = 20 см, за время τ = 30 мин. 20 с совершается N = 100 колебаний. В начальный момент времени точка имела максимальное смещение из положения равновесия. Записать уравнение колебаний этой материальной точки, происходящие по закону синуса и косинуса.

Решение

1. Период колебаний материальной точки:

$$T = \frac{\tau}{N} = \frac{200}{100} = 2с;$$

2. Уравнение колебаний:

$$x(t) = 0{,}2\sin\left(\frac{2\pi}{2}t\right) = 0{,}2\sin\pi t = 0{,}2\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right);$$

---

15. Записать уравнение колебаний, выразив смещение точки через синус и косинус, если в начальный момент времени смещение точки равно половине амплитуды. Амплитуда колебаний A = 5 см, за время τ = 1 мин точка совершает N = 150 полных колебаний.

Решение

1. Период колебаний материальной точки:

$$T = \frac{\tau}{N} = \frac{60}{150} = 0{,}4с;$$

2. Начальная фаза колебаний:

$$\frac{A}{2} = A\sin\varphi_0; \quad \sin\varphi_0 = \frac{1}{2}; \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{6}$$

2. Уравнение колебаний:

$$x(t) = 0{,}05\sin\left(\frac{2\pi}{0{,}4}t + \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}05\sin(5\pi t + \frac{\pi}{6});$$

$$x(t) = 0{,}05\cos(5\pi t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}) = 0{,}05\cos\left(5\pi t - \frac{\pi}{3}\right);$$

---

16. Амплитуда гармонических колебаний материальной точки A = 50 мм, период T = 4 с, начальная фаза колебаний $\varphi_0 = \pi/4$. Записать уравнение колебаний и определить смещение точки для момента времени τ = 1,5 с.

Решение

1. Уравнение колебаний:

$$x(t) = 5\cdot10^{-2}\sin\left(\frac{2\pi}{4}t + \frac{\pi}{4}\right) = 5\cdot10^{-2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right);$$

2. Смещение точки за время τ:

$$x(\tau) = 5\cdot10^{-2}\sin\left(\frac{2\pi}{4}1{,}5 + \frac{\pi}{4}\right) = 5\cdot10^{-2}\sin\pi = 0;$$

---

17. Зная уравнение колебательного движения материальной точки $x(t) = A\cos(\pi t + \varphi_0)$, амплитуду A = 4 см, определить начальную фазу колебаний, если смещение в начальный момент времени x(0) = 2 см. Найти скорость и ускорение для момента времени τ = 1 с.

Решение

1. Перепишем заданное уравнение движения для начального момента времени (t = 0) и определим начальную фазу колебаний

$$\frac{A}{2} = A\cos\varphi_0, \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi_0 = \frac{1}{2}, \quad \varphi_0 = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

2. Определим смещение точки для момента времени $\tau = 1$ с

$$x(t) = A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$x(\tau) = 4\cdot 10^{-2}\cos\left(\pi\cdot 1 + \frac{\pi}{3}\right) = -2\cdot 10^{-2}\,\text{м}.$$

3. Скорость материальной точки в заданный момент времени τ

$$\dot{x}(t) \equiv \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0),$$

$$\dot{x}(\tau) = -4\cdot 10^{-2}\cdot 3{,}14\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) \cong 0{,}1\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

4. Ускорение точки в общем виде представится как

$$\ddot{x}(t) \equiv \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0).$$

5. Перепишем уравнение применительно к условиям данного колебания

$$\ddot{x}(\tau) \cong -4\cdot 10^{-2}\cdot 10\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) \cong 0{,}2\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

---

18. Материальная точка совершает гармонические колебания с частотой ν= 5 Гц. Амплитуда колебаний равна A = 50 см. Движение начинается из точки, отстоящей на расстоянии x(0) = 30 см от среднего положения. Записать уравнение движения точки.

Решение

1. Циклическая частота колебаний:

$$\omega = 2\pi\nu = 10\pi;$$

2. Начальная фаза колебаний:

$$x(0) = A\sin(\omega t + \varphi_0); \quad x(0) = A\sin\varphi_0; \quad \frac{x(0)}{A} = \sin\varphi_0; \quad \varphi_0 = \arcsin 0{,}6 \approx 0{,}21\pi;$$

3. Уравнение движения:

$$x(t) = 0{,}5\sin\pi(10t + 0{,}21);$$

---

19. Записать уравнение гармонических колебаний точки, если она за время τ = 1 мин совершает n = 120 полных колебаний с амплитудой A = 8 см. Ели уравнение записать через закон косинуса, то начальная фаза такого периодического движения составит φ_0 = 3T/4.

Решение

1. Период и циклическая частота колебаний:

$$T = \frac{\tau}{n} = \frac{60}{120} = 0{,}5\text{с}; \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 4\pi\frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

2. Начальная фаза колебаний:

$$\varphi_0 = \frac{3\cdot 2\pi}{4} = 1{,}5\pi;$$

3. Уравнение колебаний:

$$x(t) = 0{,}08\cos\pi(10t \pm 1{,}5);$$

---

20. Определить амплитуду гармонических колебаний, если для фазы $\varphi = \pi/4$ рад значение смещения x_1 = 6 см.

Решение

$$x_1 = A\sin\frac{\pi}{4}; \quad \Rightarrow \quad A = \frac{x_1}{\sin 45^0} \approx 8{,}45\cdot 10^{-2}\text{м};$$

---

21. Амплитуда колебаний A = 12 см, частота ν = 50 Гц. Определить значение смещения через время τ = 0,4 с, если колебания точки начались из положения равновесия.

Решение

1. Циклическая частота колебаний:

$$\omega = 2\pi\nu = 100\pi\frac{\text{рад}}{\text{с}}; \quad T = \frac{1}{\nu} = 0{,}02\text{с}; \quad \frac{\tau}{T} = 20;$$

2. Смещение точки для времени τ:

$$x(\tau) = 0{,}12\cos\left(100\pi\cdot 0{,}4\right) = 0{,}12\text{м};$$

---

22. Математический маятник, смещённый из положения равновесия, начинает совершать колебания. Спустя время τ = T/8 его смещение оказалось равным $x(\tau)$ = 0,2 м. Чему равна амплитуда колебаний?

Решение

$$x(\tau) = A\cos\omega\tau; \quad 0{,}2 = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{8}\right) = A\cos\frac{\pi}{4}; \quad A = \frac{0{,}2}{0{,}707} \approx 0{,}283\text{м};$$

---

23. Груз на пружине, максимально сжатой в начальный момент времени, совершает гармонические колебания с амплитудой A = 6 см. Определить смещение груза за время, равное τ_1 = T/4, τ_2 = T/2, τ_3 = T.

Решение

1. Уравнение движения груза пружинного маятника:

$$x(\tau) = A\cos\omega\tau;$$

2. Смещение груза в заданные моменты времени:

$$x(\tau_1) = 0{,}06\cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4}\right) = 0{,}06\cos\frac{\pi}{2} = 0;$$

$$x(\tau_2) = 0{,}06\cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right) = 0{,}06\cos\frac{\pi}{2} = 0{,}06\text{м};$$

$$x(\tau_3) = 0{,}06\cos\left(\frac{2\pi}{T}T\right) = 0{,}06\cos 2\pi = 0{,}06\text{м};$$

---

24. Груз на пружине за время τ = T/12 смещается из положения равновесия на расстояние $x(\tau)$ = 6 см. Определить амплитуду колебаний.

Решение

1. Уравнение движения груза пружинного маятника:

$$x(\tau) = A\cos\omega\tau;$$

2. Смещение груза в заданный момент времени:

$$x(\tau) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{12}\right) = A\sin\frac{\pi}{6}; \quad A = \frac{x(\tau)}{\sin 30^0} = 12\text{см};$$

---

25. Какая часть периода ζ потребуется, чтобы тело, совершая гармонические колебания, прошло весь путь от среднего положения до крайнего? первую половину этого пути? вторую его половину?

Решение

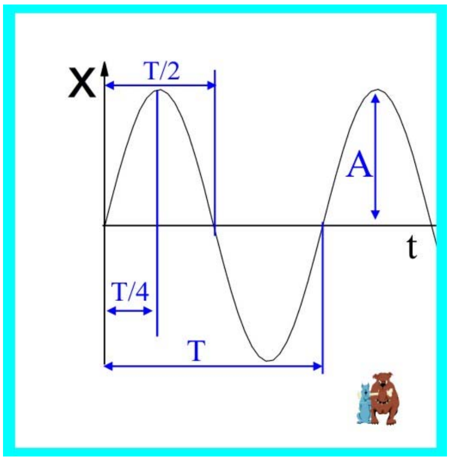


Рис. 25. Гармонические колебания

1. Уравнение движения:

$$x(t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right);$$

2. Относительное время перемещения тела на величину амплитуды:

$$A = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}\zeta_1\right); \quad 1 = \sin\left(\frac{2\pi}{T}\zeta_1\right);$$

$$\frac{2\pi}{T}\zeta_1 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}; \quad \Rightarrow \quad \zeta_1 = \frac{T}{4};$$

3. Относительное время смещения на величину равную первой половине амплитуды:

$$\frac{A}{2} = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}\zeta_2\right); \quad \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{2\pi}{T}\zeta_2\right); \quad \frac{2\pi}{T}\zeta_2 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}; \quad \Rightarrow \quad \zeta_2 = \frac{T}{12};$$

4. Относительное время смещения на величину равную второй половине амплитуды:

$$\zeta_3 = \frac{T}{4} - \frac{T}{12} = \frac{T}{6};$$

---

26. Колебания материальной точки протекают с периодом T = 12 с. Определить, за какой наименьший промежуток времени точка удалится от положения равновесия на расстояние, равное половине амплитуды? За какое время точка пройдёт оставшуюся часть пути до максимального отклонения?

Решение

1. Уравнение движения:

$$x(t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right);$$

2. Время прохождения точкой первой половины амплитуды:

$$\frac{A}{2} = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}\tau_1\right) = A\sin\left(\frac{\pi}{6}\tau_1\right); \quad \frac{\pi}{6}\tau_1 = \arcsin\frac{1}{2}; \quad \frac{\pi}{6}\tau_1 = \frac{\pi}{6}; \quad \tau_1 = 1\text{c};$$

3. Время прохождения точкой второй половины амплитуды:

$$\tau_2 = \frac{T}{4} - \tau_1 = 2\text{c};$$

---

27. Зная уравнение колебательного движения материальной точки:

$$x(t) = A\cos(\pi t + \varphi_0),$$

амплитуду A = 4 см, определить начальную фазу колебаний, если смещение в начальный момент времени x(0) = 2 см. Найти скорость и ускорение для момента времени τ = 1 с.

Решение

1. Перепишем заданное уравнение движения для начального момента времени (t = 0) и определим начальную фазу колебаний

$$\frac{A}{2} = A\cos\varphi_0, \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi_0 = \frac{1}{2}, \quad \varphi_0 = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

2. Определим смещение точки для момента времени τ = 1 с

$$x(t) = A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$x(\tau) = 4\cdot 10^{-2}\cos\left(\pi\cdot 1 + \frac{\pi}{3}\right) = -2\cdot 10^{-2}\,\text{м}.$$

3. Скорость материальной точки в заданный момент времени τ

$$\dot{x}(t) \equiv \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0),$$

$$\dot{x}(\tau) = -4\cdot 10^{-2}\cdot 3{,}14\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) \cong 0{,}1\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

4. Ускорение точки в общем виде представится как

$$\ddot{x}(t) \equiv \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0).$$

5. Перепишем уравнение применительно к условиям данного колебания

$$\ddot{x}(\tau) \cong -4\cdot 10^{-2}\cdot 10\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) \cong 0{,}2\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

---

28. Точка, колеблющаяся по гармоническому закону с амплитудой A = 4 см и периодом T = 2 с в начальный момент времени имеет смещение x(0) = 2 см. Определить момент времени τ, когда скорость достигнет величины – 1 м/с.

Решение

1. По заданным начальным условиям определим начальную фазу колебаний

$$x(t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right), \quad x(0) = 4\cdot 10^{-2}\cos\varphi_0,$$

$$\cos\varphi_0 = \frac{2\cdot 10^{-2}}{4\cdot 10^{-2}} = \frac{1}{2}, \quad \varphi_0 = \arccos\frac{1}{2}, \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{3}.$$

2. Запишем уравнение для скорости в общем виде

$$\dot{x}(t) \equiv \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0),$$

для заданных условий уравнение скорости перепишется следующим образом

$$\dot{x}(\tau) = -A\frac{2\pi}{T}\sin\left(\frac{2\pi}{T}\tau + \frac{\pi}{3}\right), \quad -1\cdot 10^{-2} = -4\cdot 10^{-2}\frac{6{,}28}{2}\sin\left(\pi\tau + \frac{\pi}{3}\right).$$

3. Разрешим последнее уравнение относительно искомого времени τ

$$\sin\left(\pi\tau + \frac{\pi}{3}\right) = 8\cdot 10^{-2}, \quad (\pi\tau + 0{,}33\pi) = \arcsin 8\cdot 10^{-2},$$

$$\pi\tau + 0{,}33\pi = 1{,}46\pi, \quad \Rightarrow \quad \tau = 1{,}13\,\text{с}.$$

---

29. Точка перемещается по круговой траектории радиуса R = 0,1 м против хода часовой стрелки с периодом T = 6 с. Записать уравнение движения точки, найти для момента времени τ = 1 с смещение, скорость и ускорение точки. В начальный момент времени x(0) = 0.

Решение

1. Определим циклическую частоту колебаний

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{3}\frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

2. Запишем уравнение смещения точки в общем виде

$$x(t) = R\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \varphi_0\right).$$

3. Перепишем уравнение для заданных начальных условий, t = 0, x(0) = 0

$$x(0) = R\cos(\varphi_0), \quad \cos\varphi_0 = 0, \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2}.$$

4. Определим смещение точки в момент времени τ = 1 с

$$x(\tau) = 0{,}1\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot 1 + \frac{\pi}{2}\right) \cong -8{,}67\cdot 10^{-2}\,\text{м}.$$

5. Скорость точки в произвольный момент времени

$$\dot{x}(t) = R\frac{2\pi}{T}\sin\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{2}\right),$$

в момент времени τ = 1 с

$$\dot{x}(\tau) = -R\frac{2\pi}{T}\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right), \quad \dot{x}(\tau) \cong -0{,}1\cdot 1\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) \cong -5\cdot 10^{-2}\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

---

30. Колебания материальной точки происходят по гармоническому закону с амплитудой A = 3 см и циклической частотой $\omega = \pi/2$ рад/с. Каких максимальных значений достигают скорость и ускорение точки.

Решение

1. Пусть колебания происходят в соответствие с уравнением

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0).$$

2. Скорость и ускорение на основе уравнения (1) будут определяться следующими соотношениями

$$\dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0).$$

3. Максимальное значение скорости будет иметь место при достижении $\cos(\omega t + \varphi) = 1$, другими словами

$$\dot{x}_{max} = A\omega = 3\cdot 10^{-2}\cdot 1{,}57 = 4{,}7\cdot 10^{-2}\,\text{м/с}.$$

4. Амплитудное значение ускорения определится на основе аналогичных рассуждений

$$\ddot{x}_{max} = -A\omega^2 = -3\cdot 10^{-2}\cdot 2{,}47 - 7{,}4\,\text{м/с}^2.$$

---

31. По заданному уравнению движения:

$$x(t)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{4}\right),\text{ см}$$

определить максимальные значения скорости и ускорения точки.

Решение

1. Если в уравнении физической величины присутствует функция косинуса или синуса, то эта величина может принимать максимальные, минимальные или нулевые значения, потому что эти тригонометрические функции изменяются в пределах ± 1 с переходом через 0:

$$x_{max}=A=2\text{см};$$

$$v_x\equiv\dot{x}(t)=\frac{dx}{dt}=\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{4}\right);\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{4}\right)=1;\quad \dot{x}_{max}=3{,}14\frac{\text{см}}{\text{с}};$$

$$a_x\equiv\ddot{x}\equiv\frac{d\dot{x}}{dt}\equiv\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{2\pi^2}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{4}\right);\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{4}\right)=1;\quad \ddot{x}=\frac{2\pi^2}{4}\approx4{,}93\frac{\text{см}}{\text{с}^2};$$

---

32. Задано уравнение движения материальной точки:

$$x(t)=\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right);$$

Определить в какие моменты времени в течение периода достигаются наибольшие значения смещения, скорости и ускорения.

Решение

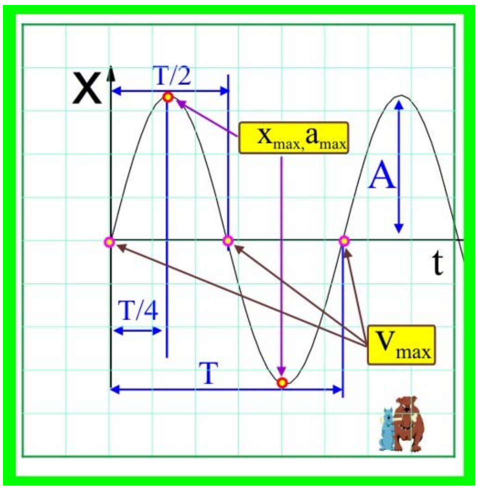


Рис. 32. Гармоническое движение

1. Период колебаний точки:

$$\omega=\frac{2\pi}{T};\quad \frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{T};\quad T=12\text{с};$$

2. Наибольшие смещение точки относительно положения равновесия, наблюдаемые в течение периода:

$$\tau_1=\frac{T}{4}=3\text{с};\quad \tau_2=\frac{3}{4}T=9\text{с};$$

3. Максимумы скорости в течение периода:

$$v_x\equiv\dot{x}(t)=\frac{dx}{dt}=\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right);$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)=1;\quad \frac{\pi}{6}t=\arccos1;\quad \tau_3=0;\quad \tau_4=6\text{с};\quad \tau_5=T=12\text{с};$$

4. Максимумы ускорения в течение периода совпадают с моментами времени, соответствующими изменению направления движения точки:

$$\tau_6=3\text{с};\quad \tau_7=9\text{с};$$

---

33. Период гармонических колебаний составляет T = 4 с. Определить время t_1 за которое тело, совершающее эти колебания, пройдёт путь, равный половине амплитуды, если в начальный момент времени тело проходило положение статического равновесия; t_2 – путь равный амплитуде; t_3 – путь равный 2/3 амплитуды.

Решение

1. Поскольку в начальный момент времени тело находилось в положении равновесного состояния, то колебания протекают по синусоидальному закону

$$x = A\sin\omega t;$$

2. Перепишем уравнение колебаний применительно к заданным условиям, что позволяет разрешить его относительно искомого времени t_1, соответствующего прохождению расстояния, равного половине амплитуды:

$$\frac{A}{2} = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t_1\right); \quad \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t_1\right); \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{T}t_1 = \arcsin\frac{1}{2};$$

$$\frac{2\pi}{T}t_1 = 0{,}166\pi; \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{1}{3}\,c;$$

3. Определим время прохождения пути, равного амплитуде колебаний:

$$A = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t_2\right); \quad 1 = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t_2\right); \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{T}t_2 = \arcsin 1;$$

$$\frac{2\pi}{T}t_2 = \frac{\pi}{2}; \quad \Rightarrow \quad t_2 = 1\,c;$$

4. Время прохождения пути, равного 2/3 амплитуды:

$$\frac{2}{3}A = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t_3\right); \quad \frac{2}{3} = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t_3\right); \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{T}t_3 = \arcsin\frac{2}{3};$$

$$\frac{2\pi}{T}t_3 = 0.23\pi; \quad \Rightarrow \quad t_3 = 0{,}43\,c;$$

---

34. Во сколько раз время прохождения колеблющейся точкой первой половины амплитуды меньше, чем время прохождения второй половины амплитуды? В начальный момент времени точка проходит положение равновесия.

Решение

1. Время прохождения первой половины амплитуды:

$$\frac{A}{2} = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t_1\right); \quad \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t_1\right); \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{T}t_1 = \arcsin\frac{1}{2};$$

$$\frac{2\pi}{T}t_1 = \frac{\pi}{2}; \quad \Rightarrow \quad t_1 = 0{,}083T;$$

2. Время прохождения второй половины амплитуды:

$$t_2 = \frac{T}{4} - t_1 = 0{,}25T - 0{,}083T = 0{,}167T;$$

3. Отношение времен:

$$\zeta = \frac{t_2}{t_1} = \frac{0{,}167}{0{,}083} \cong 2;$$

---

35. Записать закон гармонического колебания, если известно значение максимального ускорения a_m = 49,3 см/с^2, периода колебаний T = 2 с. Смещение точки в начальный момент времени составляет x_0 = 2,5 см. Колебания происходят по синусоидальному закону.

Решение

1. Определим циклическую частоту колебаний

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

2. Найдём амплитуду колебаний

$$a_m = \omega^2 A; \quad \Rightarrow \quad A = \frac{a_m}{\omega^2} = \frac{49{,}3}{9{,}86} \cong 5\,\text{см};$$

3. Начальная фаза колебаний

$$x_0 = A\sin\varphi_0; \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi_0 = \frac{x_0}{A} = \frac{1}{2}; \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6};$$

4. Запишем закон заданного гармонического колебания

$$x(t) = 5\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right);$$

---

36. Скорость материальной точки изменяется по закону:

$$v(t) = 0{,}2\pi\cos(2\pi t);$$

Определить максимальное ускорение, смещение колеблющейся точки через время τ = 5/12 с, прошедшее после начала движения и путь, пройденный за это время.

Решение

1. Уравнение движения точки:

$$x(t) = 0{,}1\sin(2\pi t);$$

2. Смещение точки за указанное время:

$$x(\tau) = 0{,}1\sin(0{,}83\pi) \approx 0{,}1\sin 150^0 \approx 0{,}05\text{м};$$

3. Ускорение точки в заданный момент времени:

$$a_x \equiv \frac{d^2x}{dt^2} = -0{,}4\pi^2\sin(2\pi t); \quad a(\tau) \equiv \frac{d^2x}{dt^2} = -0{,}4\pi^2\sin(0{,}83\pi) \approx 4\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

4. Период колебаний:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}; \quad \Rightarrow \quad T = 1\text{с}; \quad \frac{T}{4} = 0{,}25\text{с}; \quad \tau = \frac{5}{12} \approx 0{,}42\text{с} > \frac{T}{4};$$

5. Путь, пройденный точкой за заданное время:

$$s(\tau) = A + x(\tau) = 0{,}15\text{м};$$

---

37. Амплитуда колебаний A = 5 см, период колебаний T = 0,1 с. Записать уравнение колебаний, если в начальный момент времени смещение точки было равно половине амплитуды. Найти скорость и ускорение точки для начального момента времени.

Решение

1. Начальная фаза колебаний:

$$\frac{A}{2} = A\sin\varphi_0; \quad \varphi_0 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6};$$

2. Уравнение колебаний:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}; \quad \Rightarrow \quad x(t) = 0{,}05\sin\left(20\pi t + \frac{\pi}{6}\right);$$

3. Скорость точки в начальный момент времени:

$$v_x = 0{,}05 \cdot 20\pi\cos 30^0 = 2{,}73\ \text{м/с};$$

4. Ускорение точки в начальный момент времени:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -0{,}05 \cdot 400\pi^2 \sin\left(20\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \approx -100\frac{м}{с^2};$$

---

38. Записать уравнение гармонических колебаний, если их частота составляет ν = 0,5 Гц, а максимальное ускорение a_m = 0,49 м/с^2. В начальный момент времени точка смещена от положения равновесия на x_0 = 25 мм.

Решение

1. Параметры заданных колебаний:

$$\omega = 2\pi\nu = \pi\frac{рад}{с}; \quad a_m = A\omega^2; \quad \Rightarrow \quad A = \frac{a_m}{\omega^2} \approx 5 \cdot 10^{-2}м;$$

2. Начальная фаза колебаний:

$$x_0 = A\sin\varphi_0; \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = \arcsin\frac{x_0}{A} = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6};$$

3. Уравнение колебаний:

$$x(t) = 5 \cdot 10^{-2} \sin\pi\left(t + \frac{1}{6}\right);$$

---

39. Шарик совершает гармонические колебания. Определить отношение скоростей шарика ζ в точках, удалённых от положения равновесия соответственно на половину и на одну треть амплитуды.

Решение

1. Пусть шарик колеблется в соответствии с уравнением:

$$x(t) = A\cos\omega t,$$

уравнение скорости в этом случае будет иметь вид:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin\omega t;$$

2. Время прохождения шариком расстояния в половину амплитуды:

$$\frac{A}{2} = A\cos\omega\tau_1; \quad \omega\tau_1 = \arccos\frac{1}{2}; \quad \tau_1 = \frac{\pi}{3\omega};$$

3. Время прохождения расстояния в 1/3A:

$$\frac{A}{3} = A\cos\omega\tau_2; \quad \omega\tau_2 = \arccos\frac{1}{3}; \quad \tau_1 \approx \frac{0{,}4\pi}{\omega};$$

4. Отношение скоростей в заданных точках:

$$\zeta = \frac{-A\omega\sin\left(\omega\frac{\pi}{3\omega}\right)}{-A\sin\left(\omega\frac{0{,}4\pi}{\omega}\right)} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin 0{,}4\pi} \approx \frac{0{,}87}{0{,}95} \approx 0{,}914;$$

---

40. Груз на пружине колеблется вдоль прямой с амплитудой A = 2 см; период колебаний T = 2 с. В начальный момент времени груз занимал положение равновесия. Записать уравнение движения и определить скорость и ускорение груза через τ = 0,25 с после начала движения.

Решение

1. Циклическая частота колебаний:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi\frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

2. Уравнение колебаний:

$$x(t) \;=\; \cdot 10^{-2} \sin \; \pi t;$$

3. Скорость в заданный момент времени:

$$v=\frac{dx}{dt}=2\cdot 10^{-2}\pi\cos\frac{\pi}{4}\approx 4{,}44\cdot 10^{-2}\,\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

4. Ускорение в заданный момент времени:

$$a=\frac{dv}{dt}=-2\cdot 10^{-2}\pi^2\sin\frac{\pi}{4}\approx 0{,}14\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

---

41. Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой A = 0,1 м с частотой ν = 20 Гц. В начальный момент времени точка находится от положения равновесия на расстоянии, равном амплитуде колебаний. Определить значение скоростей и ускорений в моменты времени τ_1 = 1/120 с, τ_2 = 1/80 с и τ_3 = 1/40 с.

Решение

1. Судя по заданным начальным условиям, точка движется по закону косинуса:

$$x(t)=0{,}1\cos(2\pi\nu t)=0{,}1\cos(40\pi t)\,;$$

2. Значение скоростей в заданные моменты времени:

$$v=\frac{dx}{dt}=-0{,}1\cdot 40\pi\sin(40\pi t);\quad v_1=-0{,}1\cdot 40\pi\sin\left(\frac{40\pi}{120}\right)\approx -10{,}9\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$v_2=-4\pi\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-12{,}56\frac{\text{м}}{\text{с}};\quad v_3=-4\pi\sin(\pi)=0;$$

3. Значение ускорений в заданные моменты времени:

$$a_1=\frac{dv_1}{dt}=-0{,}1\cdot 1600\pi^2\cos\frac{\pi}{3}\approx -800\frac{\text{м}}{\text{с}^2};;$$

$$a_2=\frac{dv_2}{dt}=-0{,}1\cdot 40^2\pi^2\cos\frac{\pi}{2}=0;\quad a_3=\frac{dv_3}{dt}=-0{,}1\cdot 40^2\pi^2\cos\pi\approx 1{,}6\cdot 10^3\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\,;$$

---

42. Материальная точка колеблется с частотой ν = 500 Гц. В начальный момент времени точка отклонилась на максимальное расстояние A = 1 мм. Записать уравнение колебаний, считая их гармоническими. Определить значение ускорения скорости и смещения для момента времени τ = 0,1 с.

Решение

1. Уравнение колебаний:

$$x(t)=1\cdot 10^{-3}\cos(2\pi\nu t)=1\cdot 10^{-3}\cos(1000\pi t);$$

2. Смещение в заданный момент времени:

$$x(\tau)=1\cdot 10^{-3}\cos(100\pi)=1\cdot 10^{-3}\text{м};$$

3. Скорость в заданный момент времени:

$$v = \frac{dx}{dt} = -1 \cdot 10^{-3} \cdot 100\pi \sin(100\pi) = 0;$$

4. Ускорение в заданный момент времени:

$$a(\tau) = \frac{d^2x}{dt^2} = -1 \cdot 10^{-3}(100\pi)^2 \cos(100\pi) \approx 98{,}6\frac{м}{с^2};$$

---

43. Маятник совершает колебания с амплитудой A = 1 см с периодом T = 1 с. Найти максимальные значения скорости и ускорения груза маятника.

Решение

$$x(t) = 10^{-2} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = 10^{-2}\sin(2\pi t); \quad v(t) = \frac{dx}{dt} = 10^{-2} \cdot 2\pi \cos(2\pi t);$$

$$\cos(2\pi t) = 1; \quad \Rightarrow \quad v_{max} = 10^{-2} \cdot 2\pi = 6{,}28 \cdot 10^{-2}\frac{м}{с};$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -10^{-2}4\pi^2 \sin(2\pi t); \quad a_{max} = -10^{-2} \cdot 4\pi^2 = 0{,}4\frac{м}{с^2};$$

---

44. Математический маятник с массой груза m = 0,1 кг и с длиной нити подвеса ℓ = 1 м, отклоняется при колебаниях на расстояние A = 5 см. Какую скорость, ускорение и потенциальную энергию будет иметь маятник на расстоянии ζ = 2 см от положения равновесия?

Решение

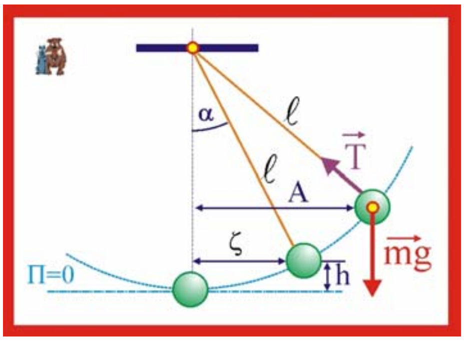


Рис. 44. Математический маятник

1. Период колебаний маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \approx 6{,}28\sqrt{0{,}1} \approx 2с;$$

2. Уравнение движения:

$$x(t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = 5 \cdot 10^{-2}\sin \pi t;$$

3. Время прохождения расстояния ζ:

$$\frac{\zeta}{A} = \sin \pi\tau; \quad \pi\tau = \arcsin\frac{2}{5} = 23{,}58^0; \quad \tau = \frac{23{,}58^0}{\pi} \approx 0{,}26с;$$

4. Скорость в заданной точке траектории:

$$v_\tau = \frac{dx}{dt} = 5 \cdot 10^{-2}\pi \cos \pi\tau = 5 \cdot 10^{-2} \cdot 3{,}14 \cos 0{,}26\pi \approx 0{,}1\frac{м}{с};$$

5. Ускорение в заданной точке траектории:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = -5 \cdot 10^{-2}\pi^2 \sin 0{,}26\pi \approx 0{,}36\frac{м}{с^2};$$

6. Высота подъёма груза в заданном его положении:

$$h = \ell(1 - \cos\alpha) = 1\left(1 - \frac{\zeta}{A}\right) \approx 0{,}6м;$$

7. Потенциальная энергия груза:

$$П_\tau = mgh \approx 0{,}6 \text{ Дж};$$

---

45. Уравнение колебания материальной точки массой m = 16 г имеет вид:

$$x(t) = 0{,}1\sin\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right);$$

Получить уравнение зависимости силы, действующей на точку, от времени. Определить модуль силы через τ = 2 с после начала движения. Какова полная энергия точки?

Решение

1. Зависимость скорости от времени:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 0{,}1\cdot\frac{\pi}{8}\cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right);$$

2. Зависимость ускорения точки от времени:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -0{,}1\cdot\frac{\pi^2}{64}\sin\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right);$$

3. Зависимость возвращающей силы от времени:

$$F(t) = ma(t) = -1{,}6\cdot 10^{-2}\cdot 0{,}1\cdot 0{,}156\sin\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) \approx -2{,}5\cdot 10^{-4}\sin\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right);$$

4. Модуль силы через время τ после начала движения:

$$|F_\tau| = 2{,}5\cdot 10^{-4}\sin\frac{\pi}{2} = 2{,}5\cdot 10^{-4}\,Н;$$

5. Максимальное значение скорости и кинетической энергии точки в момент прохождения положения статического равновесия:

$$v_{max} = 0{,}1\frac{\pi}{8} \approx 0{,}04\frac{м}{с};\quad K_{max} = \Pi_{max} = K + \Pi = \frac{mv_{max}^2}{2} \approx 1{,}23\cdot 10^{-5}\,Дж;$$

---

46. Полная энергия тела, совершающего синусоидальные колебания E = $3\cdot 10^{-5}$ Дж; максимальная сила, действующая на это тело $F_{max} = 1{,}5\cdot 10^{-3}$ Н. Записать уравнение колебаний, если период T = 2 с, а в начальный момент времени тело было смещено от положения равновесия на ζ = 0,03 м.

Решение

1. Амплитуда колебаний:

$$E = F_{max}2A;\quad A = 4\cdot 10^{-2}\,м;$$

2. Начальная фаза колебаний:

$$x(t) = A\sin(\pi t + \varphi_0);\quad \varphi_0 = \arcsin\frac{\zeta}{A} \approx 0{,}27\pi;$$

3. Уравнение колебаний:

$$x(t) \approx 0{,}004\sin(\pi t + 0{,}27\pi);$$

---

47. Пружинный маятник совершает гармонические колебания после того, как эго вывели из состояния равновесия и предоставили самому себе. Через сколько времени (в долях периода) после начала колебаний кинетическая энергия тела станет равной его кинетической энергии?

Решение

1. В начальный момент времени (t = 0) масса обладает нулевой скоростью, т.е. нулевой кинетической энергией и максимальной потенциальной энергией:

$$K_1 = 0; \quad \Pi_1 = \frac{kA^2}{2};$$

2. В точке 2, через время $\tau_1 = T/4$ потенциальная энергия полностью трансформируется в кинетическую энергию:

$$\Pi_2 = 0; \quad K_2 = \frac{mv_{max}^2}{2};$$

3. Равенство кинетической и потенциальной энергии колеблющегося тела будет иметь место через время τ_2:

$$\tau_2 = T/8;$$

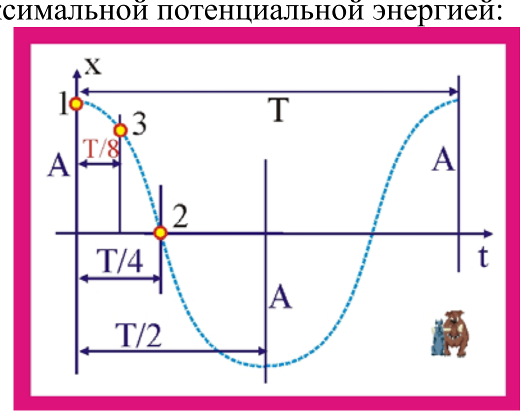


Рис. 47.1. Пружинный маятник

4. Для более строгого доказательства справедливости полученного результата, рассмотрим особенности колебательного движения массы, соединённой с упругим элементом.

5. Получим уравнение движения массы, скреплённой с горизонтальной пружиной на основе анализа действующей системы сил (рис. 47.2). Горизонтальная пружина удобна тем, что позволяет не учитывать действие силы тяжести. Будучи смещённой из положения статического равновесия O в положение B, масса оказывается под действием системы сил

$$\left\{ m\vec{g}; \vec{N}; \vec{F}_{возвр} \equiv F_{упр} = -kx \right\},$$

причём сила тяжести и нормальная реакция связи, могут не учитываться при дальнейшем рассмотрении, их работа на перемещении вдоль оси ox равна нулю, т.к. обе эти силы перпендикулярны направлению перемещения,

$$\delta A = mg \cdot dx \cdot \cos(\vec{i}; m\vec{g}) = 0.$$

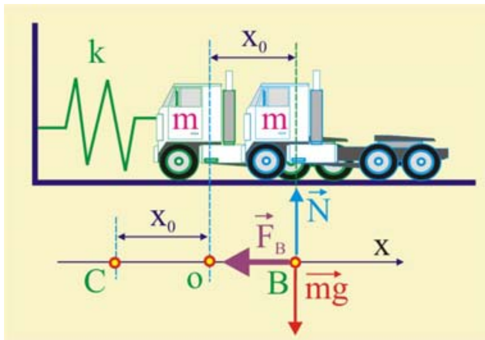


Рис. 47.2. Горизонтальные колебания

6. На направление движения будет иметь проекцию отличную, от нуля, только возвращающая сила, обусловленная, в данном случае, упругостью пружины. Уравнение второго закона Ньютона в проекции на горизонтальную ось, таким образом, запишется так:

$$\sum_{i=1}^{i=n} F_{kx} = m\ddot{x}; \quad -F_B = m\ddot{x}; \quad -kx = m\ddot{x},$$

где k – коэффициент жёсткости пружины. Преобразуем последнее уравнение к виду:

$$m\ddot{x} + kx = 0; \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

7. Для придания уравнению вида одного из известных типов дифференциальных уравнений, введём обозначение:

$$\frac{k}{m} = \omega^2; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

и перепишем исходное уравнение в виде:

$$\ddot{x}+\omega^2 x=0, \qquad \frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0;$$

8. Полученное линейное дифференциальное уравнение второго порядка без свободного члена имеет известное из высшей математики общее решение:

$$x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t\,,$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий. Предположим, что в начальный момент времени при t = 0 задано начальное положение массы x = x(0) и начальная скорость $\dot{x}(0)$. Определим проекцию скорости на направление движения:

$$v_x \equiv \dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t\,.$$

Образуем из уравнений координаты и скорости систему:

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t;\\ \dot{x} &= -C_1\omega\sin\omega t + C_2\cos\omega t.\end{aligned}\right\}$$

9. Подставим в уравнения системы начальные условия:

$$x(0) = C_1\cos\omega\cdot 0 + C_2\sin\omega\cdot 0, \quad \Rightarrow \quad C_1 = x(0);$$

$$\dot{x}(0) = C_1\omega\sin\omega\cdot 0 + C_2\omega\cos\omega\cdot 0, \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{\dot{x}(0)}{\omega}.$$

10. С учётом значений постоянных интегрирования решение исходного уравнения перепишется следующим образом:

$$x = x(0)\cos\omega t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega}\sin\omega t\,.$$

Уравнение представляет собой закон движения массы, соединённой с горизонтальной пружиной без учёта сопротивления среды и силы трения. Если движение будет начинаться без начальной скорости, т.е. $\dot{x}(0)=0$, то закон движения примет вид:

$$x = x_0\cos\omega t\,.$$

11. При наличии начальной фазы колебаний уравнение движения можно переписать следующим образом:

$$x(t) = x_0\cos(\omega t + \varphi_0).$$

12. Уравнение справедливо для всех систем, совершающих свободные собственные не затухающие колебания. Различные системы будут иметь разные выражения для ω^2. Квадрат циклической частоты в рассматриваемых случаях является возвращающей силой, приходящейся на единицу массы и единицу смещения.

13. Существует несколько равноправных форм записи уравнений, с использованием разных обозначений кинематических параметров

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0) \equiv x_0\sin(\omega t + \varphi_0);$$

$$x = x_{max}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right); \quad x = A\sin(2\pi\nu t + \varphi_0);$$

14. Так, например, уравнение движения массы, совершающей колебания на вертикальной пружине не отличаются от уравнения для горизонтальных колебаний, необходимо учесть удлинение пружины под действием силы тяжести

$$k\cdot\Delta x_{CT} = mg \quad \Rightarrow \quad \Delta x_{CT} = \frac{k}{mg};$$

При вертикальных колебаниях сместится только центр колебаний.

15. Получим далее дифференциальное уравнение колебаний пружинного маятника на основе анализа движения с энергетических позиций. Это удобно сделать на примере частицы известной массы, находящейся в потенциальной яме. Прекрасной моделью такой системы может служить металлический шарик внутри криволинейной поверхности (рис.47.3). При смещении массы из состояния равновесия из положения 1 в положение 2 система приобретает запас потенциальной энергии. Если шарик считать материальной точкой, а положение статического равновесия 1 совместить с минимальным значением потенциальной энергии, то:

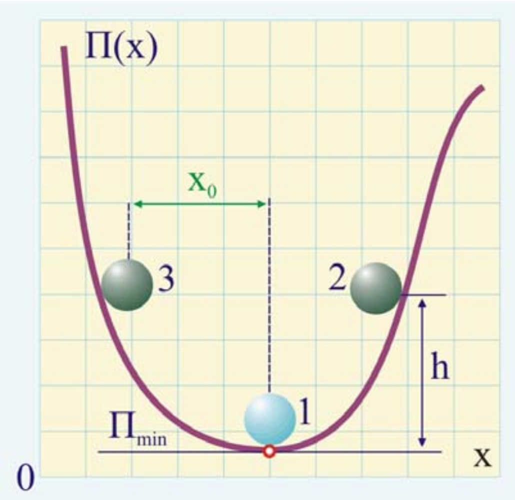


Рис. 47.3. Потенциальная энергия

$$\Pi_2 = mgh\,.$$

16. Если далее шарик отпустить без начальной скорости, то он начнёт двигаться в сторону минимизации потенциальной энергии, причём по мере опускания шарика относительно нулевого уровня потенциальной энергии, будет происходить её трансформация в кинетическую энергию. В точке 1 потенциальная энергия станет равной нулю, шарик будет обладать только кинетической энергией, которая затем снова начнёт преобразовываться в потенциальную энергию. В точке 3 энергия шарика снова станет только потенциальной. Если пренебречь потерями на сопротивление и трение, то шарик будет бесконечно долго перемещаться внутри потенциальной ямы, совершая гармонические собственные незатухающие колебания.

17. Применительно к массе, скреплённой с горизонтальной пружиной (рис.47.2) изменение потенциальной энергии определится уравнением:

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}\,,$$

величина x в конкретном случае зависит от положения массы, которая будет совершать движение в пределах потенциальной ямы. Потенциальную яму любой формы можно представить в виде функции смещения, аппроксимируя её степенным рядом:

$$\Pi(x) = ax^2 + bx^3 + cx \;\; + \ldots,$$

При малых отклонениях $x^2 >> x^3 >> x^4$, с учётом этого $\Pi(x) \cong ax^2$.

В рассматриваемом случае, при растяжении и сжатии пружины, её потенциальная энергия будет равна

$$\Pi(x) = \frac{kx^2}{2}\,, \text{ или } ax^2 = \frac{kx^2}{2}, \quad \Rightarrow a = \frac{k}{2}\,.$$

18. Проекция действующей силы для консервативных механических систем связана с потенциальной энергией известным соотношением:

$$F_x = -\frac{\partial \Pi(x)}{\partial x} = -2ax = -kx\,;$$

Уравнение совпадает с ранее введённым значением возвращающей силы. Перепишем уравнение движения следующим образом:

$$F_x = -kx, \quad m\ddot{x} + kx = 0, \quad m\ddot{x} + \omega^2 mx = 0,$$

или окончательно:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

что аналогично с уравнению полученному для движения массы соединённой с пружиной.

19. Рассмотрим далее энергетические особенности гармонических незатухающих собственных колебаний.

20. Отметим, что упругая сила относится к консервативным силам, работа которых не зависит от вида траектории, а определяется только положением начальной и конечной точки, т.е. для массы, соединённой с горизонтальной пружиной можно записать:

$$\oint_L \vec{F}_{упр} d\vec{\ell} = 0.$$

21. Полная энергия колеблющейся массы должна оставаться постоянной, т.е. справедлив закон сохранения энергии. В процессе колебаний происходит преобразование потенциальной энергии в кинетическую энергию. На дне потенциальной ямы (рис. 47.3) масса обладает только кинетической энергией, которая имеет максимальной значение. В крайних положениях массы энергия имеет потенциальный характер:

$$E_{2,3} = \Pi_{max} = \frac{kx_0^2}{2}, \quad E_1 = K_{max} = \frac{m\dot{x}_0^2}{2} = \frac{mx_0^2\omega^2}{2}.$$

22. Установим закон изменения кинетической и потенциальной энергии в случае гармонического колебания, для этого перепишем уравнения энергий:

$$K(t) = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{mx_0^2\omega^2}{2}\sin^2(\omega t + \varphi_0),$$

$$\Pi(t) = \frac{kx^2}{2} = \frac{kx_0^2}{2}\cos^2(\omega t + \varphi_0),$$

$$E = K + \Pi = \frac{kx_0^2}{2} = \frac{mx_0^2\omega^2}{2}, \quad \langle E \rangle = \frac{E}{2}.$$

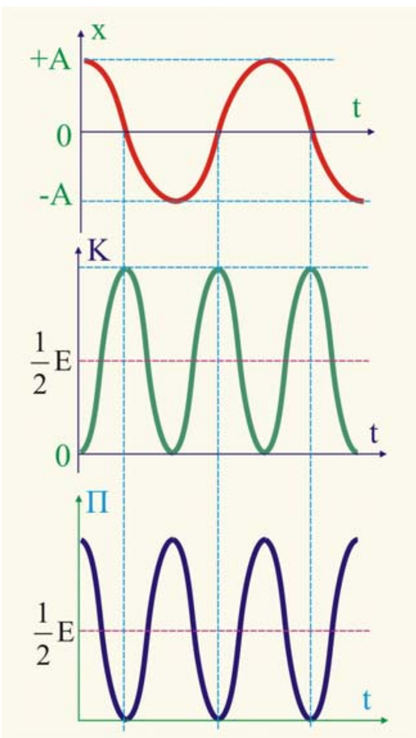


Рис. 47.4. Зависимость смещения и энергии от времени

23. Периодичность изменения энергии установим в соответствии с тригонометрическими правилами:

$$K(t) = K_{max}\sin^2(\omega t + \varphi_0);$$

$$K(t) = K_{max}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2(\omega t + \varphi_0)\right],$$

$$\Pi(t) = \Pi_{max}\cos^2(\omega t + \varphi_0);$$

$$\Pi(t) = \Pi_{max}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2(\omega t + \varphi_0)\right],$$

очевидно, что **кинетическая и потенциальная энергии изменяются с частотой 2ω, в два раза превышающей частоту колебаний.** В моменты амплитудного значения смещения кинетическая энергия обращается в нуль, а полная энергия колебаний равна наибольшему значению потенциальной энергии (рис. 47.4)

$$E = \Pi_{max} = \frac{kA^2}{2}.$$

24. При прохождении системой положения равновесия при x = 0, полная энергия является кинетической

$$E = K_{max} = \frac{mA^2\omega^2}{2}.$$

25. Разумеется, что в отсутствие сопротивления, значение максимальной кинетической энергии совпадает со значением максимальной потенциальной энергии колебательной системы.

26. Средние значения кинетической энергии $< K >$ и потенциальной $< \Pi >$ равны половине полной энергии

$$< K > = < \Pi > = \frac{E}{2} = \frac{kA^2}{4}.$$

---

48. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний имеет вид:

$$0{,}2\ddot{x} + 0{,}8x = 0;$$

Определить период колебаний.

Решение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0; \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{0{,}8}{0{,}2}} = 2\frac{рад}{с}; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}; \quad \Rightarrow \quad T = 3{,}14с;$$

---

49. Колебания тела массой m = 10 г протекают в соответствие с уравнением:

$$\ddot{x} + 0{,}64x = 0;$$

Найти решение этого уравнения, если полная энергия тела E = 0,02 Дж и колебания начинаются из положения равновесия.

Решение

1. Циклическая частота собственных колебаний:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0; \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8\frac{рад}{с};$$

2. Амплитуда колебаний:

$$E = \Pi_{max} = \frac{kA^2}{2}; \quad k = \omega^2 m; \quad A = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} = 2{,}5м;$$

3. Решение уравнения:

$$x(t) = 2{,}5\sin 0{,}8t;$$

---

50. Математический маятник совершает колебания в соответствии с уравнением:

$$\ddot{x} + 2{,}25x = 0;$$

Длина нити подвеса маятника ℓ = 1 м, в начальный момент времени маятник отклонён на угол α = 30^0 от вертикали. Найти зависимость координаты от времени x(t).

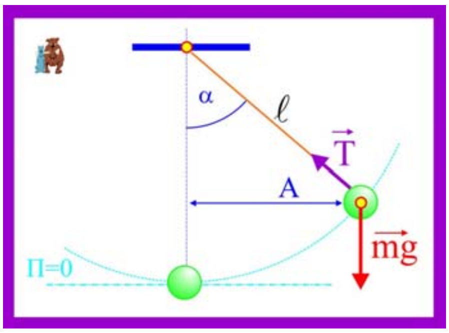


Рис. 50. Амплитуда колебаний

Решение

1. Циклическая частота колебаний:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0; \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5\,\frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

2. Амплитуда колебаний:

$$A = \ell \sin\alpha = 0{,}5\text{м};$$

3. Зависимость координаты груза маятника от времени:

$$x(t) = 0{,}5\cos 1{,}5t;$$

---

51. Записать дифференциальное уравнение колебаний тела массой m = 0,1 кг, колеблющегося на пружине жёсткостью k = 20 Н/м.

Решение

1. Квадрат циклической частоты колебаний тела:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = 200\ \text{с}^{-2};$$

2. Дифференциальное уравнение колебаний:

$$\ddot{x} + 200x = 0; \quad 0{,}1\ddot{x} + 20x = 0;$$

---

52. Тяжёлый маленький шарик подвешен на нити длиной ℓ. Записать уравнение колебаний маятника.

Решение

1. Квадрат циклической частоты колебаний математического маятника:

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell};$$

2. Дифференциальное уравнение колебаний маятника:

$$\ddot{x} + \frac{g}{\ell}x = 0; \quad \ell\ddot{x} + gx = 0;$$

---

53. Тело массой m = 2 кг совершает на пружине гармонические колебания с амплитудой A = 5 см. Полная механическая энергия маятника E = 1 Дж. Записать дифференциальное уравнение колебаний.

Решение

1. Циклическая частота колебаний:

$$E = \Pi_{max} = \frac{kA^2}{2}; \quad k = \frac{2E}{A^2}; \quad \omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{2E}{mA^2} = \frac{2}{2\cdot 2{,}5\cdot 10^{-3}} = 400\text{с}^{-2};$$

2. Дифференциальное уравнение колебаний:

$$\ddot{x} + 400x = 0; \quad 2\ddot{x} + 200x = 0;$$

---

54. Полная механическая энергия тела массой m = 1 кг, совершающего гармонические колебания, равна E = 1 Дж. Максимальная возвращающая сила, действующая на тело F_m = 2 Н. Записать дифференциальное уравнение колебаний.

Решение

1. Амплитуда колебаний:

$$E = \frac{kA^2}{2}; \quad F_m = kA; \quad A = \frac{2E}{F_m};$$

2. Циклическая частота колебаний:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}; \quad k = \omega^2 m; \quad F_m = \omega^2 mA; \quad \omega^2 = \frac{F_m^2}{2mE} = \frac{4}{2\cdot 1\cdot 1} = 2c^{-2};$$

3. Дифференциальное уравнение колебаний:

$$\ddot{x} + 2x = 0;$$

---

55. Колебания материальной точки массой m = 10 $^{-3}$ кг протекают с амплитудой А = 10 $^{-2}$ см при частоте ν = 1 Гц. Определить скорость точки с момент времени, когда её смещение из положения равновесия составит x = 5·10 $^{-3}$ м. Найти амплитудное значение возвращающей силы, действующей на точку и полную механическую энергию.

Решение

1. Составим систему уравнений, состоящую из зависимостей смещения и скорости от времени:

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega t + \varphi); \\ \dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi). \end{cases}$$

2. Исключим их уравнений системы время, для чего возведём их в квадрат

$$x^2 = A^2\cos^2(\omega t + \varphi), \quad \dot{x}^2 = A^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi).$$

3. Освободимся от коэффициентов при тригонометрических функциях:

$$\frac{x^2}{A^2} = \cos^2(\omega t + \varphi), \quad \frac{\dot{x}^2}{A^2\omega^2} = \sin^2(\omega t + \varphi).$$

4. Сложим последние уравнения почленно:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{A^2\omega^2} = \cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi),$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{A^2\omega^2} = 1, \quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{4\pi^2\nu^2 A^2} = 1.$$

5. Разрешим уравнение относительно скорости движения точки:

$$x^2 + \frac{\dot{x}^2}{4\pi^2\nu^2} = A^2, \quad \dot{x}^2 = 4\pi^2\nu^2\left(A^2 - x^2\right),$$

$$\dot{x} = 2\pi\nu\sqrt{A^2 - x^2} = 6{,}28\cdot 1\sqrt{5\cdot 10^{-3}} \cong \pm 0{,}44 \text{ м/с}.$$

6. Амплитудное значение возвращающей силы пропорционально массе токи и её ускорению:

$$F = m\ddot{x} = -m\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi), \quad F_{max} = -4\pi^2\nu^2 mA.$$

$$F_{max} \cong 4\cdot 10\cdot 1\cdot 10^{-3}\cdot 10^{-3} \cong 40 \text{ мкН}.$$

7. При гармонических колебаниях суммарная энергия материальной тоски определяется в виде суммы кинетической и потенциальной энергии. Поскольку в этой задаче речь идёт о колебаниях, протекающих без потерь, то максимальное значение кинетической энергии будет равно максимальному значению потенциальной энергии. Полную энергию целесообразно вычислить, в этой связи, определив максимальное значение кинетической энергии:

$$\Pi_{max} = K_{max} = E = \frac{mv_{max}^2}{2}.$$

8. Амплитудное значение скорости определим из второго уравнения системы

$$\dot{x}_{max} = -A\cdot 2\pi\nu = -10^{-3}\cdot 6{,}28\cdot 1 \cong -6{,}28\cdot 10^{-3}\text{ м/с},$$

$$K_{max} \cong \frac{10^{-3}\cdot 40}{2} \cong 20 \text{ мДж}.$$

---

2. Математический и пружинный маятники

56. Какой длины надо взять маятник, чтобы период его гармонических колебаний был равен T = 1,5 с.

Решение

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}; \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{T^2 g}{4\pi^2} \approx \frac{2{,}25\cdot 10}{40} \approx 0{,}56\text{м};$$

---

57. Маятник длиной ℓ = 98 см имеет период колебаний T = 2 с. Определить по этим данным примерное значение ускорение силы тяжести.

Решение

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}; \quad \Rightarrow \quad g = \frac{4\pi^2\ell}{T^2} \approx \frac{4\cdot 9{,}86\cdot 0{,}98}{4} \approx 9{,}66\frac{\text{м}}{\text{c}^2};$$

Рис. 58. Маятник Фуко

58. Маятник Фуко в Исаакиевском соборе делает ζ = 3 колебания в течение τ = 1 мин. Определить длину нити подвеса маятника при значении ускорения свободного падения $g \approx 9{,}82$ м/с^2.

Решение

1. Период качаний маятника:

$$T = \frac{\tau}{\zeta} = \frac{60}{3} = 20\ \text{c};$$

2. Длина нити подвеса:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}; \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{T^2 g}{4\pi^2} \approx \frac{400\cdot 9{,}82}{39{,}44} \approx 99{,}6\text{м};$$

---

59. Для определения ускорения свободного падения был взят маятник, состоящий из проволоки длиной ℓ = 0,907 м и металлического шарика диаметром d = 40 мм. Продолжительность ζ = 100 качаний маятника оказалась равной τ = 193 с. Вычислить по этим данным ускорение свободного падения.

Решение

1. Период качаний маятника:

$$T = \frac{\tau}{\zeta} = \frac{193}{100} = 1{,}93\ \text{c};$$

2. Значение ускорения свободного падения:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}; \quad \Rightarrow \quad g = \frac{4\pi^2(\ell + 0{,}5d)}{T^2} \approx \frac{4\cdot 9{,}86\cdot(0{,}907 + 2\cdot 10^{-3})}{3{,}72} \approx 9{,}64\frac{\text{м}}{\text{c}^2};$$

---

60. Математический маятник длиной ℓ = 0,995 м за τ = 1 мин совершает ζ = 30 колебаний. Определить ускорение свободного падения.

Решение

1. Период качаний маятника:

$$T = \frac{\tau}{\zeta} = \frac{60}{30} = 2\ \text{с};$$

2. Значение ускорения свободного падения:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}; \quad \Rightarrow \quad g = \frac{4\pi^2\ell}{T^2} \approx \frac{4\cdot 9{,}86\cdot 0{,}995}{4} \approx 9{,}81\frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

---

61. Как отличаются периоды колебаний математических маятников, длины которых равны $\ell_1 = 1\text{м}, \ell_2 = 0{,}25\text{м}$?

Решение

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}};\\ T_2 &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}};\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{\sqrt{\ell_1}}{\sqrt{\ell_2}} = 2;$$

---

62. Как отличаются длины математических маятников, если за одинаковое время один из них совершает χ_1 = 30 колебаний, а второй – χ_2 = 90 колебаний?

Решение

$$\left.\begin{aligned} \frac{\tau}{\chi_1} &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}};\\ \frac{\tau}{\chi_2} &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}};\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{\chi_2}{\chi_1} = \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}; \quad \frac{\ell_1}{\ell_2} = \left(\frac{\chi_2}{\chi_1}\right)^2 = 9;$$

---

63. Как изменится период колебаний математического маятника, если его длину уменьшить в ζ = 2 раза, а массу увеличить в два раза?

Решение

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}};\\ T_2 &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{2g}};\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{2} \approx 1{,}41;$$

---

64. Как надо изменить длину математического маятника, чтобы период его колебаний уменьшился в ζ = 3 раза?

Решение

$$\frac{T_1}{T_2} = \zeta = \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}; \quad \Rightarrow \quad \frac{\ell_1}{\ell_2} = \zeta^2 = 9;$$

---

65. Период колебаний маятника на поверхности Земли T = 1 с. Определить период колебаний этого маятника на поверхности Луны, если ускорение свободного падения на Луне составляет $g_L \approx 1,6$ м/с^2.

Решение

$$\left.\begin{aligned} T_З &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}; \\ T_Л &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_L}}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{T_Л}{T_З} = \sqrt{\frac{g}{g_L}} \approx 2,48; \quad T_Л = 2,48с;$$

---

66. Определить ускорение свободного падения на Луне, если маятниковые часы идут на её поверхности в ξ = 2,46 раз медленнее, чем на Земле?

Решение

$$\frac{T_Л}{T_З} = \xi = \sqrt{\frac{g_З}{g_Л}}; \quad \Rightarrow \quad \frac{g_З}{g_Л} = \xi^2; \quad g_Л = \frac{g_З}{\xi^2} \approx 1,63\frac{м}{с^2};$$

---

67. Каким бы был период колебаний секундного маятника при его перемещении с поверхности Земли на поверхность Луны?

Решение

$$\frac{T_Л}{T_З} = \sqrt{\frac{g_З}{g_Л}}; \quad \Rightarrow \quad T_Л = T_З\sqrt{\frac{g_З}{g_Л}} = 1\cdot\sqrt{\frac{9,82}{1,63}} \approx 2,4с;$$

---

68. Во сколько раз отличается период гармонических колебаний математического маятника на планете, масса и радиус которой в ξ = 4 раза больше, чем у Земли, от периода колебаний такого же маятника на Земле?

Решение

$$\left.\begin{aligned} g_0 &= G\frac{M_0}{R_0^2}; \\ g_x &= G\frac{4M_0}{16R_0^2}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{g_0}{g_x} = 4; \quad \frac{T_x}{T_0} = \sqrt{\frac{g_0}{g_x}} = 2; \quad \Rightarrow \quad T_x = 2T_0;$$

---

69. Период колебаний маятника на поверхности Земли T = 2 с. На сколько изменится период колебаний маятника, если его поднять на высоту h = 10 км над поверхностью?

Решение

1. Периоды колебаний маятника:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_1}}; \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_2}};$$

2. Отношение периодов:

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{g_2}{g_1}};$$

3. Из закона всемирного тяготения следует, что

$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{R^2}{(R+h)^2},$$

где $R \approx 6400$ км– радиус Земли.

4. Определим взаимосвязь между периодами колебаний T_1 и T_2

$$T_2 = \frac{R+h}{R}T_1; \quad T_2 - T_1 = \frac{h}{R}T_1 \approx \frac{10}{6400}\cdot 2 = 3{,}125\cdot 10^{-3}c;$$

---

70. Периоды колебаний двух математических маятников относятся как 3:2. Во сколько раз и какой маятник длиннее?

Решение

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}; \\ T_2 &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}; \quad \frac{\ell_1}{\ell_2} = 1{,}5^2 = 2{,}25;$$

---

71. Один из маятников совершает за одно и то же время на ζ = 30 колебаний меньше другого. Отношение длин маятников ξ = 9/4. Определить число колебаний каждого маятника за это время.

Решение

$$\left.\begin{aligned} \frac{\tau}{n_1} &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}; \\ \frac{\tau}{n_1+\zeta} &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{n_1+\zeta}{n_1} = \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}} = \sqrt{\xi} = \frac{3}{2};$$

$$2n_1 + 60 = 3n_1; \quad n_1 = 60; \quad n_2 = 90;$$

---

72. Один из маятников совершил n_1 = 10 колебаний, другой маятник за то же время совершил n_2 = 6 колебаний. Разность длин маятников $\Delta\ell$ = 0,16 м. Определить длины маятников.

Решение

$$\left.\begin{aligned} \frac{\tau}{n_1} &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}; \\ \frac{\tau}{n_2} &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell_1-\Delta\ell}{g}}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\ell_1-\Delta\ell}{\ell_1}}; \quad \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 = \frac{\ell_1-\Delta\ell}{\ell_1};$$

$$0{,}36\ell_1 = \ell_1 - 0{,}16; \quad \ell_1 = 0{,}25\text{м}; \quad \ell_2 = \ell_1 - \Delta\ell = 0{,}09\text{м};$$

---

73. два маятника, длины которых ℓ_1 = 0,996 м и ℓ_2 = 0,294 м, одновременно начинают колебаться в одинаковых фазах. Через какое наименьшее время фаза их колебаний снова будут одинаковыми?

Решение

1. Периоды колебаний маятников:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}} \approx 2c; \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}} \approx 1c;$$

2. Через $\tau = 2$ с второй маятник совершит два полных колебания, после чего фаза маятников окажутся впервые после начала движения одинаковыми. Таким образом, фазы будут одинаковыми через два полных колебания короткого маятника или через одно полное колебание длинного маятника.

---

74. Какова длина математического маятника, совершающего колебания в соответствии с уравнением: $x(t) = 0{,}004\cos(2t + 0{,}8)$?

Решение

1. Циклическая частота и период колебаний заданного маятника;

$$\omega = 2\frac{\text{рад}}{c}; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}; \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi \approx 3{,}14c;$$

2. Длина маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}; \quad \Rightarrow \quad \ell = \left(\frac{\pi}{2\pi}\right)^2 g \approx 2{,}455\text{м};$$

---

75. Часы с маятником длиной ℓ = 1 м за час отстают на Δt = 10 с. Что необходимо сделать с маятником, чтобы уменьшить отставание?

Рис. 75. Часы с маятником

Решение

1. Часы с маятником, как правило, снабжены специальным регулировочным устройством, изменяющим положение центра масс маятника, т.е. его длину относительно точки подвеса. Поскольку период качаний маятника зависит от его длины:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

т.е. время, демонстрируемое маятниковыми часами, пропорционально числу полных колебаний, которое при фиксированном промежутке времени τ = 3600 с зависит от периода колебаний. Период же колебаний определяется длиной подвеса и ускорения свободного падения

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}}; \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_2}{g}};$$

2. Число колебаний за время τ:

$$n_1 = \frac{\tau}{T_1}; \quad n_2 = \frac{\tau}{T_2}; \quad t_1 = n_1 T_1; \quad t_2 = n_2 T_2;$$

3. Разность показаний часов в этом случае определится как:

$$\pm\Delta t = t_1 - t_2 = \tau\left(1 - \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}\right); \quad \Rightarrow \quad -\Delta t = \tau\left(1 - \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}\right);$$

4. Относительное изменение длины подвеса

$$\zeta = \frac{\ell_2 - \ell_1}{\ell_2};$$

5. Совмещая уравнения, находим:

$$\frac{\ell_1}{\ell_2} = \left(\frac{\Delta t}{\tau} + 1\right)^2 \cong \frac{2\Delta t}{\tau} + 1; \quad \Rightarrow \quad \zeta = \frac{2\Delta t}{\tau} \cong \frac{2 \cdot 10}{3600} \cong 5{,}56 \cdot 10^{-3}; \quad \Delta\ell = -5{,}56\text{мм.};$$

---

76. На сколько уйдут вперёд маятниковые часы за сутки, если их перенести с экватора Земли на полюс? Ускорение свободного падения на экваторе и полюсе g_1 = 9,78 м/с^2 и g_2 = 9,83 м/с^2 соответственно.

Решение

1. Время, демонстрируемое маятниковыми часами, пропорционально числу полных колебаний, которое при фиксированном промежутке времени τ зависит от периода колебаний. Период же колебаний определяется длиной подвеса и ускорения свободного падения

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_1}}; \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_2}};$$

$$n_1 = \frac{\tau}{T_1}; \quad n_2 = \frac{\tau}{T_2}; \quad t_1 = n_1 T_1; \quad t_2 = n_2 T_2;$$

2. Разность показаний часов в этом случае определится как:

$$\pm\Delta t = t_1 - t_2 = \tau\left(1 - \sqrt{\frac{g_2}{g_1}}\right) \cong 8{,}64 \cdot 10^4\left(1 - \sqrt{\frac{9{,}78}{9{,}83}}\right) \cong 220\ \text{с}.$$

---

77. астрономические часы с секундным маятником помещены в камере, находящейся на глубине h = 200 м под поверхностью земли. На сколько отстанут за сутки часы при перенесении их на поверхность?

Решение

1. В подземной камере часы в течение суток должны делать N полных колебаний

$$N = \frac{8{,}64 \cdot 10^4}{T_1},$$

где T_1 – «правильный» период колебаний маятника.

2. Если в результате переноса механизма на поверхность период колебаний маятника вследствие изменения величины ускорения свободного падения стал равным T_2, то отставание за сутки составит величину

$$\Delta\tau = N(T_2 - T_1);$$

3. Период колебаний маятника в поземной камере и на поверхности

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_1}}; \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_2}};$$

4. Отношение периодов:

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{g_2}{g_1}};$$

5. Из закона всемирного тяготения следует, что

$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{R^2}{(R+h)^2},$$

где $R \approx 6400$ км– радиус Земли.

6. Определим взаимосвязь между периодами колебаний T_1 и T_2

$$T_2 = \frac{R+h}{R}T_1; \quad T_2 - T_1 = \frac{h}{R}T_1;$$

7. Отставание часов за сутки составит:

$$\Delta\tau = N\frac{hT_1}{R} \cong 8{,}64 \cdot 10^4 \frac{200}{6{,}4 \cdot 10^6} \cong 2{,}7 \text{ c};$$

---

78. Маятниковые часы, выверенные при комнатной температуре, уходят за сутки на Δt = 2 мин вследствие понижения температуры, т.к. изменяется длина маятника. На сколько при данной температуре необходимо изменить длину маятника для верного хода часов?

Решение

1. В течение суток τ ввиду уменьшения длины маятника часы сделают большее число колебаний, т. к. $\ell_1 > \ell_2, a_1 = a_2 = g$, при этом отставание составит:

$$-\Delta t = \tau\left(1 - \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}\right);$$

2. Запишем относительное удлинение маятника в виде:

$$\zeta = \frac{\ell_2 - \ell_1}{\ell_2};$$

3. Из уравнения Δt определим отношение длин

$$\frac{\ell_1}{\ell_2} = \left(\frac{\Delta t}{\tau} + 1\right)^2 \approx \frac{2\Delta t}{\tau} + 1;$$

4. Разрешим последнее уравнение относительно относительной длины:

$$\zeta = \frac{2\Delta t}{\tau} \cong 3 \cdot 10^{-3} (\approx 0{,}3\% \text{ от } \ell_1);$$

---

79. Математический маятник совершает малые колебания таким образом, что через время τ = 0,3124 с после прохождения положения равновесия, отклонение нити от равновесного положения стало равным α_0, а через время 2τ нить отклонилась на величину $\sqrt{3}\alpha_0$. Определить длину маятника, если 2τ меньше полупериода колебаний.

Решение

1. Уравнение колебаний математического маятника:

$$\alpha(t) = A\sin\omega t;$$

2. По условию задачи:

$$\alpha_0 = A\sin\omega\tau; \quad \sqrt{3}\alpha_0 = A\sin 2\omega\tau;$$

3. Из тригонометрии известно, что:

$$\sin 2\omega\tau = 2\sin\omega\tau\cos\omega\tau;$$

или

$$\sqrt{3}\alpha_0 = 2\alpha_0\cos\omega\tau; \quad \Rightarrow \quad \cos\omega\tau = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \Rightarrow \quad \omega\tau = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6};$$

4. Циклическая частота колебаний математического маятника:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}; \quad \ell = 36g\left(\frac{\tau}{\pi}\right)^2 \cong 3{,}6\ \text{м}.$$

---

80. С одной из вершин Гималаев, с высоты h = 6200 м маятниковые часы были снесены на побережье океана. Насколько изменятся показания часов за сутки в новых условиях?

Решение

1. От высоты над поверхностью океана зависит величина ускорения свободного падения, следовательно, и период колебаний математического маятника. Часы, перенесенные с горной вершины, станут делать большее количество колебаний за сутки, отсюда и нарушение точности хода.

2. Изменение показаний часов за время суток τ, с учётом того, что $\ell_1 = \ell_2$ определится как

$$-\Delta t = \tau\left(1 - \sqrt{\frac{g_2}{g_1}}\right),$$

где g_1 – величина ускорения свободного падения на высоте h, $\tau = 8{,}64\cdot 10^4$ с – продолжительность суток в секундах.

3. Закон гравитации позволяет определить величину g_1

$$g_1 = G\frac{M}{(R+h)^2},$$

где $M \approx 5{,}88\cdot 10^{24}$ кг – масса Земли, $R \approx 6{,}4\cdot 10^6$ м – радиус Земли.

4. Ускорение свободного падения на уровне Мирового океана

$$g_2 = G\frac{M}{R^2};$$

5. Из двух последних уравнений определим отношение величин ускорений свободного падения

$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{(R+h)^2}{R^2};$$

6. Подставим найденное отношение у уравнение для Δt

$$-\Delta t = \left(1 - \frac{R+h}{R}\right) = -\tau\frac{h}{R} \cong -8{,}64\cdot 10^4\frac{6{,}2\cdot 10^3}{6{,}4\cdot 10^6} \cong 83{,}7\ \text{с};$$

---

81. С каким ускорением a и в каком направлении должен двигаться лифт, чтобы, находящийся в нём секундный маятник за время τ = 150 с совершил n = 100 колебаний?

Решение

1. В лифте, движущемся в вертикальном направлении с ускорением a, период колебаний в общем случае определяется уравнением:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g \pm a}},$$

положительный знак ускорения соответствует его направлению вверх, направление же движения лифта (направление вектора скорости) для периода колебаний значения не имеет.

2. По условию задачи лифт 100 колебаний совершил за 150 с, а не за 100, как это предполагается в его стационарном состоянии, следовательно, период колебаний в данном случае определяется уравнением

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g - a}} = \frac{\tau}{n};$$

3. Принимая

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 1\,с,$$

определим отношение периодов

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\tau}{nT_0} = \sqrt{\frac{g}{g - a}};$$

4. Определим из последнего уравнения величину ускорения лифта

$$a = g\left(1 - \frac{n^2T_0^2}{\tau^2}\right) \cong 5{,}4\,\frac{м}{с^2};$$

---

82. . Математический маятник длины ℓ подвешен к потолку вагона, движущегося горизонтально с ускорением a_0. Найти период колебаний маятника.

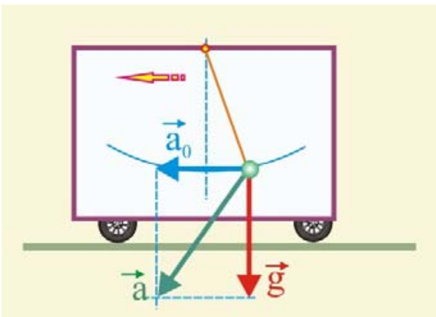


Рис. 82. Маятник в вагоне

Решение

1. Груз маятника в движущемся вагоне находится под действием одновременно двух составляющих ускорения: ускорения свободного падения $\vec{g}$ и ускорения вагона $\vec{a}$, которые направлены перпендикулярно друг другу, поэтому модуль результирующего ускорения определится как:

$$|\vec{a}| = \sqrt{g^2 + a_0^2};$$

2. Период колебаний математического маятника, расположенного в ускоренно движущемся вагоне будет определяться уравнением

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g^2 + a_0^2}};$$

---

83. В неподвижном лифте расположен математический маятник с периодом колебаний T = 1 с. С каким ускорением движется лифт, если период колебаний маятника стал равным T_1 = 1,1 с?

Решение

1. Поскольку период колебаний маятника увеличился, то его величина определяется уравнением

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g-a}};$$

2. Период колебаний неподвижного маятника

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}};$$

3. Отношение квадратов периодов

$$\left(\frac{T}{T_0}\right) = \frac{g}{g-a}; \quad \Rightarrow \quad a = g\left[1-\left(\frac{T_0}{T}\right)^2\right] \cong g\cdot\left[1-\left(\frac{1}{1{,}1}\right)^2\right] \cong 0{,}173g;$$

---

84. Математический маятник длиной ℓ = 1 м с массой повешенного шарика m = 0,1 кг отклоняют от положения равновесия на δ = 0,1 м. Определить действующую на шарик силу и зависимость потенциальной энергии шарика от смещения δ.

Решение

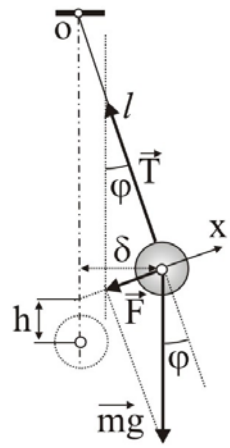


Рис. 84. Малые отклонения δ

1. Изобразим маятник в положении, заданном по условию задачи и приложим к шарику действующие силы: силу тяжести mg и силу натяжения нити T. Выберем систему координат, совместив её начало с центром шарика, который в данной задаче можно считать материальной точкой, так как длина нити подвеса полагается существенно большей размеров шарика.

2. Величина возвращающей силы F численно будет равна проекции силы тяжести mg на направление выбранной оси x

$$|\vec{F}| = mg\sin\varphi.$$

3. Выразим угол отклонения маятника φ через его параметры

$$\sin\varphi = \delta/\ell.$$

4. Совместив уравнения, получим следующее уравнение для модуля возвращающей силы

$$|\vec{F}| = \frac{mg\delta}{\ell} = \frac{0{,}1\cdot 10\cdot 0{,}1}{1} = 0{,}1\ \text{Н}.$$

5. Потенциальная энергия численно равна работе, совершаемой при подъеме шарика на некоторую высоту h . Элементарная работа, при малых значениях угла отклонения определится в виде произведения возвращающей силы (3) на бесконечно малое перемещение шарика $d\delta$

$$d\Pi = |\delta A| = \frac{mg\delta}{\ell}d\delta.$$

6. Конечное изменение потенциальной энергии определится в виде интеграла

$$\Pi = \frac{mg}{\ell}\int_0^{\delta}\delta d\delta = \frac{mg\delta^2}{2\ell} \cong 0{,}05\,\text{Дж}.$$

---

85. Математический маятник массой m и длиной ℓ колеблется гармонически без сопротивления. Какую работу совершает возвращающая сила за время τ, считая от момента выхода из равновесного положения, если амплитуда колебаний равна ΔR?

Решение

1. Работа возвращающей силы определяется изменением потенциальной энергии

$$A = -\Delta\Pi = -\left(\frac{\zeta\Delta r_2^2}{2} - \frac{\zeta\Delta r_1^2}{2}\right),$$

где $\cdot\zeta$ – коэффициент пропорциональности, Δr – величина перемещения.

2. В начальный момент времени $\Delta r_1 = 0$, поэтому

$$A = -\frac{\zeta\Delta r_2^2}{2};$$

3. Для математического маятника, колеблющегося в поле сил тяжести

$$\zeta = \frac{mg}{\ell}; \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}};$$

4. Перемещение груза представляет собой периодический процесс

$$\Delta r(t) = \Delta R\sin\omega t = \Delta r\sin\sqrt{\frac{g}{\ell}}t;$$

5. С учётом полученных соотношений, работа запишется следующим образом

$$A = -\frac{mg}{\ell}\Delta R^2\sin^2\sqrt{\frac{g}{\ell}}\tau; \quad A = -\frac{mg}{\ell}\Delta R^2\sin^2\frac{2\pi}{T}\tau;$$

---

86. Маятник укреплён на тележке, скатывающейся без сопротивления по наклонной плоскости. В неподвижном состоянии период колебаний математического маятника равен T_0. Как изменится период колебаний мятника во время скатывания тележки с наклонной плоскости?

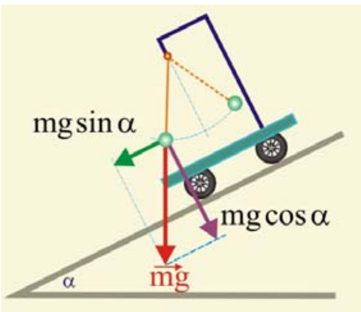


Рис. 86. Маятник на тележке

Решение

1. Разложим силу тяжести на две составляющих, одна из которых параллельна плоскости, а вторая – перпендикулярна. Влияние на колебательный процесс будет оказывать только составляющая перпендикулярная опорной плоскости.

2. Колебания маятника, таким образом, бут протекать при воздействии на него на силы $m\vec{g}$, а силы

$$mg_y = mg\cos\alpha;$$

3. Период колебаний скатывающегося маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g\cos\alpha}} = \frac{T_0}{\sqrt{\cos\alpha}},$$

т.е. ввиду того, что $\cos\alpha \le 1$, период колебаний скатывающегося на тележке маятника становится больше.

---

87. Найти период малых колебаний величин смещения бруска, который может перемещаться без сопротивления внутри обруча радиуса R.

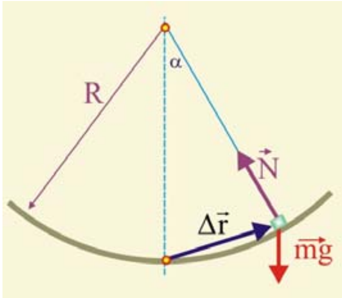


Рис. 87. Брусок в обруче

Решение

1. Движение бруска в данном случае не отличается от движения массы подвешенной на нити, роль связи, наложенной на движущееся тело выполняет нормальная реакция связи $\vec{N}$.

2. В общем случае период колебаний определяется как

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

3. Роль коэффициента k играет величина

$$k = \frac{mg}{R}; \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}};$$

---

88. Найти период малых колебаний математического маятника с массой m и длиной ℓ, помещённого в электрическое поле напряженностью $\vec{E}$,если груз маятника несёт положительный заряд q.

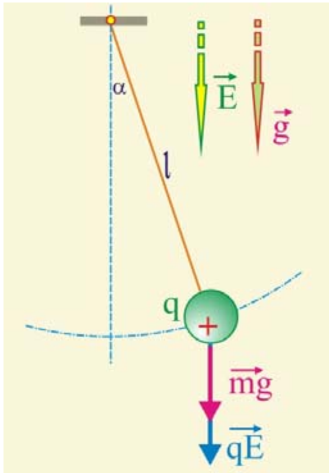


Рис. 88. Заряженный шарик маятника

Решение

1. Заряженный маленький шарик, помещённый на нити в электрическое поле, находится под действием суммарной силы, состоящей из силы тяжести и силы Кулона. Закон ньютона в проекции на направление касательной запишется следующим образом

$$ma = mg + qE;$$

$$a = g + \frac{qE}{m};$$

2. Период колебаний маятника определится как:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{a}} = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell}{mg + qE}};$$

---

89. Кабина лифта движется сначала с ускорением a_1 в течение времени τ_1, а затем с замедлением в течение времени τ_2. Сколько колебаний сделает математический маятник длиной ℓ за время движения лифта?

Решение

1. Время движения лифта

$$\tau = \tau_1 + \tau_2;$$

2. Число полных колебаний за это время

$$N = N_1 + N_2;$$

3. Периоды колебаний при двух режимах движения

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g + a_1}}; \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g - a_2}};$$

4. Число полных колебаний, совершённых маятником

$$N=\frac{\tau_1}{T_1}+\frac{\tau_2}{T_2}=\frac{\sqrt{g+a_1}+\sqrt{g-a_2}}{2\pi\sqrt{\ell}}.$$

---

90. Маятник, представляющий груз массой m = 1 rиuна невесомом стержне длиной l = 1 м, совершает малые гармонические колебания с амплитудой A = 0,1 м. Определить максимальное и минимальное значение силы, действующей на стержень.

Решение

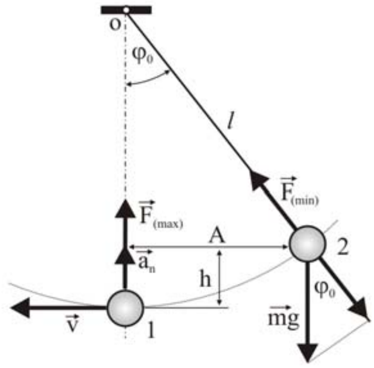


Рис. 90. Силы в стержне

1. Определим угол отклонения стержня

$$\varphi_0=\arcsin\frac{A}{\ell}\cong 5{,}74^0.$$

2. Минимальное значение силы, приложенной к стержню, будет наблюдаться в положении шарика 2, когда он обладает только потенциальной энергией а скорость равна нулю. Максимальное значение силы будет иметь место в момент прохождения массой положения статического равновесия 1.

3. При амплитудном отклонении маятника сила, приложенная к стержню по модулю будет равна проекции силы тяжести на направление отклонённого стержня

$$F_{(min)}=mg\cos\varphi_0\cong 1\cdot 10\cdot 0{,}995\cong 9{,}95\,H.$$

4. В момент прохождения массой точки статического равновесия его энергия будет только кинетическая, что позволяет, используя закон сохранения найти величину скорости

$$\Pi=mgh=mg\ell(1-\cos\varphi_0),\quad K=\frac{mv_{(max)}^2}{2},$$

$$mg\ell(1-\cos\varphi_0)=\frac{mv_{(max)}^2}{2},\quad v_{(max)}=\sqrt{2g\ell(1-\cos\varphi_0)}.$$

5. Поскольку шарик маятника движется по круговой траектории радиуса *l*, то движение будет ускоренным, величина нормального ускорения определится как

$$a_n=\frac{v_{(max)}^2}{\ell}=2g(1-\cos\varphi_0).$$

6. Максимальное значение силы растяжения стержня в положении массы 1 будет равно сумме силы тяжести и фиктивной силы инерции, обусловленной наличием нормального ускорения

$$F_{(max)}=mg+\frac{mv_{(vax)}^2}{\ell}=m[g+2g(1-\cos\varphi_0)]\cong 10{,}1\,H.$$

---

91. Математический маятник с длиной подвеса ℓ и массой m помещён в магнитное поле напряжённостью E. Грузу маятника сообщён заряд q. Найти параметры поля и заряда, при которых периоды колебаний маятника в поле и в его отсутствии будут одинаковыми?

Решение

1. Возможны несколько вариантов направления электрического поля.

2. Рассмотрим горизонтальное поле, когда векторы силы Кулона и силы тяжести составляют прямой угол. В этом случае модуль вектора результирующего ускорения груза будет определяться как:

$$a_1 = \sqrt{\left(\frac{qE}{m}\right)^2 + g^2}\,;$$

3. Соотношение периодов колебаний маятника:

$$2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\sqrt{\left(\frac{qE}{m}\right)^2 + g^2}}}; \quad \Rightarrow \quad g^2 = \left(\frac{qE}{m}\right)^2 + g^2,$$

равенство возможно только при $q = 0$.

4. Вертикальное поле, направленное вниз, т.е. совпадающее с направлением силы тяжести:

$$a_2 = \frac{qE}{m} + g; \quad 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\frac{qE}{m} + g}}; \quad \Rightarrow \quad g = \left(\frac{qE}{m}\right) + g,$$

в этом случае совпадение периодов будет иметь место только при $q = 0$.

5. Вектор напряжённости электрического поля направлен вертикально вверх:

$$a_3 = \frac{qE}{m} - g; \quad 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\frac{qE}{m} - g}}; \quad \Rightarrow \quad g = \left(\frac{qE}{m}\right) - g, \quad q = \frac{2mg}{E};$$

---

92. Маятник в виде стального шарика массой $m = 5\cdot 10^{-3}$кг, подвешенный на нити, совершает колебания с периодом $T_1 = 1$ с. Когда под шариком расположили постоянный магнит, то период колебаний уменьшился до $T_2 = 0{,}8$ с. Определить силу притяжения шарика к магниту.

Решение

1. Длина маятника:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}; \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{T_1^2 g}{4\pi^2};$$

2. Ускорение движения шарика в присутствии магнитного поля:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g + a}} = 2\pi\sqrt{\frac{T_1^2 g}{4\pi^2 (g + a)}}; \quad a = \frac{g\left(T_1^2 - T_2^2\right)}{T_2^2};$$

3. Сила взаимодействия шарика и магнита:

$$F = ma = \frac{mg\left(T_1^2 - T_2^2\right)}{T_2^2} \approx \frac{5\cdot 10^{-3}\cdot 9{,}82\cdot(1 - 0{,}64)}{0{,}64} \approx 0{,}0276\text{Н};$$

---

93. Математический маятник с длиной нити подвеса $\ell = 1$ м закреплён к потолку железнодорожного вагона, движущегося по прямолинейному горизонтальному участку пути с постоянной скоростью. При какой скорости вагона шарик станет раскачиваться с наибольшей амплитудой, если расстояние между стыками рельсов равно $x = 12{,}5$ м?

Решение

1. Наибольшая амплитуда колебаний маятника будет наблюдаться при совпадении времени следования стыков рельсов с периодом колебаний маятника:

$$\frac{x}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}; \quad \Rightarrow \quad v = \frac{x}{2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}} \approx \frac{12{,}5}{6{,}28\sqrt{\frac{1}{9{,}82}}} \cong 6{,}25\frac{м}{с} \equiv 22{,}5\frac{км}{час};$$

---

94. Длина математического маятника ℓ = 0,24 м. Маятник приводится в колебательное движение первоначальным отклонением нити от вертикали на угол $\varphi_m = 14^0$. Определить угол отклонения маятника в моменты времени: τ_1 = 0,25 с; τ_2 = 1,6 с; τ_3 = 5 с.

Решение

1. Циклическая частота колебаний маятника:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}} \approx \sqrt{\frac{g}{\ell}} \approx 6{,}3966 с^{-1};$$

2. Уравнение колебаний маятника:

$$\varphi(t) = \varphi_m \cos\omega t = 7{,}8\cdot 10^{-2}\pi\cos\omega t;$$

3. Углы отклонения в заданные моменты времени:

$$\varphi_1 = 7{,}8\cdot 10^{-2}\pi\cos(6{,}3966\cdot 0{,}25) \approx 7{,}8\cdot 10^{-2}\pi\cos 1{,}6 \approx -0{,}41^0;$$

$$\varphi_2 = 7{,}8\cdot 10^{-2}\pi\cos(6{,}3966\cdot 1{,}6) \approx 7{,}8\cdot 10^{-2}\pi\cos 10{,}235 \approx -9{,}68^0;$$

$$\varphi_3 = 7{,}8\cdot 10^{-2}\pi\cos(6{,}3966\cdot 5) \approx 7{,}8\cdot 10^{-2}\pi\cos 31{,}983 \approx 11{,}84^0;$$

---

95. Математический маятник отклонили на угол $\alpha = 5^0$. Найти максимальное значение скорости шарика, если его угловая скорость ω = 2 рад/с.

Решение

1. Длина математического маятника:

$$\frac{2\pi}{\omega} = T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}; \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{g}{\omega^2} \approx 2{,}455 м;$$

2. Высота подъёма шарика над уровнем нулевой потенциальной энергии:

$$h = \ell(1 - \cos\alpha) = 9{,}34\cdot 10^{-3} м;$$

3. Максимальное значение скорости в момент прохождения положения статического равновесия:

$$\frac{mv_{max}^2}{2} = mgh; \quad \Rightarrow \quad v_{max} = \sqrt{2gh} \approx \sqrt{2\cdot 9{,}82\cdot 9{,}34\cdot 10^{-3}} \approx 0{,}428\frac{м}{с};$$

---

96. Маятник массой m = $2{,}5\cdot 10^{-2}$ кг отклонён от положения равновесия, при этом модуль силы натяжения нити подвеса F_N = 0,2 Н. Определить модуль возвращающей (квазиупругой) силы F_k.

Решение

1. Квазиупругая (возвращающая) сила в случае математического маятника представляет собой геометрическую сумму силы натяжения нити подвеса маятника и силы тяжести:

$$\left|\vec{F}_k\right| = \sqrt{(mg)^2 + F_N^2 + mgF_N\cos\left(m\vec{g};\vec{F}_N\right)};$$

2. С другой стороны, $\vec{F}_k$ направлена по касательной к траектории движения маятника, т.е. перпендикулярно $\vec{F}_N$, другими словами, ΔABC прямоугольный, с известной гипотенузой и одни катетом:

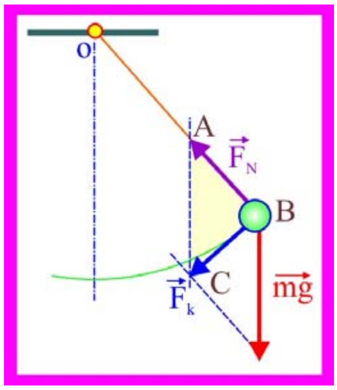


Рис. 96. Возвращающая сила

$$(mg)^2 = F_N^2 + F_k^2; \quad \Rightarrow \quad F_k = \sqrt{(mg)^2 - F_N^2} \approx \sqrt{0{,}06 - 0{,}04} \approx 0{,}141\ \text{Н};$$

---

97. Электрическая лампочка, соединённая с пружиной совершает вертикальные колебания с постоянной частотой ν = 1 Гц и амплитудой A = 20 см. При нахождении лампочки в крайнем нижнем и крайнем верхнем положении кажется, что она вспыхивает ярче, несмотря на то, что через нить накала течёт постоянный по величине ток. Почему?

Решение

1. Запишем уравнения смещения и скорости при гармонических свободных колебаниях и построим графики этих зависимостей

$$\begin{cases} x(t) = A\cos\dfrac{2\pi}{T}t; \\ \dot{x}(t) = A\dfrac{2\pi}{T}\sin\dfrac{2\pi}{T}t. \end{cases}$$

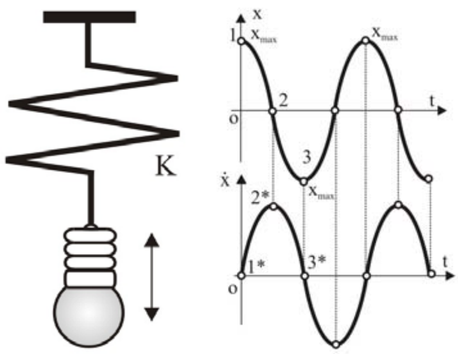


Рис. 97. Колебания лампочки на пружине

2. Из системы уравнений видно, что в момент времени 1 отклонение лампочки от положения равновесия будет максимальным, в то время как скорость лампочки (точка 2* нижнего графика) будет равна нулю, другими словами, у наблюдателя будет создаваться впечатление что, лампочка на некоторое мгновение останавливается. В окрестностях точек 1*, 3* скорость лампочки будет иметь относительно малое значение.

3. Вычислим максимальное значение скорости

$$\dot{x}_{max} = 0{,}2 \cdot 6{,}28\sin\frac{\pi}{2} = 1{,}25\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

4. Когда смещение лампочки будет достигать значений x(t) = 0, 95 A скорость лампочки будет равна 0,2 м/с.

---

98. На невесомую чашку, подвешенную на пружине жёсткостью k, с высоты h падает пластилиновый шарик массой m, испытывая абсолютно неупругий удар. Определить амплитуду возникших гармонических колебаний.

Решение

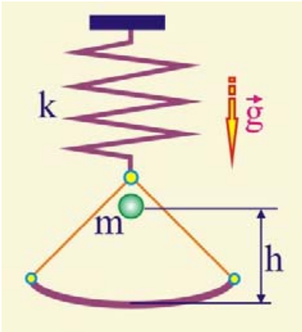


Рис. 98. Падение шарика

1. Невесомость чашки позволяет допустить, что в момент абсолютно неупругого удара чашка будет иметь такую же скорость как и пластилиновый шарик, потому что кинетическая энергия шарика непосредственно перед ударом будет равна кинетической энергии чашки с шариком сразу после удара.

2. Таким образом, потенциальная энергия шарика преобразуется в потенциальную энергию растягиваемой пружины. Если при ударе шарика максимальное отклонение чашки обозначить через x, то закон сохранения энергии позволяет записать следующее соотношение

$$mgh + mgx = \frac{kx^2}{2};$$

$$mg(h + x) = \frac{kx^2}{2};$$

3. Образовалось квадратное уравнение относительно смещения x

$$kx^2 - 2mg(h + x) = 0; \quad kx^2 - 2mgx - 2mgh = 0;$$

$$x^2 - \frac{2mg}{k}x - \frac{2mg}{k}h = 0;$$

4. Решением этого уравнения будет выражение:

$$x_{1,2} = \frac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgh}{k}};$$

5. Поскольку в уравнении закона сохранения отсутствует кинетическая энергия, то рассматриваются моменты времени при которых скорость чашки с шариком равна нулю, т.е. в верхних и нижних положениях чашки, когда она отклоняется от положения равновесия до амплитудных значений смещения. Величина перед корнем представляет собой положению равновесия чашки с шариком

$$kx_{1,2} = mg; \quad \Rightarrow x_{1,2} = \frac{mg}{k};$$

6. Величину $x_{1,2}$ модно выразить через амплитуду колебаний

$$x_{1,2} = \frac{mg}{k} \pm A; \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgh}{k}};$$

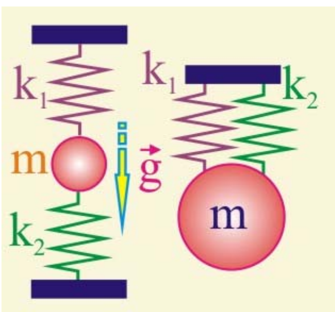


Рис. 99. Параллельные пружины

99. Шарик массой m закреплён между двумя пружинами, обладающими жёсткостью k_1 и k_2., соответственно. Найти циклическую частоту колебаний шарика. Как изменится частота, если пружины поменять местами?

Решение

1. Колебательная система состоит из массы m и двух параллельно соединённых пружин, изменение размеров которых будет при колебаниях одинаковым, величина сжатия одной пружины будет равна

величине растяжения другой пружине. Эквивалентный коэффициент упругости определится в виде суммы коэффициентов жёсткости

$$F_1 = k_1x, \quad F_2 = k_2x, \quad F = F_1 + F_2 = x(k_1 + k_2),$$

$$kx = x(k_1 + k_2), \Rightarrow k = k_1 + k_2.$$

2. Циклическая частота колебаний шарика

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}};$$

3. Циклическая частота при перемене пружин местами не изменится, изменится только положение статического равновесия шарика.

---

100. Некий груз массой m = 0,1 кг подвешен на пружине жёсткостью k = 16 Н/м на невесомой нерастяжимой нити. Какой может быть максимальная амплитуда гармонических колебаний груза?

Решение

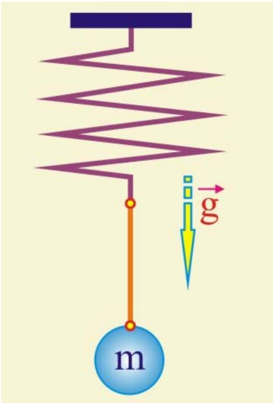


Рис. 100. Груз на нити и пружине

1. Малые колебания груза будут носить гармонический характер, т.е. удовлетворять дифференциальному уравнению

$$m\frac{d^2y}{dt^2} - ky = 0;$$

Другими словами нить не должна удлиняться и сокращаться.

2. Такая ситуация будет иметь место при:

$$\frac{d^2y}{dt^2} \le g;$$

3. В этом случае изменение размеров пружины, как упругого элемента, будет подчиняться закону Гука, т.е.

$$mg = kA; \quad \Rightarrow \quad A_m = \frac{mg}{k} \cong \frac{0{,}1 \cdot 10}{16} \cong 0{,}0625\ \text{м}.$$

---

101. На пружину подвесили массу, которая её растянула на Δy = 0,16 м. Чему равен период малых гармонических колебаний груза на пружине?

Решение

1. Период колебаний груза на пружине равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}};$$

2. Удлинение пружины, в данном случае, будет равно амплитуде возникающих после отпускания груза колебаний. Между амплитудой колебаний и упругими свойствами пружины существует очевидная связь, следующая из условия статического равновесия

$$mg = kA = k\Delta y,$$

откуда легко определить отношение массы к коэффициенту упругости

$$\frac{m}{k} = \frac{\Delta y}{g}; \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta y}{g}} \cong 6{,}28\sqrt{\frac{0{,}16}{10}} \cong 0{,}8\ \text{с};$$

---

102. Две массы m_1 и m_2 соединены невесомой пружиной жёсткостью k. Определить период колебаний системы, считая, что перемещение масс происходят вдоль одной прямой.

Решение

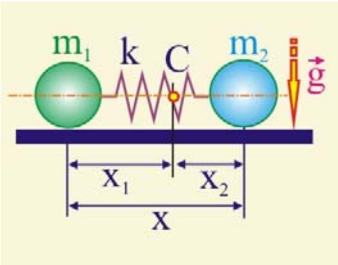


Рис. 102. Связанные массы

1. Движение масс в данном случае будет происходить при неподвижности центра масс C, т.е. систему можно рассматривать в виде двух пружинных маятников. Если первоначальную длину пружины обозначить через x, то можно записать следующую систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{m_1}{m_2} &= \frac{x_2}{x_2}; \\ x_1 + x_2 &= x; \end{aligned}\right\}$$

2. Выразим из системы уравнений величины x_1 и x_2

$$x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}x; \quad x_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}x;$$

3. Коэффициент жесткости пружины, как известно, обратно пропорционален её длине, т.е. для пружин длиной x_1 и x_2 можно записать следующие соотношения

$$\left.\begin{aligned} \frac{k_1}{k} &= \frac{x}{x_1}; \\ \frac{k_2}{k} &= \frac{x}{x_2}; \end{aligned}\right\}$$

4. Подставим в последние уравнения значения x_1 и x_2 и разрешим их относительно k_1 и k_2

$$k_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_2}k; \quad k_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1};$$

5. Неподвижность центра масс предполагает одинаковость периодов колебаний масс и движение в противоположные стороны. Исходя из этого, период колебаний определится как:

$$T = T_1 = T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}};$$

---

103. На гладком столе расположены две массы m_1 = 0,1 кг и m_2 = 0,3 кг, соединённые невесомой пружиной жесткостью k = 50 Н/м. Одна из масс касается стены. Первоначально массы соединены нитью длиной x_0 = 0,06 м, при этом пружина сжата на Δx = 0,02 м. Описать движение системы после того как нить пережгут.

Решение

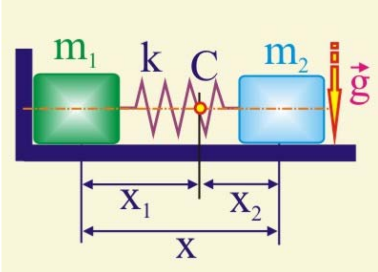


Рис. 13.93. Пережигание нити

1. После пережигания нити массы придут в движение: левая масса оторвётся от стены, а правая масса станет двигаться вправо. Массы начнут колебаться в противофазе, причём центр масс будет перемещаться прямолинейно и равномерно, потому что на систему по условию задачи не действуют внешние силы, а внутренние силы изме-

нить количества движения не могут, потому что их геометрическая сумма для любой системы равна нулю.

2. Методика определения периода колебаний изложена в предыдущей задаче

$$T = T_1 = T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}} \cong 6{,}28\sqrt{\frac{0{,}1\cdot 0{,}3}{50\cdot 0{,}4}} \cong 0{,}24\ \text{с};$$

3. Определим скорость центра масс при пережигании пружины с учётом того, что вся потенциальная энергия, первоначально сжатой пружины, трансформируется в кинетическую энергии правой массы

$$\frac{k(\Delta x)^2}{2} = \frac{m_2 v_2^2}{2};$$

4. Определим скорость правой массы

$$v_2 = \Delta x\sqrt{\frac{k}{m_2}};$$

5. Левый груз сразу после освобождения пружины покоится, поэтому скорость центра масс можно определить из закона сохранения импульса

$$(m_1 + m_2)v_C = m_1 v_1 + m_2 v_2; \quad \Rightarrow \quad v_C = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2};$$

$$v_C = \frac{\Delta x\sqrt{k m_2}}{m_1 + m_2} \cong \frac{0{,}02\sqrt{50\cdot 0{,}3}}{0{,}4} \cong 0{,}2\,\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

---

104. К пружине подвешен груз. Максимальная кинетическая энергия колебаний груза K_m = 1 Дж, при амплитуде А = 0,05 м. Определить жёсткость пружины, если колебания протекают по синусоидальному закону.

Решение

1. Запишем уравнение кинетической энергии колеблющейся массы

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{m}{2}\omega^2 A^2\cos^2(\omega t + \varphi);$$

$$K = \frac{m4\pi^2}{2T^2}A^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right);$$

2. Максимальное значение кинетической энергии будет иметь место при:

$$A^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) = 1; \quad \Rightarrow \quad K_m = \frac{2\pi^2 m}{T^2}A^2 = \frac{2\pi^2 m}{\frac{m}{k}}A^2 = \frac{1}{2}A^2 k;$$

3. Определим значение коэффициента упругости пружины

$$k = \frac{2K_m}{A^2} = \frac{2}{0{,}05^2} \cong 800\,\frac{\text{Н}}{\text{м}};$$

---

105. Как изменится период вертикальных колебаний массы, висящих на двух одинаковых пружинах, если от последовательного соединения пружин перейти к параллельному их соединению?

Решение

1. Удлинение пружины определяется условием равновесия

$$mg = kx; \quad \Rightarrow \quad x = \frac{mg}{k};$$

2. Если пружины соединить последовательно, то их удлинение будет одинаковым

$$x_2 = 2x = \frac{2mg}{k}; \quad x_2 = \frac{mg}{k_1}; \quad \frac{2mg}{k} = \frac{mg}{k_1}; \quad \Rightarrow \quad k_1 = \frac{k}{2};$$

3. При параллельном соединении пружин

$$k_2 = 2k;$$

4. Запишем уравнения периодов колебаний

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}; \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}};$$

5. Отношение периодов колебаний

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{k_2}{k_2}} = \sqrt{4} = 2;$$

---

106. Медный шарик, подвешенный на пружине, совершает вертикальные гармонические колебания. Как изменится период колебаний, если к пружине подвесить вместо медного шарика алюминиевый шарик такого же размера?

Решение

1. Периоды колебаний шариков описываются уравнениями

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= 2\pi\sqrt{\frac{4\pi r^3\rho_1}{3k}}; \\ T_2 &= 2\pi\sqrt{\frac{4\pi r^3\rho_2}{3k}}; \end{aligned}\right\}$$

2. Отношение периодов

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} = \sqrt{\frac{8{,}6\cdot 10^3}{2{,}6\cdot 10^3}} \cong 1{,}82;$$

---

107. К пружине подвешена чашка весов с гирями совершающая гармонические колебания с периодом T_1 = 0,5 с. На чашку весов положили дополнительную массу, после сего период колебаний стал T_2 = 0,6 с. Определить, на сколько изменилась длина пружины?

Решение

1. Запишем уравнения периодов колебаний

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}; \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m+\Delta m}{k}};$$

2. Возведём уравнения периодов в квадрат и вычтем из второго уравнения первое уравнения

$$T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2\frac{\Delta m}{k};$$

3. Коэффициент упругости определим из уравнения закона Гука

$$F = k\Delta y; \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\Delta mg}{\Delta y};$$

4. Подставим значение коэффициента упругости в уравнение разности квадратов периодов

$$T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2\frac{\Delta y}{g}; \quad \Rightarrow \quad \Delta y = \frac{g}{4\pi^2}\left(T_2^2 - T_1^2\right) \cong \frac{10}{40}\left(0{,}036 - 0{,}025\right) \cong 0{,}0275 \text{ м};$$

---

108. Масса, висящая на пружине неподвижно, удлиняет её на Δy = 0,05 м. После смещения массы из положения равновесия возникли гармонические колебания. Определить период этих колебаний.

Решение

1. Из условия равновесия массы на пружине определим отношение статического смещения к коэффициенту упругости

$$mg = k\Delta y; \quad \frac{m}{k} = \frac{\Delta y}{g};$$

2. Подставим полученное соотношение в уравнение периода

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta y}{g}} \cong 6{,}28\sqrt{\frac{0{,}05}{10}} \cong 0{,}44 \text{ с}.$$

---

109. Платформа с грузом, подвешенная на пружине совершает гармонические колебания с периодом T_1. После добавления на платформу некоторой массы она стала колебаться с периодом T_2. Определить удлинение пружины после добавления массы, если её первоначальное удлинение составляло y?

Решение

1. Запишем систему уравнений на основании Закона Гука

$$\left.\begin{aligned} &mg = ky; \\ &(m + \Delta m)g = k(y + \Delta y); \end{aligned}\right\}$$

2. Поделим второе уравнение на первое

$$\frac{y + \Delta y}{y} = \frac{m + \Delta m}{m};$$

откуда

$$\Delta y = \left(\frac{m + \Delta m}{m} - 1\right)y;$$

3. Величину $m + \Delta m$ определим из уравнений периодов колебаний

$$\left.\begin{aligned} &T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}; \\ &T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m + \Delta m}{k}}; \end{aligned}\right\}$$

4. Возведём уравнения в квадрат и поделим друг на друга

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = \frac{m + \Delta m}{m}; \quad \Rightarrow \quad \Delta y = \left[\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 - 1\right]y;$$

---

110. На невесомой вертикальной пружине закреплена некоторая масса, которая совершает гармонические колебания с периодом T = 0,25 с. Если массу не прикреплять и сжать пружину на x_0 = 0,05 м, то после отпускания масса отделяется от пружины. На какую высоту h в отсутствие сопротивления подскочит масса.

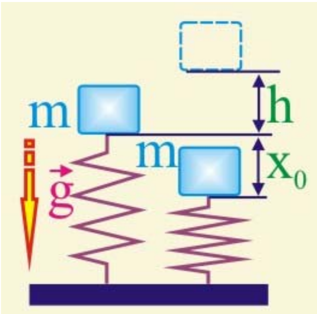


Рис. 110. Отскок массы

Решение

1. Потенциальная энергия массы в наивысшей точке её траектории должна быть равна потенциальной энергии, запасаемой пружиной

$$mgh = \frac{k(x_0 + x)^2}{2} = \frac{k\left(x_0 + \frac{mg}{k}\right)^2}{2};$$

2. Определим из уравнения закона сохранения энергии высоту подъёма массы

$$h = \frac{k\left(x_0 + \frac{mg}{k}\right)^2}{2mg} = \frac{kx_0^2}{2mg} + x_0 + \frac{mg}{2k};$$

3. Коэффициент упругости пружины и масса неизвестны, но их комбинацию m/k можно выразить из уравнения периода колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}; \quad \Rightarrow \quad \frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{m}{k};$$

4. Перепишем уравнение высоты с учётом значения m/k

$$h = x_0 + \frac{2\pi^2 x_0^2}{gT^2} + \frac{gT^2}{8\pi^2} \cong 0{,}14 \text{ м};$$

---

111. Пластина с насыпанным не её поверхность песком совершает горизонтальные гармонические колебания с циклической частотой ω. Какова амплитуда колебаний пластины, если песчинки отскакивают от пластины на высоту h = 3 мм по отношению к их положению статического равновесия.

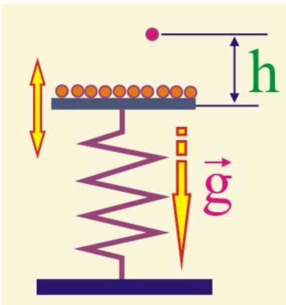


Рис. 111. Песчинки на пластине

Решение

1. Запишем уравнение второго закона Ньютона для отскакивающей пластинки

$$F = m(g + a);$$

2. Ускорение песчинки вплоть до её отрыва от пластины определится как:

$$a = -\omega^2 x = -4\pi^2\nu^2 x;;$$

3. Отрыв песчинки произойдёт при F = 0

$$mg + ma = 0; \quad \Rightarrow \quad -a \ge |\vec{g}|; \quad x = \frac{g}{\omega^2};$$

4. Запишем закон сохранения энергии для песчинки

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{m\omega^2 A^2}{2} = -\frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{mg^2}{2\omega^2};$$

5. После отрыва от пластины песчинки движутся только под действием силы тяжести

$$\frac{mv^2}{2} = mg(h - x) = mg\left(h - \frac{g}{4\pi^2\nu^2}\right);$$

6. Совместим уравнения законов сохранения

$$mg\left(h-\frac{g}{4\pi^2\nu^2}\right)-\frac{m4\pi^2\nu^2A^2}{2}=\frac{mg^2}{8\pi^2\nu^2};\quad \left(h-\frac{g}{\omega^2}\right)-\frac{\omega^2A^2}{g}=\frac{g}{2\omega^2};$$

$$\frac{h\omega^2-g}{\omega^2}-\frac{g}{2\omega^2}=\frac{\omega^2A^2}{g};\quad A=\sqrt{\frac{g}{\omega^2}\left(\frac{h\omega^2-g}{\omega^2}-\frac{g}{2\omega^2}\right)}=\frac{g}{\omega}\sqrt{\frac{2h}{g}-\frac{1}{\omega^2}};$$

---

112. Два груза общей массой m = 1 кг, соединённые пружиной жёсткостью k = 100 Н/м, подвешены на нити. Определить расстояние, на которое нужно сместить нижний груз вертикально вниз, чтобы при последующих его гармонических колебаниях верхний груз оставался неподвижным.

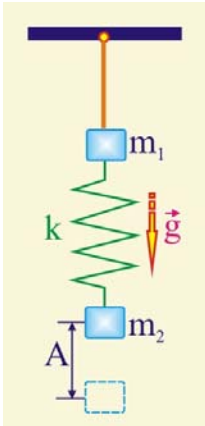


Рис. 112.Грузы с пружиной

Решение

1. Максимальное статическое смещение m_2 соответствует амплитуде последующих колебаний. Верхний груз будет оставаться в покое при условии

$$k(A-y_0)\le m_1g\,,$$

т.е. сила тяжести приложенная к верхнему грузу должна быть больше или равна силе упругости пружины $(A - y_0)$, где y_0 – статическое удлинение пружины под действием m_2.

2. Величина статического удлинения пружины удовлетворяет условию

$$ky_0=m_2g;\quad \Rightarrow y_0=\frac{m_2g}{k};$$

3. Подставим значение y_0 в исходное уравнение

$$k\left(A-\frac{m_2g}{k}\right)\le m_1g;\quad kA\le m_1g+m_2g=(m_1+m_2)g=mg;$$

$$A\le\frac{mg}{k};$$

---

113. Доска с лежащим на ней бруском расположена на гладкой горизонтальной поверхности стола. Система совершает гармонические колебания под действием упругой пружины с периодом T = 1 с и максимальной скоростью v_m = 0,5 м/с. Доска и брусок относительно неподвижны. При какой величине коэффициента трения между бруском и доской такие колебания возможны?

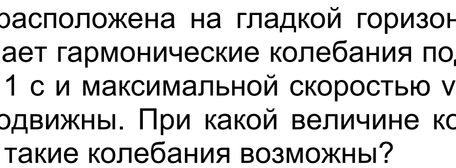


Рис. 113. Груз на подпружиненной доске

Решение

1. Заданные по условию задачи максимальная скорость и период связаны соотношением:

$$v_m=\omega A=\frac{2\pi}{T}A;\quad\Rightarrow\quad A=\frac{v_mT}{2\pi};$$

2. Совместные колебания бруска с доской будут происходить в том случае, когда сила трения будет превосходить или будет рана силе, возникающей вследствие ускоренного движения при гармонических колебаниях

$$\mu mg\ge ma;\quad \mu g\ge a;\quad \mu g\ge\omega^2A;$$

3. Подставим в последнее уравнение значение амплитуды и разрешим его относительно коэффициента трения μ

$$\mu g \ge \frac{4\pi^2}{T^2}\frac{v_m T}{2\pi}; \quad \mu \ge \frac{2\pi}{T}\frac{v_m}{g} \ge 6{,}28 \cdot 0{,}05 \ge 0{,}314;$$

114. Два груза общей массой m = 1 кг, связанные нитью, подвешены на невесомой пружине жёсткостью k = 100 Н/м. На какое расстояние можно сместить вниз грузы, чтобы при возникающих после этого свободных гармонических колебаниях нить не провисала?

Решение

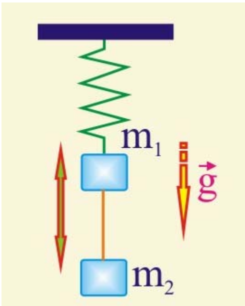


Рис. 114. Грузы, связанные нитью

1. Нить не будет провисать, если сила тяжести нижнего груза будет больше или равна силе, возникающей вследствие ускоренного движения при гармонических колебаниях

$$m_2 g \ge m_2 a; \quad g \ge \omega^2 A,$$

где ω – циклическая частота колебаний, A – амплитуда колебаний, g – ускорение свободного падения.

2. Циклическая частота колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad \Rightarrow \quad g \ge \frac{k}{m}A; \quad \Rightarrow \quad A \ge \frac{mg}{r} \ge \frac{10}{100} \cong 0{,}1\,\text{м};$$

115. Между двумя шарами массой m и M связанными нитью вставлена сжатая пружина жёсткостью k. Система шаров движется вдоль прямой, проходящей через центры шаров со скоростью v_0. Нить пережигают и один из шаров останавливается. Найти величину начального сжатия пружины.

Решение

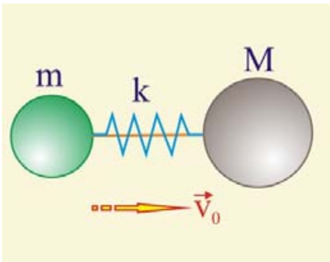


Рис. 115. Связанные шары

1. Судя по направлению движения, остановиться при восстановлении размеров пружины может только шар массой m, потому что силы $\vec{F} = m\vec{a}$ и сила упругости со стороны пружины направлены в противоположные стороны.

2. Образуем для шаров систему уравнений из закона сохранения импульса и закона сохранения энергии

$$\left.\begin{aligned} &(M+m)v_0 = Mv; \\ &\frac{kx^2}{2} + \frac{(M+m)v_0^2}{2} = \frac{Mv^2}{2}, \end{aligned}\right\}$$

где x – первоначальное сжатие пружины, v – скорость шара массы M.

3. Решая систему уравнений относительно x (из первого уравнения выражается неизвестная скорость v и подставляется во второе уравнение) получим:

$$x = v_0\sqrt{\frac{m}{k}\left(1 + \frac{m}{M}\right)};$$

116. На гладком горизонтальном столе покоится шар массой M, соединенный с горизонтальной невесомой пружиной жёсткостью k. В центр шара попадает горизонтально летящая пуля массой m, со скоростью v_0. Происходит абсолютно неупругий удар в результате которого пуля застревает в центре шара. Определить амплитуду и период возникших после удара гармонических колебаний шара с пулей внутри.

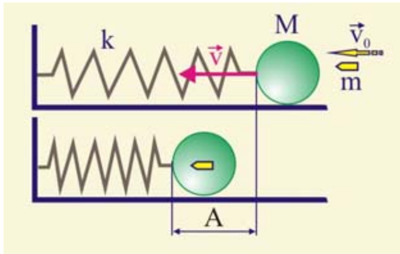


Рис. 116. Пуля в шаре

Решение

1. Запишем уравнения закона сохранения импульса и энергии

$$\left.\begin{aligned} &(M+m)v = mv_0; \\ &\frac{kA^2}{2} - \frac{(M+m)v^2}{2} = 0, \end{aligned}\right\}$$

где A – амплитуда возникших колебаний, v – совместная скорость шара с пулей.

2. Выражая из первого уравнения совместную скорость v и подставляя найденное значение во второе уравнение системы, получим:

$$A = \frac{mv_0}{M+m}\sqrt{\frac{M+m}{k}};$$

3. Период колебаний системы

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}};$$

---

117. На чашку массой m_1, подвешенную на пружине с коэффициентом жёсткости k, падает с высоты h пластилиновый шарик массой m_2. Система приходит в колебательное состояние. Определить амплитуду возникших гармонических колебаний.

Решение

1. Скорость пластилинового шарика в момент соприкосновения с чашкой

$$v_1 = \sqrt{2gh};$$

2. Скорость чашки с шариком определится из закона сохранения импульса

$$m_2v_1 = (m_1+m_2)v; \quad m_2\sqrt{2gh} = (m_1+m_2)v;$$

$$v = \frac{m_2}{m_1+m_2}\sqrt{2gh};$$

3. Статическое удлинение пружины до падения пластилинового шарика

$$k\Delta y = m_1g; \quad \Rightarrow \quad \Delta y = \frac{m_1g}{k};$$

4. Закон сохранения энергии, применительно к колеблющейся чашке с пластилиновым шариком:

$$\frac{ky^2}{2} - \frac{k\Delta y^2}{2} = \frac{(m_1+m_2)^2}{2} + (m_1+m_2)g(y-\Delta y),$$

где $(m_1+m_2)g(y-\Delta y) = A_{mg}$ – работа силы тяжести.

5. Подставим в уравнение закона сохранения значение скорости v и Δy

$$\frac{ky^2}{2} - \frac{k}{2}\left(\frac{m_1g}{k}\right)^2 = \frac{m_2^2(m_1+m_2)}{(m_1+m_2)^2}2gh + (m_1+m_2)g\left(y - \frac{m_1g}{r}\right);$$

6. Получено квадратное уравнение относительно амплитуды A

$$\frac{ky^2}{2}-(m_1+m_2)g\left(y-\frac{m_1g}{k}\right)+\frac{m_2^2}{(m_1+m_2)}2gh+\frac{m_1^2g^2}{2k}=0\,;$$

$$\frac{ky^2}{2}-y(m_1+m_2)g+\frac{m_1g^2(m_1+m_2)}{k}+\frac{2ghm_2^2}{m_1+m_2}+\frac{m_1^2g^2}{2k}=0;$$

$$y^2-y\frac{2g(m_1+m_2)}{k}+\frac{2m_1g^2(m_1+m_2)}{k^2}+\frac{4ghm_2^2}{k(m_1+m_2)}+\frac{m_1^2g^2}{k^2}=0$$

$$y=y_{st}\mp A=\frac{m_1+m_2}{k}g\pm\sqrt{\frac{m_2^2g^2}{k^2}+\frac{2ghm_2^2}{(m_1+m_2)k}}\,;$$

Первый член полученного уравнения характеризует положение статического равновесия чашки, второй член − определяет собственно амплитудное значение смещения.

---

117. Шар массы m и радиуса r скользит по поверхности лунки с кривизной R. Найти зависимость потенциальной энергии шара от величины его малых колебаний x из положения статического равновесия.

Решение

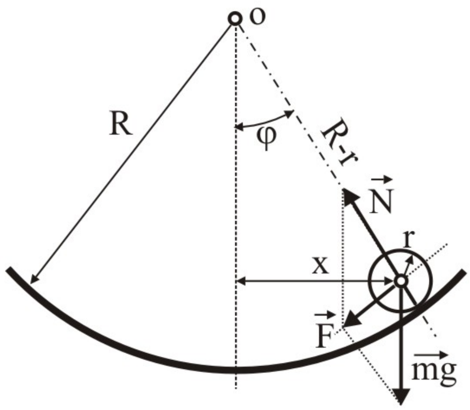


Рис. 117. Шар в Лунке

1. Охарактеризуем смещение шара из положения равновесия углом отклонения φ. Смещение центра шара на расстояние x от положения равновесия приведёт к изменению взаимного направления силы тяжести mg и нормальной реакции связи N, что, собственно и является причиной возникновения возвращающей силы F

$$F=mg\sin\varphi=mg\frac{x}{R-r}\,.$$

2. Бесконечно малое изменение потенциальной энергии будет численно равно элементарной работе, совершаемой на перемещении dx, составит

$$d\Pi=\frac{mgx}{R-r}dx\,.$$

3. Изменение потенциальной энергии на конечном перемещении запишется в виде следующего определённого интеграла

$$\Pi=\frac{mg}{R-r}\int_0^x xdx=\frac{mgx^2}{2(R-r)}\,.$$

---

118. Горизонтальный жёлоб слева от нижней линии выгнут по цилиндрической поверхности радиуса r, а справа – по поверхности радиуса R. Найти отношение наибольших отклонений влево и вправо при малых колебаниях в жёлобе небольшого шарика.

Решение

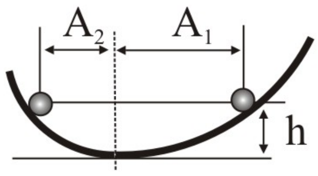


Рис. 118. Шарик в жёлобе

1. Выберем за нулевой уровень потенциальной энергии положение шарика в точке стыковки поверхностей. В соответствие с законом сохранения энергии, при отклонении шарика из положения ста-

тического равновесия вправо на высоту h, шарик запасёт потенциальную энергию

$$\Pi_1 = \frac{mgA_1^2}{2R}.$$

2. После скатывания в точку равновесия шарик по инерции станет подниматься по жёлобу меньшего радиуса на ту же высоту, но при этом отклонится на меньшее расстояние от положения равновесия

$$\Pi_2 = \frac{mgA_2^2}{2r}.$$

3. Поскольку потери при колебаниях отсутствуют, то возможно энергии по разным профилям поверхности приравнять

$$\Pi_1 = \Pi_2; \quad \frac{mgA_1^2}{2R} = \frac{mgA_2^2}{2r}, \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \sqrt{\frac{R}{r}}.$$

---

119. На концах лёгкого диэлектрического стержня длиной ℓ закреплено два точечных разноимённых, заряда модули, которых одинаковы и равны q. Конструкция помещена в электрическое поле с напряжённостью E. На заряды действует сила Кулона F = ± qE. Найти массу каждого шарика m, если амплитуда малых поперечных колебаний равна A, а максимальная скорость v_m.

Решение

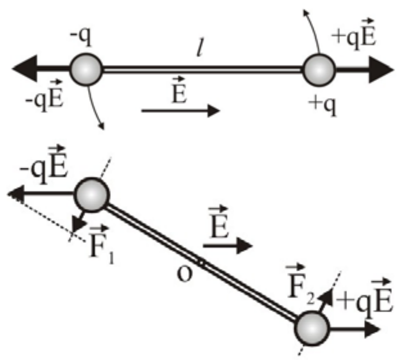


Рис. 119. Колебания диполя

1. Система электрических зарядов, приведенная на рисунке, находится в положении статического равновесия. При повороте стержня вокруг оси, проходящей через середину стержня перпендикулярно плоскости вращения, т.е. вокруг точки o, возникнут проекции сил Кулона F_1 и F_2, которые будут стремиться вернуть заряды в исходное положение. Другими словами возникнет возвращающие силы, являющиеся необходимым условием возникновения колебаний.

2. При амплитудном значении смещения система зарядов будет обладать потенциальной энергией

$$\Pi = \frac{qEA^2}{\ell}.$$

3. В момент прохождения зарядами положения статического равновесия вследствие отсутствия сопротивления, потенциальная энергия преобразуется в кинетическую энергию

$$\frac{mv_m^2}{2} = \frac{qEA^2}{\ell}, \Rightarrow m = \frac{2qEA^2}{\ell v_m^2}.$$

---

120. Посередине натянутой струны длины 2l закреплён шар массой m. Определить суммарную силу F_Σ, действующую на шар со стороны струны, если его поперечное смещение из положения равновесия $\delta \ll l$, а сила натяжения струны F не зависит от смещения. Как зависит потенциальная энергия шара от его смещения δ? С какой скоростью движется шар в момент прохождения положения статического равновесия? Амплитуда смещения шара A.

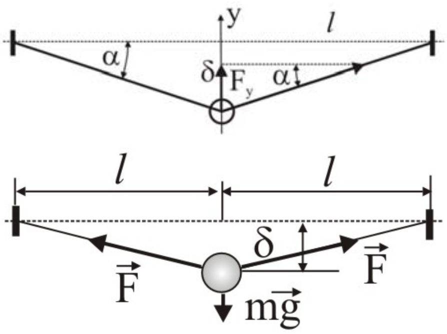


Рис. 120.Шар на струне

Решение

1. Определим проекцию силы натяжения струны на направление смещения шара

$$F_y = F\cos\alpha \cong F\text{tg}\alpha \cong F\frac{\delta}{\ell}.$$

2. Модуль силы, приложенной к шару со стороны струны, определится как сумма проекций сил натяжения

$$F_\Sigma = 2F_y = -\frac{2F\delta}{\ell}, \quad F_{\Sigma(\max)} = -\frac{2FA}{\ell}.$$

3. Потенциальная энергия будет численно равна работе силы, приложенной к шару на перемещении δ

$$\Pi = A_{0\to\delta} = 2F_\Sigma\delta = \frac{2F\delta^2}{\ell}.$$

4. Ввиду отсутствия затухания, потенциальная энергия шара в нижнем положении при отклонении на δ = A, полностью трансформируется в кинетическую энергию в момент прохождения шаром положения статического равновесия

$$\frac{2FA^2}{\ell} = \frac{mv_m^2}{2}, \quad v_m = A\sqrt{\frac{2F}{m\ell}}.$$

---

121. Небольшое тело массой m = 1 кг соединённое с горизонтальной пружиной, совершает малые колебания с амплитудой A = 10 см, причём, максимальное значение энергии достигает величины E = 50 Дж. Через какой промежуток времени τ смещение точки после начала движения достигнет половины амплитуды δ = 0,5 A? Какова средняя скорость за это время?

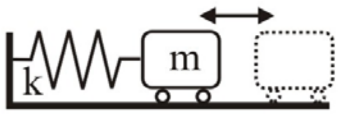


Рис. 121. Тело на пружине

Решение

1. По величине заданной энергии можно определить жёсткость пружины, т.к. при амплитудном смещении массы её энергия будет только потенциальной

$$E = \Pi = \frac{kA^2}{2}, \Rightarrow k = \frac{2E}{A^2}.$$

2. Определим далее частоту собственных колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{A}\sqrt{\frac{2E}{m}} \cong 100\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

3. Предположим, что колебания происходят по закону

$$x(t) = A\sin\omega t,$$

в этом случае заданное условие смещения можно записать следующим образом

$$\frac{A}{2} = A\sin(\omega\tau), \;\; \omega\tau = \arcsin\frac{1}{2}, \quad \omega\tau = 0{,}52\,\text{рад},$$

$$\tau = \frac{0{,}52}{\omega} = 5{,}3\cdot 10^{-3}\,\text{с}.$$

4. Средняя скорость по определению равна частному от деления перемещения на время, за которое оно совершается

$$< v >= \frac{A}{2\tau} \cong 50\frac{м}{с}.$$

---

122. На какое расстояние δ необходимо сместить из положения равновесия груз массой m = 0,5 кг, соединённый с пружиной жёсткостью k = 200 Н/м, чтобы он проходил положение равновесия со скоростью v_m = 10 м/с?

Решение

1. Заданные масса и жёсткость пружины позволяют определить частоту собственных колебаний пружинного маятника

$$\omega = \sqrt{k/m}.$$

2. Максимальная скорость груза определится как

$$v_m = \omega\delta = \delta\sqrt{\frac{k}{m}}, \Rightarrow \delta = v_m\sqrt{\frac{m}{k}} = 0{,}5\,м.$$

---

123. Колебательная система состоит их вертикальной пружины и небольшого тела массой m_1. Ели к колеблющемуся телу прибавить массу m_2 = 0,3 кг, то частота колебаний уменьшится в два раза. Определить начальную массу тела.

Решение

1. Запишем уравнения собственных частот

$$\begin{cases} \nu_1 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m_1}}; \\ \nu_2 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m_1 + m_2}}. \end{cases}$$

2. Поделим уравнения друг на друга

$$n = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1}}.$$

3. Разрешим уравнение относительно искомой массы m_1

$$n^2 = 1 + m_2/m_1,\ m_1 = m_2/\left(n^2 - 1\right) = 0{,}1\,кг.$$

---

124. Вагон при скорости v сталкивается с пружинным демпфером. В момент остановки вагона пружина демпфера сжалась на величину x. Определить время взаимодействия вагона и демпфера.

Решение

1. Начиная с момента касания буферов вагона демпфера, систему вагон – демпфер можно рассматривать как типичную колебательную систему с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}};$$

2. Время взаимодействия будет равно четверти периода, т.е. времени деформации пружины демпфера

$$\tau = \frac{T}{4};$$

3. Запишем закон сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{kx^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{k} = \frac{x^2}{v^2};$$

4. Совмещая полученные соотношения, запишем уравнение для времени взаимодействия

$$\tau = \frac{\pi}{2}\frac{x}{v};$$

---

125. На льдину в виде пластины площадью s = 5 м^2 с небольшой высоты падает груз массой m = 80 кг. Вместе с грузом льдина начинает гармонически вертикально перемещаться с периодом T = 1 с. Какова толщина льдины?

Решение

1. Искомая толщина льдины d входит в уравнение её массы M

$$M = \rho_1 sd,$$

где ρ_1 – плотность льда.

2. При падении груза на льдину предположим, что она погружается в воду на величину Δy, что приведёт к возникновению возвращающей силы, обусловленной изменением величины силы Архимеда

$$\Delta F_A = \rho_2 gs\Delta y,$$

где ρ_2 – плотность воды.

3. Циклическая частота колебаний льдины с грузом

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho_1 gs}{M+m}}; \quad \omega^2 = \frac{\rho_1 gs}{M+m}; \quad \omega = 2\pi\nu; \quad \nu = 1\,\text{Гц};$$

4. Выразим из уравнения циклической частоты массу льдины

$$M = \frac{\rho_2 gs}{\omega^2} - m;$$

5. Подставляя значение массы в исходное уравнение, и разрешая его относительно толщины льдины, получим:

$$d = \frac{M}{\rho_1 s} = \frac{\rho_2 gs - m\omega^2}{\omega^2 \rho_1 s} \cong 0{,}26\ \text{м}.$$

---

126. Кубик льда с длиной ребра L плавает в воде. Определить период его собственных колебаний.

Решение

1. В своём обычном состоянии кубик льда находится в состоянии равновесия. Сила тяжести уравновешивается силой Архимеда. При погружении кубика в воду увеличивается объём его погруженной части, сила Архимеда возрастает, т.е. появляется возвращающая сила, стремящаяся вернуть систему в исходное состояние, что, собственно, и является причиной возникновения колебаний.

2. Второй закон Ньютона представится следующим образом:

$$mg = \rho_1 Vg,$$

где ρ_1 – плотность воды, V – объём кубика.

3. Применительно к процессу колебаний уравнение перепишется следующим образом:

$$-mg + \left(V - \Delta L L^2\right)\rho_1 g = ma_y;$$

4. Выразим массу кубика через плотность льда

$$m = \rho_2 L^3;$$

5. Разрешим уравнение второго закона Ньютона относительно ускорения с учётом значения массы кубика

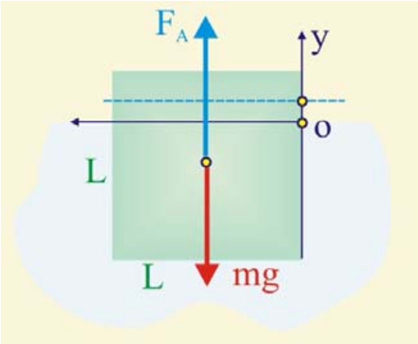


Рис. 126. Кубик льда в воде

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{g}{L}y = 0,$$

другими словами, получено дифференциальное уравнение второго порядка вида:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0,$$

откуда следует, что:

$$\omega^2 = \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{g}{L};$$

6. Период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_2 L}{\rho_1 g}}.$$

---

127. Определить период колебаний жидкости в U – образной трубке постоянного сечения при общей длине заполненной жидкостью части 2L.

Решение

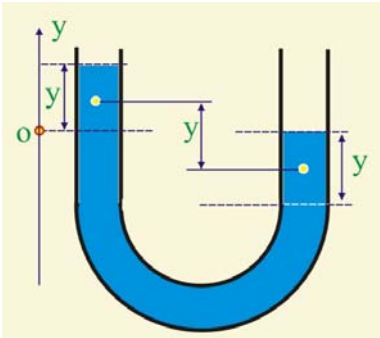


Рис. 127. Колебания жидкости

1. Колебания уровня жидкости возникнут в том случае, если в одном из колен сосуда жидкость поднимется на величину y, а во втором колене на такую же величину опустится, при этом разность давлений по отношению к уровню статического равновесия будет составлять

$$\Delta p = \rho g 2y.$$

2. Величина возвращающей силы

$$F = \Delta p s = \rho g 2ys;$$

3. Масса жидкости, находящейся в трубке

$$m = 2\rho s L;$$

4. Уравнение второго закона Ньютона

$$2\rho s L a_y = -2\rho g s y; \quad \ddot{y} + \frac{g}{L}y = 0; \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{g}{L};$$

5. Период колебаний уровня жидкости

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}};$$

---

128. Математический маятник с длиной нити подвеса L и массой m соединён с горизонтальной невесомой пружиной жёсткостью k. Определить период малых колебаний системы. Как изменится ответ, если пружину заменить резиновой лентой с эквивалентной длиной и жёсткостью?

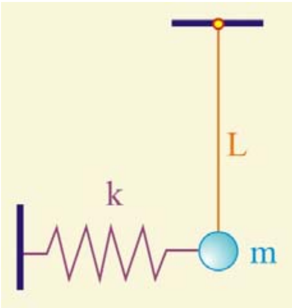


Рис. 128. Маятник с пружиной

Решение

1. Если систему отклонить из положения равновесия на бесконечно малую величину r, то выражение для полной энергии можно записать в виде

$$E = Ar^2 + B\left(\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

где A, B – положительные константы. В качестве обобщённой координаты dr может быть использована как линейная величина, так и угловая, например, угол отклонения нити от вертикали.

2. Если потери при движении системы отсутствуют, то энергия такой системы сохраняется, потому что силы тяжести и упругие силы относятся к консервативным силам. Закон сохранения энергии можно представить так:

$$\frac{dE}{dt} = 0; \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{d^2r}{dt^2}\right) = -\frac{A}{B}r; \quad \ddot{r} + \frac{A}{B}r = 0; \quad \ddot{r} + \omega^2 r = 0$$

3. Таким образом, мы пришли к дифференциальному уравнению, описывающему процесс гармонических колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{A}{B}};$$

4. Запишем уравнение полной энергии применительно к данной системе

$$E = \left(k + \frac{mg}{L}\right)\frac{r^2}{2} + \frac{m\dot{r}^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}\left(k + \frac{mg}{L}\right); \quad B = \frac{m}{2};$$

5. Период колебаний системы

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{B}{A}} = 2\pi\sqrt{\frac{mL}{kL + mg}};$$

6. Если пружину заменить резиновой лентой, то она станет оказывать влияние только при растяжении, поэтому период колебаний такой системы представится так:

$$T_2 = \frac{T_1}{2} + 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = \pi\left(\sqrt{\frac{mL}{kL + mg}} + \sqrt{\frac{L}{g}}\right);$$

---

129. Во сколько раз изменится частота малых колебаний небольшого груза массой m на стержне, если к середине невесомого стержня прикрепить горизонтальную пружину жёсткостью k. В равновесном состоянии стержень занимает вертикальное положение.

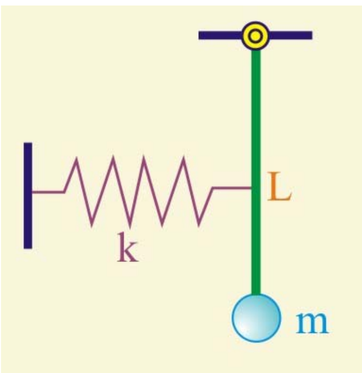


Рис. 129. Стержень с пружиной

Решение

1. Если пружину мысленно убрать, то оставшаяся конструкция будет представлять собой обычный математический маятник с часто-

той собственных колебаний

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}};$$

2. Прикрепление к середине стержня пружины будет увеличивать величину возвращающей силы, следовательно, частота собственных колебаний должна возрасти.

3. При отклонении из положения равновесия стержня на бесконечно малую величину r << L, он приобретает потенциальную энергию

$$mgh = \frac{mgr^2}{2L},$$

кроме того, при деформации пружины на r/2 ей сообщается дополнительная энергия

$$\Delta\Pi = \frac{k(r/2)^2}{2};$$

4. Полная механическая энергия системы определится как:

$$E = \left(\frac{mg}{L} + \frac{k}{4}\right)\frac{r^2}{2} + \frac{m\dot{r}^2}{2};$$

5. Сохранение энергии даёт:

$$\frac{dE}{dt} = 0; \quad \ddot{r} + \left(\frac{g}{L} + \frac{k}{4m}\right)r = 0; \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{k}{4m}};$$

6. Частота колебаний системы

$$\nu_2 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L} + \frac{k}{4m}};$$

7. Отношение частот

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{1 + \frac{kL}{4mg}};$$

---

130. Два математических маятника длиной L соединены пружиной жёсткостью k. Определить период синфазных и противофазных колебаний системы.

Решение

1. Если маятники отклонить в одну сторону на одинаковый угол, то пружина деформироваться не будет и период синфазных колебаний будет описываться традиционным для математического маятника уравнением

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}};$$

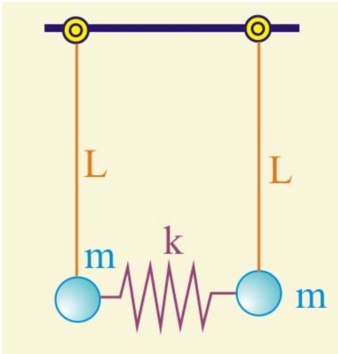


Рис. 130. Маятники соединенные пружиной

2. При отклонении маятников на одинаковые малые углы в противоположные стороны на бесконечно малую величину r пружина начнёт оказывать влияние, энергия системы запишется в виде уравнения:

$$E = \frac{k(2r)^2}{2} + 2\frac{mgr^2}{2L} + 2\frac{m\dot{r}^2}{2} = \left(2k + \frac{mg}{L}\right)r^2 + m\dot{r}^2.$$

3. Из закона сохранения энергии следует, что:

$$\frac{dE}{dt}=0; \quad \Rightarrow \ddot{r}+\frac{2k+\frac{mg}{L}}{L}r=0; \quad \Rightarrow \quad \omega=\sqrt{\frac{mg+2kL}{mL}}\ ;$$

4. Период колебаний системы

$$T_2=2\pi\sqrt{\frac{mL}{mg+2kL}}\ ;$$

---

131. Известно, что ареометр совершает колебания в воде с периодом T = 2 с. Каков будет период колебаний при опускании ареометра в бензин с плотностью ρ = 730 кг/м^3?

Решение

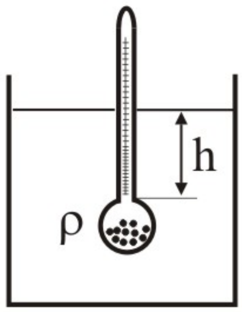


Рис. 131. Ареометр

1. Ареометр обладает положительной плавучестью, к нему приложена сила Архимеда, которая в данном случае будет выполнять роль возвращающей силы

$$F_A=\rho_L gV=\rho_L gsh\,,$$

где ρ_L – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения, V – объём погруженной части ареометра, s – средняя площадь поперечного сечения, h – глубина погружения.

2. С другой стороны силу, действующую на ареометр при его максимальном заглублении на величину h можно выразить из уравнения гармонического движения по известной схеме

$$x(t)=h\sin\frac{2\pi}{T}t,$$

$$\dot{x}(t)=h\frac{2\pi}{T}\cos\frac{2\pi}{T}t,$$

$$\dot{x}_{max}=h\frac{2\pi}{T}, \quad \ddot{x}_{max}=-\frac{4\pi^2}{T^2}h,$$

$$F=-m\ddot{x}=-m\frac{4\pi^2}{T^2}h\ .$$

3. Запишем условие равновесия ареометра в проекции на вертикальную ось

$$\rho_L gsh-m\frac{4\pi^2}{T^2}h=0, \Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho_L gs}}\ .$$

4. Образуем систему уравнений

$$\begin{cases} T_1=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{\rho_1 gs}}; \\ T_2=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{\rho_2 gs}}; \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{T_1}{T_2}=\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\ ,$$

где T_1, – период колебаний в воде с плотностью $\rho_1 = 10^3$кг/м^3, T_2 – период колебаний ареометра в керосине с плотностью ρ_2 = 730 кг/м^3.

5. Разрешим последнее уравнение относительно периода колебаний ареометра в керосине

$$T_2=T_1\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}=2\sqrt{\frac{10^3}{730}}\cong 2{,}34\,\text{с}\ .$$

---

132. На рабочий стол вибростенда, колеблющийся с частотой ν = 5 Гц, поставлен для испытания системный блок персонального компьютера. При какой амплитуде колебаний блок не будет отрываться от поверхности рабочего стола?

Решение

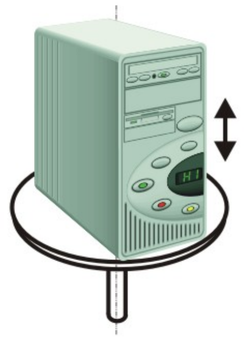


Рис. 132. Вибростенд

1. Блок будет оставаться в соприкосновении с поверхностью рабочего стола во всех случаях, когда нормальная реакция связи будет отлична от нуля. Уравнение второго закона Ньютона в проекции на вертикальную ось можно представить следующим образом

$$m\ddot{y}(t) = mg - N .$$

2. Определим максимальное значение ускорения при колебательном движении, используя уравнение гармонических колебаний

$$y(t) = A\sin\omega t; \quad \dot{y}(t) = A\omega\cos\omega t; \quad \ddot{y}(t) = -A\omega^2\sin\omega t .$$

$$\ddot{y}_{max} = -A\omega^2 .$$

3. Найдём величину циклической частоты и подставим её значение в уравнение ускорения

$$\omega = 2\pi\nu; \ \Rightarrow \ddot{y}_{max} = -4\pi^2\nu^2 A .$$

4. Отрыв системного блока от поверхности стола вибростенда произойдёт при условии $|\ddot{y}_{max}| = |g|$, другими словами

$$4\pi^2\nu^2 A = g; \quad A = \frac{g}{4\pi^2\nu^2} \cong \frac{10}{40\cdot 25} \cong 1\cdot 10^{-2}\ \text{м} .$$

---

133. Математический маятник длиной l = 1 м с массой грузика M = 0,5 кг совершает гармонические колебания, отклоняясь от положения равновесия на угол φ = 10^0. При прохождении в очередной раз положение статического равновесия грузик налетает на кусок пластилина массой m = 0,1 кг, испытывая абсолютно неупругий удар. Во сколько раз изменится потенциальная энергия грузика с налипшим на него пластилином и период колебаний маятника?

Решение

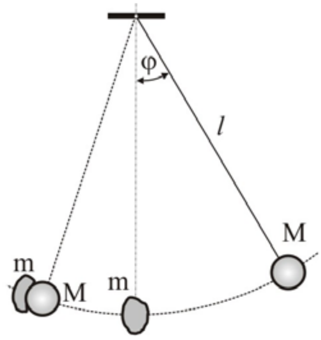


Рис. 133. Маятник с пластилином

1. Определим потенциальную энергию маятника при его движении без пластилина

$$\Pi_1 = mg\ell(1-\cos\varphi).$$

2. При прохождении маятником положения статического равновесия потенциальная энергия полностью трансформируется в кинетическую энергию, при этом скорость грузика определится как

$$Mg\ell(1-\cos\varphi) = \frac{Mv^2}{2},$$

$$v = \sqrt{2g\ell(1-\cos\varphi)} .$$

3. Для определения скорости движения грузика с налипшим на него пластилином воспользуемся законом сохранения импульса

$$Mv = (M+m)u; \quad u = \frac{Mv}{M+m} = \frac{m\sqrt{2g\ell(1-\cos\varphi)}}{M+m} .$$

4. Кинетическая энергия грузика с налипшим на него пластилином будет равна максимальному значению потенциальной энергии при максимальном отклонении

$$П_2 = K_2 = \frac{(M+m)u^2}{2} = \frac{(M+m)m^2 2g\ell(1-\cos\varphi)}{(M+m)^2}.$$

$$П_2 = \frac{2g\ell m^2(1-\cos\varphi)}{M+m}.$$

5. Определим отношение потенциальных энергий

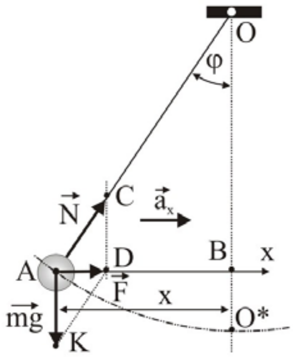
$$\frac{П_1}{П_2} = \frac{Mg\ell(1-\cos)(M+m)}{m^2 2g\ell(1-\cos\varphi)} = \frac{M(M+m)}{2m^2} \cong \frac{0{,}5\cdot 0{,}6}{0{,}5} \cong 0{,}6\,.$$

6. Период колебаний маятника ввиду их изохронности, т.е. независимости от амплитуды, меняться не будет, кроме того, масса маятника в уравнение периода не входит.

---

134. Получить уравнение циклической частоты собственных колебаний математического маятника с длиной нити подвеса l. Определить зависимость углового ускорения шарика маятника от его отклонения φ и величину возвращающей силы.

Решение



1. В качестве координаты выберем угол отклонения нити φ. При отклонении нити из положения равновесия на угол φ возникает вращающий момент, стремящийся вернуть шарик обратно. Уравнение движения грузика при этом записывается следующим образом

$$m\ell^2\ddot{\varphi} = -mg\ell\sin\varphi,$$

где $m\ell^2$ – момент инерции грузика маятника относительно оси проходящей через точку O перпендикулярно плоскости чертежа, $\ddot{\varphi}$ – угловое ускорение грузика, $mg\ell\sin\varphi$ – момент силы тяжести.

2. При малых углах отклонения нити от положения равновесия можно принять, что $\sin\varphi \approx \varphi$, в этом случае

$$\ell\ddot{\varphi} + g\varphi = 0, \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0\,.$$

3. Введём обозначение $\omega^2 = l/\varphi$, где ω – циклическая частота собственных колебаний, т.е. $\omega = \sqrt{g/\ell}$.

4. Запишем уравнение движения грузика маятника

$$\varphi = \varphi_0 \sin\omega t = \varphi_0 \sin\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\,.$$

5. Определим далее угловую скорость и угловое ускорение грузика

$$\dot{\varphi} = \varphi_0\omega\cos\omega t, \quad \ddot{\varphi} = -\varphi_0\omega^2\sin\omega t = -\omega^2\varphi\,.$$

$$\ddot{\varphi} = -\varphi\frac{g}{\ell}\,.$$

6. Из подобия треугольников Δ OAB и Δ ADK следует, что

$$\frac{x}{\ell} = \frac{F}{mg}, \Rightarrow F = \frac{mgx}{\ell} = \frac{mg\ell\sin\varphi}{\ell} = mg\sin\varphi\,.$$

---

3. Физический маятник

135. Чем отличается физический маятник от математического маятника?

Решение

1. Рассмотрим вначале математический маятник, представляющий собой точечную массу m, закреплённую на невесомом, нерастяжимом стержне длиной *l*, второй конец стержня закреплён шарнирно. При отклонении стержня от вертикали на угол φ (рис. 135.1) возникает восстанавливающая компонента силы тяжести, определяемая как:

$$F_g = -mg\sin\varphi .$$

2. При движении в сторону положения статического равновесия масса приобретает ускорение $\ell\ddot{\varphi}$, под действием силы инерции:

$$F_i = -m\ell\ddot{\varphi} .$$

3. Приравняем далее действующие на массу силы:

$$m\ell\ddot{\varphi} + mg\sin\varphi = 0 ,$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\sin\varphi = 0 .$$

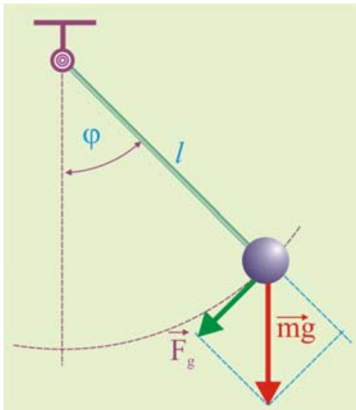


Рис. 135.1. Математический маятник

4. Введём обозначение:

$$\frac{g}{\ell} = \omega^2 ,$$

что даёт основание уравнение движения переписать следующим образом:

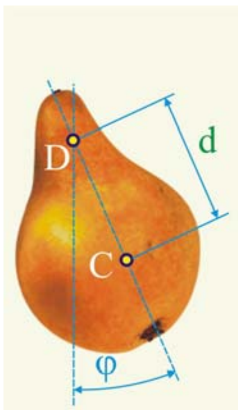
$$\ddot{\varphi} + \omega^2\sin\varphi = 0 .$$

5. Мы пришли к нелинейному дифференциальному уравнению, которое в принципе можно превратить в линейное уравнение, если рассматривать малые по амплитуде колебания. Действительно:

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \cdots \approx \varphi .$$

6. Таким образом, для малых колебаний становится справедливым линейное дифференциальное уравнение

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0 .$$



135.2. Физический маятник

7. **Физическим маятником** называется тело, способное вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. Масса физического маятника распределена в некотором объёме. Если грушу в верхней её части проткнуть спицей, так чтобы ось качания проходила перпендикулярно плоскости чертежа и пренебречь потерями на трение и сопротивление (рис.135.2), то это будет модель одного из вариантов физического маятника. Предположим, что центр масс груши располагается в точке C, которая отстоит от оси подвеса на расстоянии d. При отклоне-

нии центра масс тела из положения равновесия, например, на малый гол φ возникнет восстанавливающий момент силы тяжести:

$$M_x\left(\vec{F}_g\right) = -mgd\sin\varphi \,.$$

8. Момент сил инерции определится как

$$M_x\left(\vec{F}_i\right) = -J_x\ddot{\varphi}\,,$$

где J_x – момент инерции рассматриваемого тела относительно оси вращения. Уравнение статического баланса представится следующим образом:

$$J_x\ddot{\varphi} + mgd\sin\varphi = 0\,,$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgd}{J_x}\sin\varphi = 0\,.$$

9. Напрашивается обозначение:

$$\frac{mgd}{J_x} = \omega^2\,.$$

10. Если рассматриваются малые колебания, то уравнение с учётом значения циклической частоты собственных колебаний, дифференциальное уравнение движения физического маятника примет знакомый вид со стандартным решением:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0\,.$$

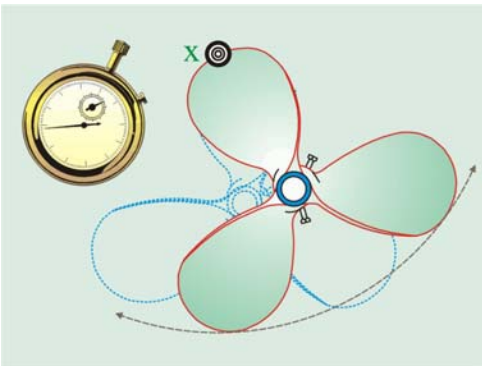


Рис. 135.3. Измерение периода колебаний

11. Модель колебаний физического маятника используется на практике для вычисления моментов инерции тел сложной геометрии, когда применение аналитических методов сопряжено со значительными математическими трудностями. Исследуемое тело, например судовой винт, (рис. 135.3) подвешиваться таким образом, чтобы он мог вращаться вокруг оси, проходящей через концевой элемент кромки одной из лопастей. Затем отклоняют винт на небольшой угол и измеряют посредствам секундомера, например, десять периодов колебаний. Из уравнения циклической частоты следует, что:

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{mgd}{J_x}\,,$$

откуда

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_x}{mgd}}; \quad J_x = \frac{mgdT^2}{4\pi^2}\,.$$

12. Таким образом, зная массу винта, положение центра масс и период малых колебаний можно вычислить момент инерции относительно оси качания, затем, используя теорему Гюйгенса – Штейнера возможно перейти к моменту инерции относительно центра масс.

---

136. Физический маятник представляет собой однородный стержень длины l = 2 м. Колебания происходят вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его верхний конец.

Решение

1. Момент инерции стержня относительно горизонтальной оси колебаний определится как

$$J_x = \frac{1}{3} m\ell^2 .$$

2. Период малых колебаний физического маятника при расстоянии от центра масс до оси колебаний $\delta = l/2$, определится посредствам уравнения

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_x}{mg\delta}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}} \cong 6{,}28\sqrt{\frac{4}{30}} \cong 2{,}3\,\text{с} .$$

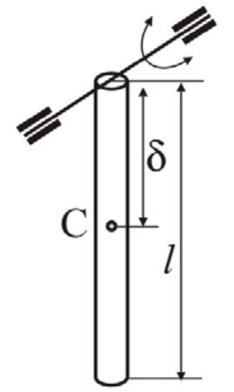


Рис. 136. Колебания стержня

---

137. Физический маятник представляет собой тонкий стержень длиной l = 2 ми массой m_0 = 1 кг, на концах которого закреплены свинцовые шарики массами $m_1 = m_2$ = 0,5 кг. Маятник совершает малые колебания вокруг оси, проходящей через середину стержня перпендикулярно его оси. Определить период колебаний.

Решение

1. Период колебаний физического маятника определяется уравнением

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_z}{Mg\ell_C}} ,$$

где J_z – момент инерции маятника относительно оси колебаний z, M – масса маятника, l_C – расстояние от центра масс маятника до оси.

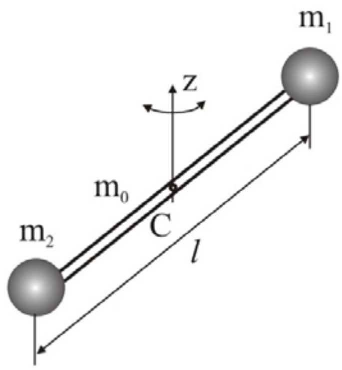


Рис. 136. Стержень и шары

2. Маятник состоит из двух точечных масс m_1 и m_2 и массы стержня m_0, поэтому его суммарный момент инерции определится как

$$J_z = J_1 + J_2 + J_3 = \frac{m_1\ell^2}{4} + \frac{m_2\ell^2}{4} + \frac{m_0\ell^2}{12} = \frac{m_1\ell^2}{2} + \frac{m_0\ell^2}{12} \cong 1{,}33\,\text{кг}\cdot\text{м}^2 .$$

3. Поскольку маятник симметричен, то ось вращения будет проходить через центр масс, т.е. $l_C = l/2$, поэтому период маятника определится следующим уравнением

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2J_z}{(m_1 + m_2 + m_0)\ell}} = 6{,}28\sqrt{\frac{2{,}66}{4}} \cong 5{,}12\,\text{с} .$$

---

137. В условиях предыдущей задачи массы шаров равны m_1 = 0,3 кг, m_2 = 0,6 кг. Определить период колебаний стержня, длина и масса которого остались неизменными.

Решение

1. В этом случае момент инерции стержня с шарами определится посредствам уравнения

$$J_z = J_1 + J_2 + J_3 = \frac{m_1\ell^2}{4} + \frac{m_2\ell^2}{4} + \frac{m_0\ell^2}{12} = 1{,}23\,\text{кг}\cdot\text{м}^2 .$$

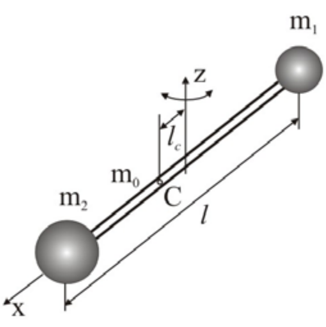


Рис. 137. Разные массы

2. Так как на концах стержня закреплены шары разной массы, то ось z, вокруг которой происходят колебания, не будет совпадать с центром масс. Определим положение центра масс маятника

$$\ell_C = X_C = \frac{\sum_{i=1}^{i=3} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{i=3} m_i},$$

$$\ell_C = \frac{m_1\left(-\frac{\ell}{2}\right) + m_2\left(\frac{\ell}{2}\right) + m_0 0}{m_1 + m_2 + m_0},$$

$$\ell_C = \frac{(m_2 - m_1)\ell}{2(m_1 + m_2 + m_0)} = \frac{0{,}3 \cdot 2}{3{,}8} \cong 0{,}158\,\text{м}.$$

3. Период колебаний маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_z}{Mg\ell_C}} = 6{,}28\sqrt{\frac{1{,}23}{1{,}9 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}158}} \cong 4{,}05\,\text{с}.$$

---

138. Однородный диск радиусом R = 30см колеблется около горизонтальной оси, проходящей через одну из образующих цилиндрической поверхности диска. Определите период колебаний этого физического маятника.

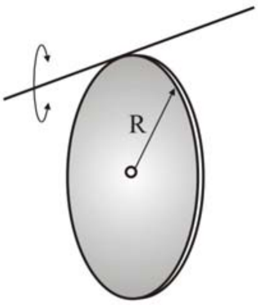


Рис. 138. Диск

Решение

1. В данном случае расстояние между осью, относительно которой происходят колебания и центром масс диска равно радиусу диска, т.е. $l_C = R$.

2. Момент инерции диска относительно оси, проходящий через образующую диска определяется как

$$J_x = \frac{3}{2} mR^2.$$

3. Период колебаний такого физического маятника будет равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_x}{mg\ell_C}} = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}} = 6{,}28\sqrt{\frac{0{,}9}{19{,}62}} \cong 1{,}345\,\text{с}.$$

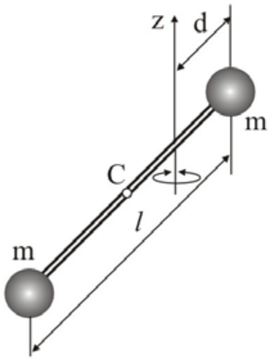


Рис. 139. Асимметрия

139. На концах невесомого тонкого стержня длиной l = 1 м укреплены одинаковые грузы. Стержень совместно с грузами колеблется вокруг вертикальной оси, проходящей через точку, удалённую на расстояние d = 0,25 м от одного из грузов. Определить период колебаний маятника и его приведённую длину.

Решение

1. Определим расстояние между центром масс и осью z, вокруг которой происходят колебания

$$\ell_C = \frac{\ell}{2} - d = \frac{\ell}{4} = 0{,}25\,\text{м}.$$

2. Определим момент инерции маятника

$$J_z = m(\ell - d)^2 + md^2 = m\left[\ell^2 - 2d(\ell + d)\right].$$

3. Период колебаний данного физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_z}{mg\ell_C}} = 2\pi\sqrt{\frac{m\left[\ell^2 - 2d(\ell + d)\right]}{mg\ell_C}} \cong 2{,}45\,\text{с}.$$

4. Приведённая длина маятника определится как

$$L = \frac{J_z}{m\delta} = \frac{4m\left[\ell^2 - 2d(\ell + d)\right]}{m\ell} = 1{,}5\,\text{м}.$$

---

140. На концах невесомого тонкого стержня длиной l = 0,3 м укреплены одинаковые точечные грузы. Стержень совместно с грузами колеблется вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку, удалённую на расстояние d = 0,1 м от одного из концов стержня. Определить период колебаний маятника и его приведённую длину.

Решение

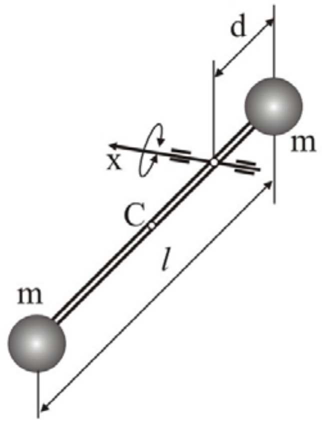


Рис. 140. Горизонтальные колебания

1. В отличие от предыдущей задачи, где колебания происходили в плоскости перпендикулярной вектору силы тяжести, т.е. при движении системы потенциальная энергия не изменялась, в данном случае изменение относительного положения грузов будет сопровождаться изменением потенциальной энергии системы. Момент инерции, при этом, определится как

$$J_z = m(\ell - d)^2 - md^2 = m\left[\ell^2 - 2d(\ell - d)\right].$$

2. Период колебаний такого физического маятника, при учёте того, что $l_C = l/4$, будет определяться уравнением (4) предыдущей задачи

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_z}{mg\ell_C}} = 2\pi\sqrt{\frac{m\left[\ell^2 - 2d(\ell - d)\right]}{mg\ell_C}} \cong 1{,}42\,\text{с}.$$

3. Приведённая длина маятника

$$L = \frac{J_z}{m\delta} = \frac{4m\left[\ell^2 - 2d(\ell + d)\right]}{m(\ell - 2d)} = 0{,}5\,\text{м}.$$

---

141. На невесомом стержне длиной l = 0,3 м закреплены два одинаковых шарика: один в середине стержня, а второй – на одном из его концов. Система тел колеблется около горизонтальной оси, проходящей через свободный конец стержня. Определить период колебаний и приведённую длину этого физического маятника.

Решение

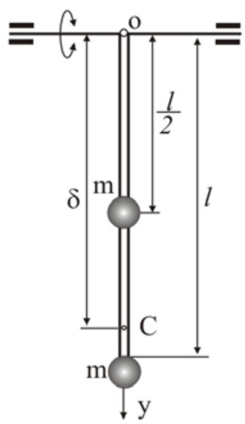


Рис. 141. Два шара на стержне

1. Определим положение центра масс данной механической системы

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{i=2} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{i=3} m_i} = \frac{m\left(\frac{\ell}{2}\right) + m\ell}{2m} = \frac{3}{4}\ell.$$

2. Найдём далее момент инерции маятника относительно горизонтальной оси вращения

$$J_x = \frac{m\ell^2}{4} + m\ell^2 = \frac{5}{4}m\ell^2 .$$

3. Приведённая длина физического маятника, с учётом того, что расстояние между центром масс маятника и осью, вокруг которой происходят колебания δ = 3*l*/4

$$L = \frac{J_x}{2m\delta} = \frac{\frac{5}{4}m\ell^2}{2m\frac{3}{4}\ell} = \frac{5}{6}\ell = 0{,}25\,\text{м} .$$

4. Период колебаний маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 6{,}28\sqrt{\frac{0{,}25}{9{,}81}} \cong 1\,\text{с} .$$

---

142. Физический маятник представляет собой систему трёх точечных грузов, соединённых невесомыми стержнями одинаковой длины l = 0,3 м колеблется вокруг горизонтальной оси, проходящей перпендикулярно плоскости чертежа через общую точку O стержневой системы. Определить период колебаний маятника.

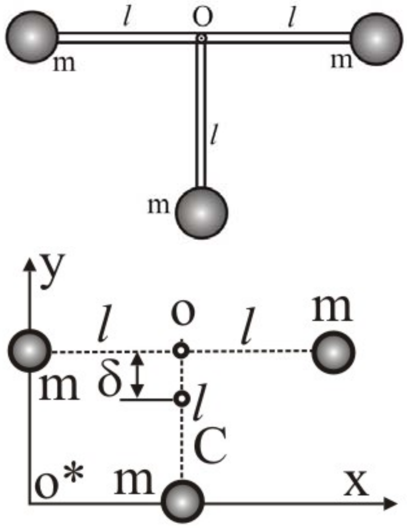


Рис. 142. Три точечные массы

Решение

1. Определим положение центра масс относительно оси колебаний, проходящих через точку O

$$x_C = \frac{m\ell + 2m\ell}{3m} = \ell ,$$

$$y_c = \frac{m\ell + m\ell}{3m} = \frac{2}{3}\ell .$$

2. Расстояние между центром масс и осью колебаний составит

$$\delta = \ell - y_c = \ell/3 .$$

3. Момент инерции анализируемой колебательной системы относительно оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости чертежа

$$J_z = m\ell^2 + m\ell^2 + m\ell^2 = 3m\ell^2 .$$

4. Период колебаний маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_z}{3mg\delta}} = 2\pi\sqrt{\frac{3m\ell^2 3}{3mg\ell}} = \sqrt{\frac{3\ell}{g}} \cong 1{,}9\,\text{с} .$$

---

143. Тонкий обруч радиусом R = 0,3 м колеблется вокруг вбитого горизонтально в стену гвоздя, так что плоскость колебания параллельна стене. Определить период колебаний такого физического маятника.

Решение

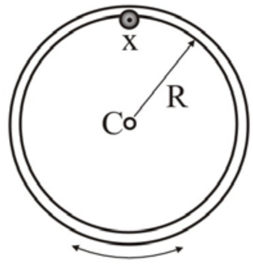


Рис. 143 Колебания обруча

1. В данном случае центр масс обруча не совпадает с осью колебаний, для определения момента инерции относительно оси колебаний x, перпендикулярной плоскости чертежа необходимо воспользоваться теоремой Гюйгенса – Штейнера

$$J_x = mR^2 + ma^2 = 2mR^2.$$

2. Период колебаний обруча

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_x}{mg\delta}} = 2\pi\sqrt{\frac{2mR^2}{mgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}} = 6{,}28\sqrt{\frac{0{,}6}{9{,}81}} \cong 1{,}55\,\text{с}.$$

---

144. Однородный диск радиусом R = 0,3 м колеблется около горизонтальной оси, проходящей через одну из образующих цилиндрической поверхности диска. Определить период колебаний.

Решение

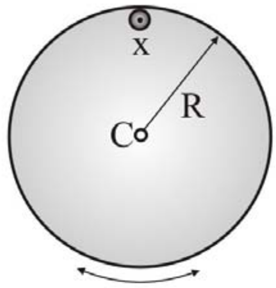


Рис. 144. Колебания сплошного диска

1. Так же как и в предыдущей задаче, центр масс диска не совпадает с положением оси x, относительно которой колеблется физический маятник. Для определения момента инерции диска относительно оси x воспользуемся теоремой Гюйгенса – Штейнера

$$J_x = J_C + mR^2 = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2.$$

2. Период колебаний маятника с учётом того, что δ = R, определится посредствам следующего уравнения

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_x}{mg\delta}} = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}} = 6{,}28\sqrt{\frac{0{,}9}{2\cdot 9{,}81}} \cong 1{,}345\,\text{с}.$$

---

145. Диск радиусом R = 0,24 м колеблется вокруг горизонтальной оси, проходящей через середину одного из радиусов перпендикулярно плоскости диска. Определить приведённую длину и период колебаний маятника.

Решение

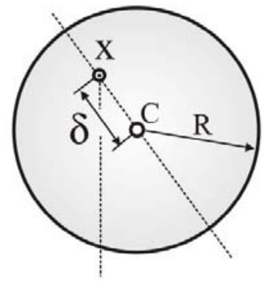


Рис. 145. Дисковый маятник

1. По методике, использованной в предыдущих задачах, определим момент инерции диска относительно горизонтальной оси x, которая разнесена с осью колебаний на расстояние δ = R

$$J_x = J_C + m\frac{R^2}{2} = \frac{mR^2}{2} + m\frac{R^2}{4} = \frac{3}{4}mR^2.$$

2. Приведённая длина физического маятника

$$L = \frac{J_x}{m\delta} = \frac{3\cdot 2mR^2}{4mR} = \frac{3}{2}R = 0{,}36\,\text{м}.$$

3. Период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 1{,}2\,\text{с}.$$

---

146. Математический маятник длиной l_1 = 0,4 м и физический маятник в виде тонкого прямоугольного стержня длиной l_2 = 0,6 м синхронно колеблются около одной горизонтальной оси. Определить расстояние δ между центром масс стержня и осью его колебаний.

Решение

1. Поскольку колебания математического и физического маятников синхронные, то периоды будут одинаковыми

$$T_1 = T_2; \quad 2\pi\sqrt{\frac{\ell_1}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_2^2}{3g\delta}}; \Rightarrow \delta = \frac{\ell_2^2}{3\ell_1} = \frac{0,36}{3\cdot 0,4} = 0,3\,\text{м}.$$

---

147. Физический маятник представляет собой однородный диск радиусом r = 0,4 м, горизонтальная ось колебаний которого проходит на расстоянии δ = r/4 от центра масс диска. Определить период малых колебаний диска.

Решение

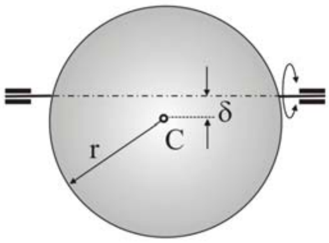


Рис. 147. Горизонтальные колебания диска

1. Момент инерции диска относительно оси, проходящей центр масс, определяется уравнением

$$J_{Cx} = \frac{mr^2}{4}.$$

2. Момент инерции относительно параллельной оси, отстоящей на расстоянии δ, определим с помощью теоремы Гюйгенса – Штейнера

$$J_x = J_{Cx} + m\left(\frac{r}{4}\right)^2 = \frac{mr^2}{4} + \frac{mr^2}{16} = \frac{5}{16}mr^2.$$

3. Период малых колебаний этого физического маятника запишется следующим образом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_x}{mg\delta}} = 2\pi\sqrt{\frac{5mr^2 4}{16mgr}} = 2\pi\sqrt{\frac{5r}{4g}} \cong 6,28\sqrt{\frac{5\cdot 0,4}{40}} \cong 1,4\,\text{c}.$$

---

148. Определить частоту малых колебаний тонкого однородного стержня массой m = 1 кг длиной l = 1 м вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O, если противоположный конец стержня присоединён к пружине жёсткости k = 100 Н/м. В статическом положении стержень вертикален и пружина не деформирована.

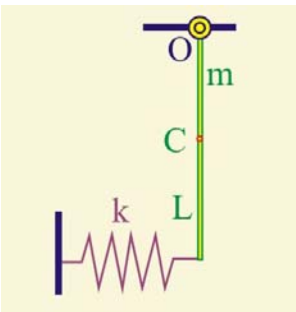


Рис. 148. Стержень с пружиной

Решение

1. Момент инерции стержня относительно оси колебаний

$$J_x = \frac{1}{3}m\ell^2.$$

2. Рассматриваемая конструкция физического маятника в соответствие с уравнением имеет следующее значение приведённой массы

$$\mu = \frac{m}{3}.$$

3. Циклическая частота колебаний стержня при условии равенства расстояния от оси колебаний до центра масс $\delta = l/2$ определится уравнением

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{J_x}{\mu g\delta}}} = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}}.$$

4. Циклическая частота собственных колебаний стержня, один конец которого присоединён к пружине жёсткостью k

$$\omega_0 = \omega_1 + \sqrt{\frac{3k}{m}} = \sqrt{\frac{3g}{2\ell} + \frac{3k}{m}} = \sqrt{\frac{30}{2} + 300} = 17{,}75\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

5. Период собственных малых колебаний физического маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}35\,\text{с}.$$

---

149. Однородный стержень массой m = 1 кг совершает колебания вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O, свободный конец стержня соединён с вертикальной пружиной жёсткости k = 10 Н/м. Определить период малых колебаний физического маятника.

Решение

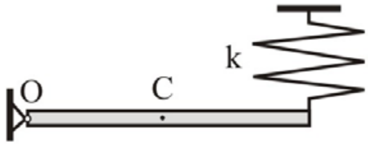


Рис. 149. Горизонтальный подпружиненный стержень

1. Физический маятник в данном случае можно рассматривать как часть массы стержня подвешенной к вертикальной пружине. Присоединённую к пружине массу определим их уравнения момента инерции стержня относительно горизонтальной оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости чертежа

$$J_x = \frac{m\ell^2}{3}.$$

2. Период колебаний в этом случае запишется как

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} = 6{,}28\sqrt{\frac{1}{20}} \cong 1{,}4\,\text{с}.$$

---

150. Найти циклическую частоту собственных малых свободных горизонтальных колебаний однородного диска массой m = 0,33 кг, соединённого с пружиной жёсткостью k = 50 Н/м. Качение диска по горизонтальной плоскости происходит без проскальзывания.

Решение

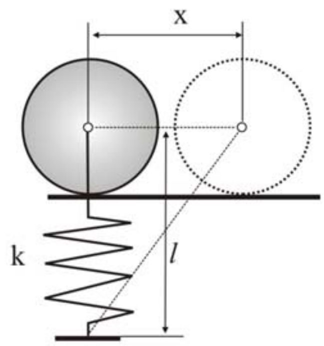


Рис. 150. Подпружиненный сплошной диск

1. Если в качестве обобщённой координаты принять горизонтальное перемещение диска x, то уравнение его кинетической энергии можно представить в виде суммы энергии поступательного движения и энергии вращения

$$K = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{1}{2}J_z\omega^2 = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{J_z\dot{x}^2}{2R^2}.$$

2. Момент инерции диска относительно оси z, перпендикулярной плоскости чертежа и проходящей через точку крепления пружины к диску

$$J_z = \frac{mR^2}{2}.$$

3. Определим энергию диска

$$K = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{mx^2}{4} = \frac{3}{4}m\dot{x}^2,$$

приведённая масса, при этом, равна $\mu = 3m/2$.

4. Определим частоту собственных колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{\frac{2k}{3m}} = \sqrt{\frac{100}{0{,}333 \cdot 3}} \cong 10\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

---

151. Определить собственную частоту колебаний системы, состоящей из упруго закреплённой горизонтальной рейки А, которая лежит на подпружиненном цилиндре В и катке С. Массы рейки m_1 = 1 кг и цилиндра m_2 = 0,5 кг, жёсткости пружин: k_1 = 20 Н/м, k_2 = 10 Н/м, радиус качения цилиндра составляет r = 0,2 м. Расстояние от точки крепления вертикальной пружины до оси цилиндра l = 0,22 м.

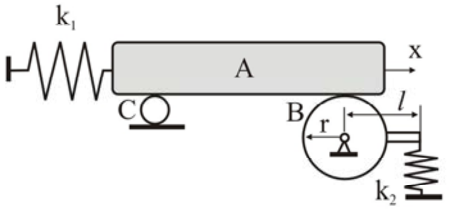


Рис. 151. Колебательная система

Решение

1. Рассматриваемая в задаче колебательная система имеет одну степень свободы, поэтому положение любой движущейся точки, принадлежащей системе, можно однозначно охарактеризовать одной обобщённой координатой, в качестве которой целесообразно взять линейное перемещение рейки с началом системы отсчёта в положении статического равновесия.

2. При перемещении рейки на расстояние x каток поворачивается на угол $\varphi = x/r$.

3. Запишем уравнение кинетической энергии колебательной системы

$$K = \frac{m_1\dot{x}^2}{2} + \frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}^2.$$

4. Подставим в уравнение кинетической энергии значение момента инерции цилиндра и его угловой скорости

$$J_2 = \frac{m_2 r^2}{2}; \quad \dot{\varphi} = \frac{\dot{x}}{r}.$$

$$K = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m_2\dot{x}^2}{4} = \frac{1}{2}\left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right)\dot{x}^2.$$

5. Из последнего уравнения определим приведённую массу (инерционный коэффициент)

$$\mu = m_1 + \frac{1}{2}m_2.$$

6. Коэффициент упругости системы определим путём анализа уравнения потенциальной энергии системы

$$U = \frac{k_1x^2}{2} + \frac{k_2(\ell x/r)^2}{2} = \frac{1}{2}\left(k_1 + \frac{\ell^2}{r^2}\right)x^2.$$

7. Коэффициент упругости системы, таким образом, равен

$$k_0 = k_1 + \frac{\ell^2}{r^2}k_2.$$

8. Циклическая частота собственных колебаний системы

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{\mu}} = \sqrt{\frac{k_1 + \frac{\ell^2}{r^2}k_2}{m_1 + \frac{1}{2}m_2}}.$$

9. Собственная частота колебаний

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + \frac{\ell^2}{r^2}k_2}{m_1 + \frac{1}{2}m_2}} = \frac{1}{6,28}\sqrt{\frac{20 + \frac{4,8\cdot 10^{-2}}{4\cdot 10^{-2}}10}{1+0,25}} \cong 4\,\text{Гц}.$$

---

152. Найти циклическую частоту собственных колебаний механической системы, состоящей из балки длиной 2l с грузом на конце массой m = 1 кг. Второй конец балки закреплён шарнирно, в своей средней части балка опирается на пружину с коэффициентом жёсткости k =36 Н/м.

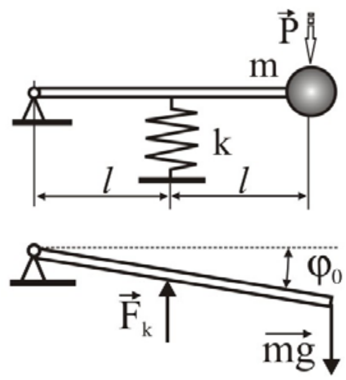


Рис. 152. Балка с грузом

Решение

1. В положении равновесия пружина под действием веса груза деформируется на величину $l\varphi_0$, т.е. на середину балки действует сила упругости

$$F_{k(0)} = k\ell\varphi_0.$$

2. Уравнение моментов относительно центра шарнирной опоры позволяет определить величину φ_0

$$mg\cdot 2\ell - k\ell\varphi_0\cdot\ell = 0; \Rightarrow \varphi_0 = \frac{2mg}{k\ell}.$$

3. Предположим далее, что после сообщения грузу импульса угол отклонения балки составит $\varphi + \varphi_0$, что обеспечит действие со стороны пружины силы

$$F_k = k\ell(\varphi_0 + \varphi).$$

4. Уравнение вращательного движения балки относительно шарнира будет иметь следующий вид

$$mg\ell - \frac{k\ell(\varphi+\varphi_0)\ell}{2} = m2\ell^2\frac{d^2}{dt^2}(\varphi_0+\varphi),$$

$$2mg\ell - k\ell^2(\varphi_0+\varphi) = 4m\ell^2\frac{d^2}{dt^2}(\varphi_0+\varphi),$$

$$2mg\ell - k\ell^2(\varphi_0+\varphi) = J_x\omega^2.$$

5. Приведённая масса системы, таким образом, определяется как; $\mu = 4m$.

6. Циклическая частота собственных колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{4m}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = 3\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

---

153. Модель крыла самолёта или рулей глубины подводной лодки или торпеды можно представить в виде жёсткой пластинки с шарнирным закреплением одного конца и подпружиненным вторым концом. Пластинка обтекается потоком газа или жидкости со скоростью v, направленной вдоль пластины. Определить критическое значение скорости, соответствующее потере устойчивости пластинкой, т.е. возникновению колебаний.

Решение

1. При отклонении пластинки от горизонтального положения статического равновесия, когда на неё действует сила тяжести и реакции опор, возникают силы, обусловленные гидродинамическими давлениями. Главный вектор этих сил, приложенных в сечении пластинки, отстоящем на расстоянии b от упругой опоры

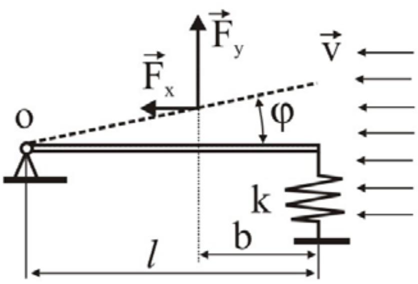


Рис. 153. Возникновение колебаний

$$\begin{cases} F_X = c_X \dfrac{\rho v^2}{2} \ell\varphi; \\ F_Y = c_Y \dfrac{\rho v^2}{2} \ell\varphi, \end{cases}$$

где C_X, C_Y – постоянные коэффициенты, ρ – плотность жидкости или газа, φ – угол отклонения пластинки, l – длина пластинки.

2. Момент сил относительно шарнирного закрепления

$$M_0(\vec{F}) = -k\ell^2\varphi + F_X b\varphi + F_Y b\,,$$

$$M_0(\vec{F}) = -k\ell^2\varphi + c_X \frac{\rho v^2}{2} b\ell\varphi^2 + c_Y \frac{\rho v^2}{2} b\ell\varphi\,.$$

3. Дифференциальное уравнение движения

$$J_0\ddot{\varphi} + \left(k\ell - c_Y \frac{\rho v^2}{2} b\right)\ell\varphi = 0\,.$$

4. Условие устойчивости

$$k\ell - c_Y \frac{\rho v^2}{2} b > 0; \Rightarrow v_{cr} = \sqrt{\frac{2k}{c_Y \rho b}}\,.$$

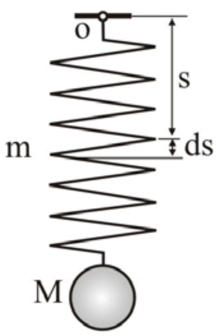


Рис. 154. Энергия системы

154. Вычислить кинетическую энергию механической системы, состоящей из пружины массой m и прикрепленного к ней груза массой M, совершающего малые гармонические свободные колебания. Смещение точек пружины пропорционально их расстоянию до подвеса O.

Решение

1. Кинетическая энергия колебательной системы будет складываться из энергии возвратно-поступательного движения груза и кинетической энергии движущейся пружины

$$K = K_M + K_m\,,$$

где K_M – кинетическая энергия тела массой M, K_m – кинетическая энергия пружины.

2. Если выбрать вертикальную ось оy, направленную вниз, то кинетическую энергию тела можно представить в традиционном виде

$$K_M = \frac{M\dot{y}^2}{2}.$$

3. Энергию пружины будем рассматривать, задавшись её длиной в статическом состоянии *l* и линейной плотностью ρ (кг/м). Выделим на длине пружины элемент её длины ds, который будет иметь смещения ξ одинаковые по всей длине пружины и совпадающие со смещениями груза. Это даёт основание записать следующее соотношение

$$\frac{\xi}{y} = \frac{s}{\ell}; \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{s}{\ell} y; \quad \dot{\xi} = \frac{s}{\ell}\dot{y}.$$

4. Кинетическая энергия элемента пружины длины dy определится следующим образом

$$dK_m = \frac{dm\dot{\xi}^2}{2}; \quad dm = \rho ds.$$

$$dK_m = \frac{1}{2}\frac{\rho\dot{y}^2}{\ell^2}s^2 ds.$$

5. Энергию всей пружины определится посредствам определённого интеграла взятого в пределах от 0 до *l*:

$$K_m = \int_0^\ell \frac{\rho\dot{y}^2}{2\ell^2}s^2 ds = \frac{1}{2}\frac{\rho\dot{y}^2}{\ell^2}\int_0^\ell s^2 ds = \frac{1}{6}\frac{\rho\dot{y}s^3}{\ell^2}\Bigg|_0^\ell; \quad K_m = \frac{1}{6}\frac{\rho\ell\cdot\ell^2\dot{y}^2}{\ell^2} = \frac{1}{6}m\dot{y}^2.$$

6. Реализуем уравнение энергии, используя значения полученных энергий груза и пружины

$$K = \frac{M\dot{y}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{6} = \frac{1}{2}\left(M + \frac{1}{2}m\right)\dot{y}^2,$$

величина, стоящая в скобках $\mu = M + 0{,}5m$ называется приведённой массой колебательной системы.

7. Таким образом, полученное уравнение энергии при заданном законе движения груза $y(t) = y_{max}\sin(\omega t + \varphi_0)$ позволяет определить величину кинетической энергии колебательной системы в любой момент времени, включая и амплитудные значения, которые будут иметь место при $\sin(\omega t+\varphi_0) = 1$.

4. Затухающие колебания

155. Почему собственные колебания не могут продолжаться длительное время?

Решение

1. Рассмотренные выше колебательные системы (осцилляторы) во многом идеализированы, потому что условия, при которых они рассматривались в большей или меньшей степени отличались от реальных условий. Учёт всех практических обстоятельств функционирования колебательных систем существенно усложняет математические представления процессов, в этой связи, при рассмотрении сложных колебательных систем принято упрощать задачи, пренебрегая свойствами системы не представляющиеся главенствующими в данной задаче. Для реальной колебательной системы составляется физическая модель в виде рационально выбранной приближённой схемы, позволяющей решать данную задачу с требуемой степенью точности.

2. Одним из первых при анализе колебательных задач, решается вопрос о выборе необходимого числа степеней свободы, т.е. определение количества независимых переменных посредствам которых возможно достоверно описать колебания рассматриваемой системы. По большому счёту любая из рассмотренных ранее колебательных систем имеют бесконечное число степеней свободы. Действительно, колеблющиеся массы, по реальной сути: во-первых, не являются материальными точками, они занимают некий объём, т. е. состоят из более элементарных образований; во-вторых, при движении массы могут деформироваться, так же как и прочие элементы колебательной системы.

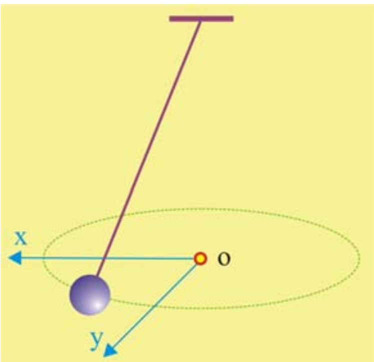


Рис. 155.1. Конический маятник

3.Так, например, конический маятник в общем случае (рис. 155.1) имеет две степени свободы, однако, при определённом выборе направления начальной скорости его качания будут протекать в одной плоскости и в этом систему можно характеризовать только одной степенью свободы, углом отклонения нити от положения статического равновесия.

4. Следующим важным обстоятельством моделирования колебательных систем является выбор закона изменения возвращающей силы, которая является необходимым атрибутом любой механической колебательной системы. Для колебательных систем с разного рода упругими элементами в виде пружин, восстанавливающая сила является функцией отклонения массы от положения равновесия, т.е. $F_B = f(x)$, что усложняет составление и дифференцирование уравнений движения. Достаточно часто функцию зависимости восстанавливающей силы от координаты можно разлагать в степенной ряд (рис. 155.2)

$$F_B(x) = \left(\frac{dF_B}{dx}\right)_{x=0} x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2F_B}{dx^2}\right)_{x=0} x^2 + \cdots$$

$$F_В(x)=\left(\frac{dF_В}{dx}\right)_{x=0}x+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2F_В}{dx^2}\right)_{x=0}x^2+\cdots,$$

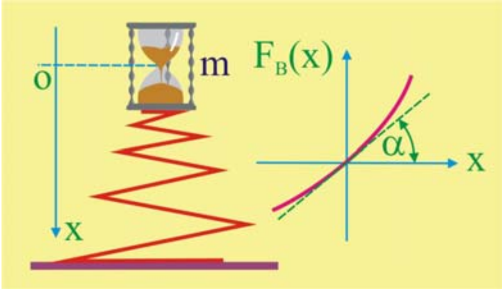


Рис. 155.2. Линеаризация восстанавливающей силы

где величина

$$tg\alpha=\left(\frac{dF_В}{dx}\right)_{x=0}=k,$$

называется коэффициентом упругости. Как видно из приведенного графика, восстанавливающую силу упругости конической пружины можно аппроксимировать первым членом разложения kx, в этом случае восстанавливающая сила рассматривается как линейная. При рассмотрении математического маятника восстанавливающая сила, которая представляется касательной проекцией силы тяжести, тоже зависит от угла отклонения

$$mg\ell\sin\varphi=mg\ell\left(\varphi-\frac{1}{6}\varphi^3+\cdots\right)\approx mg\ell\varphi.$$

5. Очевидно, что рассмотренные аппроксимации возможны только при малых колебаниях, при увеличении амплитуды колебаний необходимо возвращаться к более точным аналитическим зависимостям.

6. Рассмотренные ранее колебательные системы, с позиций закона сохранения энергии представляют собой PERPETUUM MOBILE, т.е. вечные двигатели первого рода, т.к. их движение протекало без всяких потерь на трение и разного рода сопротивления. Начавшись единожды, они могли протекать бесконечно длительное время, чего, естественно, быть не может. Предположение о консервативности систем может быть допущено только при малых величинах потерь, когда рассеянием (диссипацией) энергии можно пренебречь. Когда же силы сопротивления игнорировать не представляется возможным, то необходимо располагать уравнениями, характеризующими этот род сил.

7. На практике достаточное распространение имеют силы сопротивления, не имеющие простого математического выражения. Эти силы, в большинстве своём, определяются экспериментально и в математической интерпретации имеют сложные описания. Однако, в ряде случаев зависимости представляется возможным упростить, например в случае действия силы сухого трения сила принимается постоянной, не зависящей от смещения и скорости

$$\left|\vec{F}_r\right|=const.$$

8. Одними из простых зависимостей является прямая пропорциональность силы сопротивления смещению или скорости движения в первой степени

$$F_r=-rx,$$

$$F_r=-rv=r\dot{x},$$

где r – коэффициент сопротивления. Знак минус показывает, что сила сопротивления всегда направлена в сторону, противоположную вектору скорости. Действие Сил сопротивления, пропорциональных скорости в первой степени называется в теории колебаний демпфированием.

9. Рассмотрим массу m, совершающую малые вертикальные колебания на спиральной пружине постоянной жестоки k (рис. 2.3). В этом случае возможно ввести следующие рациональные допущения и условия:

а) Движения массы происходит только в одном направлении, например, вдоль оси x;

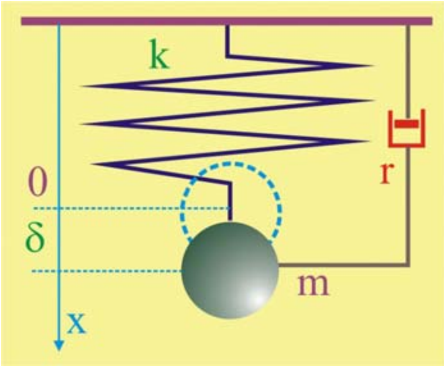


Рис. 155.3. Масса на пружине

б). Длина пружины такова, что при сосредоточенной массе и малой скорости деформации, в ней не возникает практически мгновенная реакция, без уплотнений и разрежений вдоль длины;

в). Опора и закрепления пружины не деформируемы;

г). В пределах максимальных смещений массы восстанавливающая сила пропорциональна деформации упругого элемента;

д). Сила сопротивления, проявляющаяся в системе, пропорциональна скорости в первой степени

ж). Начало системы отсчёта совмещено с положением статического равновесия массы, когда в состоянии покоя к массе приложены сила тяжести mg и упругая сила, соответствующая статическому удлинению пружины δ.

10. Для равновесного состояния справедливо, таким образом, уравнение

$$k\delta = mg\,.$$

11. При сделанных допущениях уравнение второго закона Ньютона запишется следующим образом

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt}\,,$$

или

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{r}{m}\dot{x}\,.$$

12. Введём следующие обозначения:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},\quad \beta = \frac{r}{2m}\,,$$

с учетом, которых уравнение движения примет вид:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0\,.$$

13. Величина ω_0 представляет собой циклическую частоту собственных колебаний системы в отсутствии сопротивления, β – коэффициент затухания.

Последнее уравнение является однородным линейным и дифференциальным второго порядка, решение которого имеет вид

$$x = e^{-\beta t}\left(C_1 e^{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t} + C_2^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t}\right),$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования. В зависимости от соотношения величин ω_0 и β возможны несколько характерных случаев записи решения дифференциального уравнения:

14. Слабое затухание – $\beta < \omega_0$.

Решение уравнения $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ принимает вид:

$$x = e^{-\beta t}(a\cos\omega t + b\sin\omega t),$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\,,$$

циклическая частота затухающих колебаний, a и b постоянные величины, определяемые из начальных условий

$$\begin{cases} a = x(0); \\ b = \dfrac{\dot{x}(0) + \beta x(0)}{\omega}. \end{cases}$$

В частности ели предположить отсутствие затухания $\beta = 0$, то решение уравнения $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ переписывается в виде:

$$x = a\cos\omega_0 t + b\sin\omega t,$$

или

$$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где

$$a = x(0); \quad b\frac{\dot{x}(0)}{\omega_0}; \quad A = \sqrt{x(0)^2 + \frac{\dot{x}(0)^2}{\omega_0^2}}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega_0 x(0)}{\dot{x}(0)},$$

что полностью совпадает ранее полученными решениями для подобной колебательной системы.

Запишем уравнение колебаний в более рациональной форме

$$x = Ae^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi),$$

где постоянные A и φ определяются из начальных условий

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{\omega}\sqrt{\omega^2 x(0)^2 + \{\dot{x}(0 + \beta x(0))\}}; \\ \varphi &= \operatorname{arctg}\frac{\omega x(0)}{\dot{x}(0) + \beta x(0)}. \end{aligned}\right\}$$

Колебательные процессы, описываемые полученными уравнениями, называются экспоненциально затухающими колебаниями. На рис. 155.4. показан график экспоненциально затухающих колебаний.

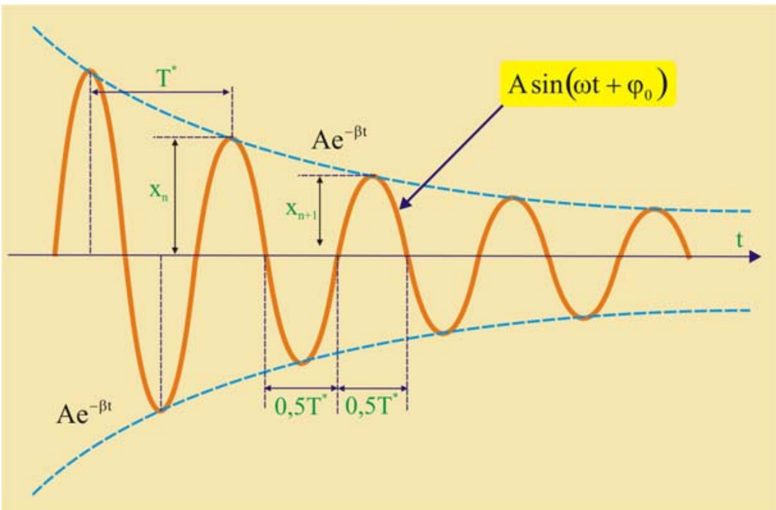


Рис. 155.4. Затухающие колебания

Приведенный график зависимости смещения массы от времени уже нельзя считать гармоническим и периодическим, так как полная повторяемость отсутствует, хотя через каждый промежуток времени $T^*/2 = \pi/\omega$ величина смещения x обращается в ноль. Строго говоря, термин «амплитуда» к затухающим колебаниям не применим, так как перед синусом в уравнении колебаний стоит, убывающая со временем величина $Ae^{-\beta t}$. В этой связи используя для затухающих колебаний термины «амплитуда» и «период» нужно давать себе, отчёт в том, что имеется в виду условный период и смещение для некоторого условного полупериода. Период затухающих колебаний несколько больше периода собственных колебаний:

$$T^* = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = T\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2 + \cdots\right\}.$$

Из уравнения видно, что период затухающих колебаний больше периода собственных незатухающих колебаний данной системы на величину:

$$\Delta T = \left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)^2.$$

При $\omega_0 >> \beta$ увеличение периода колебаний практического значения не имеет.

Рассмотрим далее энергетические параметры затухающих колебаний.

15. **Кинетическая энергия** колеблющейся массы, определяется уравнением:

$$K = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{m\omega_0^2 A^2}{4}\left[1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)\right],$$

из которого видно, что кинетическая энергия изменяется от нуля до максимального значения

$$K_{max} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2},$$

причём, это изменения происходит с двойной циклической частотой $2\omega_0$ собственных колебаний.

16. Потенциальная энергия деформированной пружины так же будет являться функцией времени:

$$\Pi = \int_0^x kxdx = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{kA^2}{4}\left[1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)\right].$$

Для произвольного момента времени суммарное значение механической энергии системы определится в виде следующей суммы

$$E = K + \Pi = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} = \frac{kA^2}{2},$$

которая равна либо максимальному значению кинетической энергии, либо максимальному значению потенциальной энергии. Это указывает на консервативность колебательной системы.

17. Интенсивность затухания можно определить, записав уравнение колебаний для двух соседних максимальных значений смещения (рис. 155.4)

$$\beta = \frac{\omega}{2\pi}\ln\frac{x_n}{x_{n+1}}.$$

18. Натуральный логарифм, входящий в уравнение называется **логарифмическим декрементом**

$$\lambda = \ln\frac{x_n}{x_{n+1}}.$$

19. Величина логарифмического декремента остаётся постоянной при любом выборе двух соседних максимальных смещений, поэтому λ характеризует рассматриваемый колебательный процесс в целом. Логарифмический декремент можно выразить через величину периода затухающих колебаний, используя уравнение β, действительно:

$$\beta = \frac{1}{T^*}\ln\frac{x_n}{x_{n+1}}; \quad \Rightarrow \quad \lambda = \beta T^*.$$

20 Логарифмический декремент можно определить в более рациональном виде:

$$\lambda = \ln\frac{x(t)}{x(t+T^*)} = \beta T^* = \frac{1}{N},$$

где N – число колебаний, в течение которых амплитуда уменьшится ровно в e – раз ($e \cong 2{,}72$ – основание натурального логарифма).

21. Рассмотрим затухающие электромагнитные колебания в контуре, обладающим омическим сопротивлением R (рис. 155.5). Всякий реальный контур обладает собственным активным сопротивлением, даже если это только сопротивление катушки индуктивности. Изменение заряда конденсатора будет носить периодический характер. Уравнение гармонических колебаний в электрическом контуре при учёте сопротивления перепишется следующим образом:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0;$$

где введены следующие обозначения:

$$\beta = \frac{R}{2L}; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

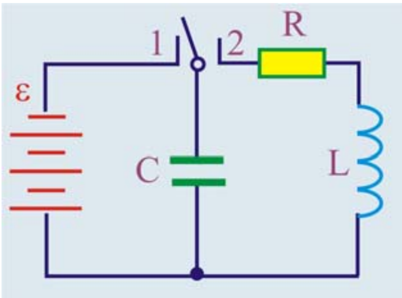


Рис. 155.5. Реальный контур

22. Изменение заряда конденсатора во времени будет описываться уравнением аналогичным по структуре уравнению, записанному для механической колебательной системы с затуханием:

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{R}{2L}t}\sin(\omega t + \varphi_0);$$

23. В природе и технике существуют колебательные системы с самой различной степенью затухания, причём в одних случаях затухание специально уменьшается, а в других, наоборот – затухание стараются увеличить до возможного предела.

24. Для количественной оценки скорости убывания амплитуды затухающих колебаний пользуются понятиями логарифмического декремента и добротностью.

25. **Добротностью колебательной системы** называется безразмерная величина Θ, равная произведению 2π на отношение энергии W(t) системы в произвольный промежуток времени t к убыли этой энергии от t до t + T, т.е. убыли энергии затухающих колебаний за один условный период

$$\Theta = 2\pi\frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)}.$$

26. Так как энергия пропорциональна квадрату амплитуды колебаний, то

$$\Theta = 2\pi\frac{A^2(t)}{A^2(t) - A^2(t+T)};$$

Поделим числитель и знаменатель на A^2 (t)

$$\Theta = \frac{2\pi}{1 - \frac{A^2(t+T)}{A^2(t)}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta}};$$

27. При малых значениях логарифмического декремента $\delta << 1$

$$1 - e^{-2\delta} \approx 2\delta;$$

28. В этом случае

$$\Theta = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\pi}{\beta T_0} = \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1}} = \frac{\omega_0}{2\beta};$$

29. Добротность электрического колебательного контура определится из условия того, что

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \beta = \frac{R}{2L};$$

$$\Theta = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{1 \cdot L}{\sqrt{LC} \cdot R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}};$$

30. Добротность пружинного маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad \beta = \frac{r}{2m};$$

$$\Theta = \frac{1}{r}\sqrt{km};$$

31. Сильное затухание $\beta > \omega_0$.

В этом случае решение уравнения $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ принимает вид:

$$x = e^{-\beta t}\left(a \cdot ch\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\,t + b \cdot sh\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\,t\right),$$

или

$$x = e^{-\beta t} A \cdot sh\left(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\,t + \varphi_0\right),$$

где a, b, A и φ – постоянные величины, определяемые из начальных условий. Как видно, в случае сильного затухания зависимость смещения от времени не содержит тригонометрических функций, т.е. движение не является периодическим, т.е. это апериодическое движение по сути уже нельзя рассматривать как колебательное, но при этом движение является затухающим.

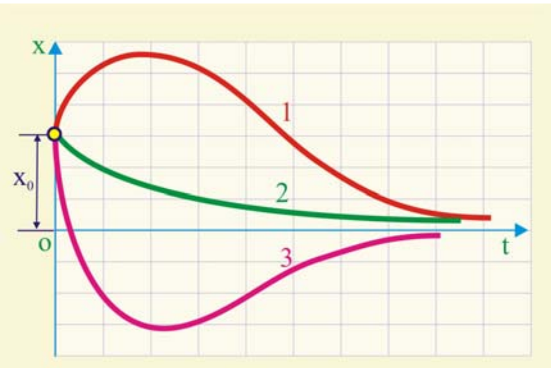


Рис. 155.6. Апериодические колебания

32. Траектория такого движения зависит от модуля и направление начальной скорости $\vec{v}_0$. На рис. 155.6 представлены возможные случаи такого движения. Кривая 1 соответствует «толчку вперёд» $(v_0 > 0)$, кривая 2 – «слабому» толчку назад $(v_0 < 0)$, кривая 3 характеризует «сильный толчок» назад $(v_0 < 0)$.

33. В механических колебательных системах достаточно часто проявляются силы сухого трения, которые с достаточной для практики точностью можно

считать постоянными по модулю. Силы сопротивления такого рода направлены всегда в сторону, противоположную вектору скорости.

Модуль силы сухого трения определяется известным уравнением

$$F_S = \mu N,$$

где μ – коэффициент трения, зависящий только от свойств поверхностей соприкасающихся материалов, N – нормальная реакция связи (сила нормального давления).

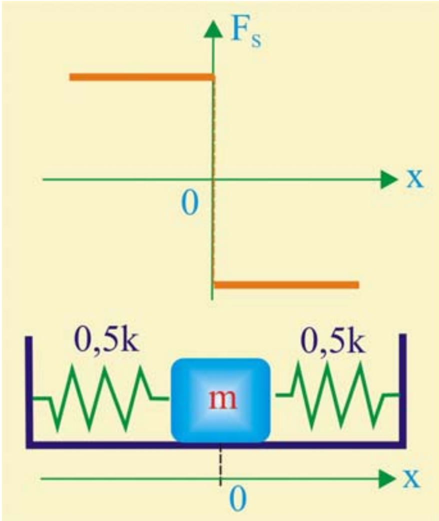


Рис. 155.7. Система с сухим трением

34. Рассмотрим задачу на примере колебательной системы, схема которой приведена на рис. 155.7. Движение системы будет описываться двумя дифференциальными уравнениями:

$$m\ddot{x} + kx = -F_S, \quad \text{при } \dot{x} > 0,$$

$$m\ddot{x} + kx = F_S, \quad \text{при } \dot{x} < 0.$$

35. В рассматриваемом случае:

$$F_S = \mu mg.$$

36. Решение нелинейных дифференциальных уравнений имеют следующий вид:

$$x = -d + a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t, \quad \text{при } \dot{x} > 0,$$

$$x = d + a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t, \quad \text{при } \dot{x} < 0,$$

где введены следующие обозначения

$$d = \frac{\mu g}{\omega_0^2}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

37. Коэффициент d имеет размерность длины, что следует из уравнения. Если в момент времени t = 0 сместить массу вправо на расстояние $x_0 > d$, правая пружина сожмётся, а левая растянется, и если далее отпустить массу без начальной скорости, то она начнёт за счёт восстанавливающей силы двигаться в направлении, противоположной оси x со скоростью $\dot{x} < 0$ (рис. 155.8). При таких начальных условиях решение дифференциального уравнения движения примет вид:

$$x = d + (x - d)\cos\omega_0 t.$$

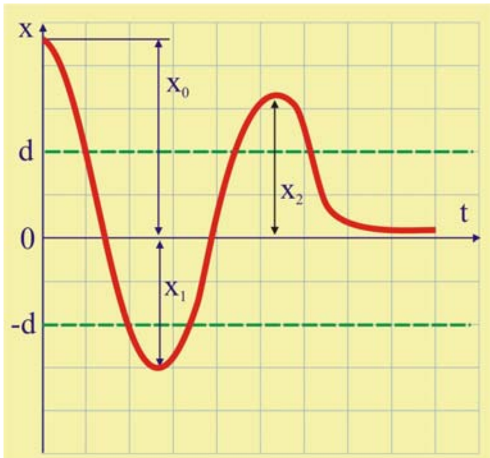


Рис. 155.8. Колебания в системе с сухим трением

38. В случае $x_0 < d$, модуль силы трения будет больше модуля силы упругости, другими словами, при таком смещении массы из состояния статического равновесия она не будет перемещаться, попросту сдвинувшись в новое положение. Решение в этом случае будет справедливо до тех пор, пока $\dot{x} < 0$, т.е. до момента времени $t_1 = \pi/\omega_0$. В этот момент времени

$$x = -(x_0 - 2d) = -x_1.$$

$$x = -d + (x_1 - d)\cos\omega_0 t.$$

39. При $x_1 > d$ сила натяжения пружин превысит силу трения и масса станет перемещаться в сторону положительного направления оси x пока $\dot{x} > 0$, т.е. до момента времени $t_2 = 2\pi/\omega_0$. Для этого момента времени справедливо уравнение

$$x = x_1 - 2d = x_0 - 4d = x_2.$$

40. В случае, когда $x_2 > d$, движение снова продолжится с $x < 0$ до времени $t_3 = 3\pi/\omega_0$, причём, в этот момент времени

$$x_3 = -(x_0 - 6d).$$

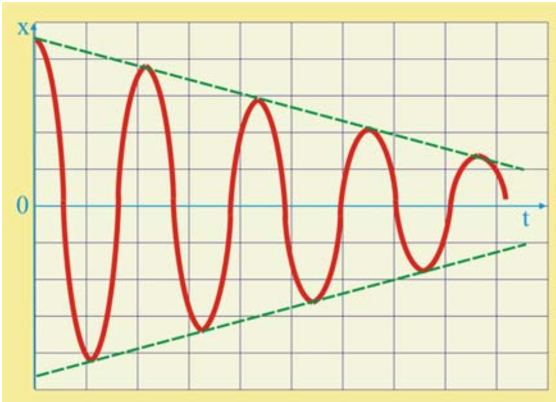


Рис. 155.9. Форма колебаний при наличии силы сухого трения

41.Таким образом, каждое последующее отклонение оказывается меньшим предыдущего на 2d, т.е. амплитудные значения смещения образуют арифметическую прогрессию. На рис. 155.9 приведена форма колебаний в системе с сухим трением. **Колебания затухают по линейному закону.** Полоса смещений, лежащая в интервале $\pm d$ называется областью застоя.

---

156. Амплитуда затухающих колебаний математического маятника за время τ_1=5 мин уменьшилась в два раза. За какое время, считая от начального момента, амплитуда уменьшится в восемь раз?

Решение

1. Запишем уравнение логарифмического декремента колебаний:

$$\theta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{-\delta t},$$

где A(t) – амплитуда колебаний в начальный момент времени, A(t + T) – значение амплитуды через один период колебания, δ – коэффициент затухания.

2. Определим далее величину коэффициента затухания, записав его следующим образом:

$$\ln\frac{A_0}{A} = \delta\tau_1; \quad \ln 2 = 300\delta; \quad \delta \cong 2{,}3\cdot 10^{-3}\,c^{-1}.$$

3. Воспользовавшись полученными соотношениями, определим искомое время, соответствующее уменьшению амплитуды в восемь раз

$$\ln 8 = \delta\tau_2; \quad \tau_2 = \frac{\ln 8}{\delta} = \frac{2{,}1}{2{,}3\cdot 10^{-3}} \cong 504\,c \cong 15{,}1\,\text{мин}.$$

---

157. Логарифмический декремент маятника θ = 0,003. Определите число полных колебаний N, которые совершит маятник при уменьшении амплитуды в два раза.

Решение

1. Запишем уравнение логарифмического декремента колебательного процесса, воспользовавшись уравнением:

$$\theta = \ln\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = \delta\tau = \frac{1}{N}; \quad \Rightarrow \quad N\theta = \ln\frac{A(t)}{A(t+\tau)},$$

где N – число полных колебаний, соответствующих моменту времени τ.

2. Из уравнения определим искомую величину:

$$N = \frac{1}{\theta}\ln 2 = 231.$$

---

158. Определите период затухающих колебаний, если период собственных колебаний системы без потерь равен T_0 = 1с, а логарифмический декремент составляет θ = 0,628.

Решение

1. Период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4\pi^2}{T_0^2} - \frac{\theta^2}{T^2}}},$$

откуда

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\frac{4\pi^2}{T_0^2} - \frac{\theta^2}{T^2}}; \quad \frac{4\pi^2T^2}{T_0^2} - \theta^2 = 4\pi^2; \quad 4\pi^2T^2 = T_0^2 4\pi^2 + T_0^2\theta^2,$$

$$T^2 = T_0^2 + \frac{T_0^2\theta^2}{4\pi^2}; \quad T = T_0\sqrt{1 + \frac{\theta^2}{4\pi^2}} \cong 1\sqrt{1 + \frac{0,39438}{39,478}} \cong 1,00498\,\text{с}.$$

---

159. Известно, что при затухающих колебаниях за τ = 0,25 T смещение тела составило x = 4,5 см, период затухающих колебаний T = 8 с, логарифмический декремент θ = 0,8. Начальная фаза колебаний равна φ = 0. Подучить уравнение затухающих колебаний и представить его графически.

Решение

1. Определим величину циклической частоты затухающих колебаний:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4}\frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

2. Коэффициент затухания δ определим из уравнения логарифмического декремента:

$$\theta = \delta T; \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{\theta}{T} = 0,1\,\text{с}^{-1}.$$

3. Значение амплитуды колебаний для момента времени τ определим, воспользовавшись уравнением затухающих колебаний:

$$x(\tau) = Ae^{-\delta\tau}\sin\omega\tau = A\exp\left(-\frac{\delta T}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi T}{16}\right),$$

$$x(\tau) = A\exp(-0,2)\sin\frac{\pi}{2}; \quad x(\tau) = A\cdot 0,819\cdot 1;$$

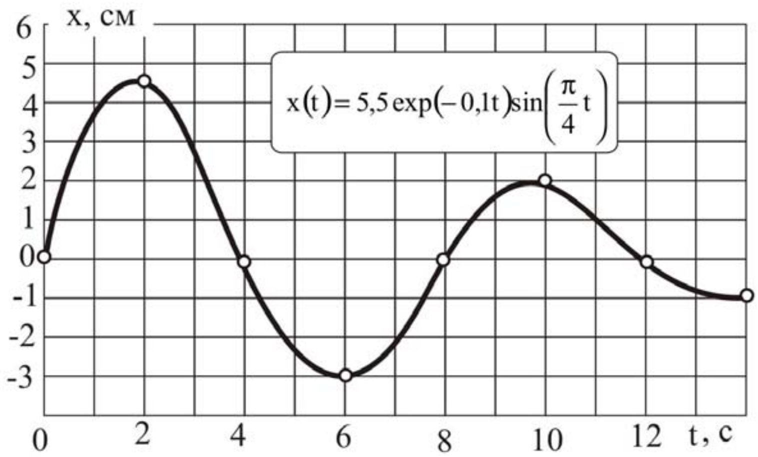
$$A = \frac{x(\tau)}{0,819} \cong 5,5\,\text{см}.$$

4. Запишем уравнение затухающих колебаний применительно к полученным данным:

$$x(t)=5{,}5\exp(-0{,}1t)\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right).$$

5. Для построение графика колебаний вычислим значение x(t) для моментов времени: τ_1 = T/4 = 2 с; τ_2 = T/2 = 4 с; τ_3 =3T/4 = 6 с; τ_4 = T = 8 с; τ_5 = 5T/4 = 10 с; τ_6 = 3T/2 = 12 с. Для чего эти величины времени, кратные T/4, последовательно подставим в уравнение:

τ, с	2	4	6	8	10	12
x(τ), см	4,5	0	– 3	0	1,98	0



---

160. Задано уравнение затухающих колебаний точки

$$x(t)=10\exp(-0{,}1t)\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right),$$

Найти зависимость скорости движения точки в функции времени, представить зависимость графически.

Решение

1. В данном случае амплитуда колебаний равна А = 10 см, циклическая частота ω = (π/3) рад/с, коэффициент затухания – δ = 0,1 с $^{-1}$, начальная фаза равна нулю.

2. Определим скорость затухающих колебаний, для чего продифференцируем по времени заданное уравнение движения

$$\dot{x}(t)=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\left\{10\exp(-0{,}1t)\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)\right\},$$

$$\dot{x}(t)=10\exp(-0{,}1t)\left[\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}t-0{,}1\sin\frac{\pi}{3}t\right].$$

3. Определим период колебаний

$$\omega=\frac{2\pi}{T};\quad T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\cdot3\cdot\pi}{\pi}=6\,\text{с}.$$

4. Вычислим значение скорости в следующие моменты времени:

$t_1 = 0$,

$$\dot{x}(t_1) = 10\exp(0)\left[\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}\cdot 0 - 0{,}1\sin\frac{\pi}{3}\cdot 0\right] \cong 10{,}47\,\frac{м}{с};$$

$t_2 = T/4 = 1{,}5$ с

$$\dot{x}(t_2) = 10\exp(-0{,}1\cdot 1{,}5)\left[\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}\cdot 1{,}5 - 0{,}1\sin\frac{\pi}{3}\cdot 1{,}5\right] \cong -0{,}32\,\frac{м}{с};$$

$t_3 = T/2 = 3$ с

$$\dot{x}(t_3) = 10\exp(-0{,}3)\left[\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}\cdot 3 - 0{,}1\sin\frac{\pi}{3}\cdot 3\right] \cong -7{,}4\,\frac{м}{с};$$

$t_4 = T = 6$ с

$$\dot{x}(t_4) = 10\exp(-0{,}6)\left[\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}\cdot 6 - 0{,}1\sin\frac{\pi}{3}\cdot 6\right] \cong 5{,}5\,\frac{м}{с};$$

$t_5 = 5T/4 = 7{,}5$ с

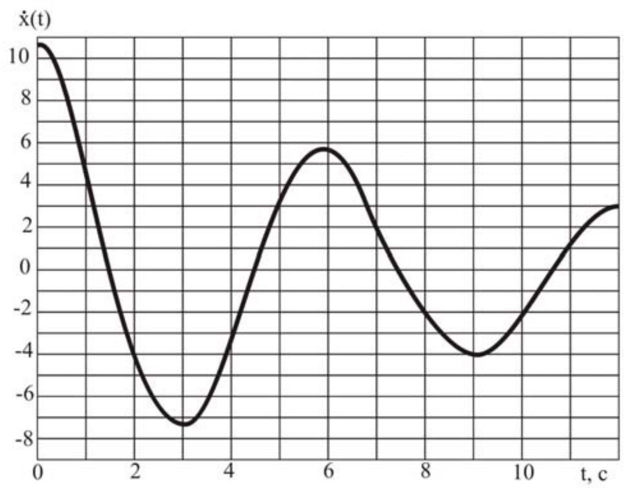
$$\dot{x}(t_5) = 10\exp(-0{,}75)\left[\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}\cdot 7{,}5 - 0{,}1\sin\frac{\pi}{3}\cdot 7{,}5\right] \cong -4{,}7\,\frac{м}{с};$$

$t_6 = 3T/2 = 9$ с

$$\dot{x}(t_6) = 10\exp(-0{,}9)\left[\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}\cdot 9 - 0{,}1\sin\frac{\pi}{3}\cdot 9\right] \cong -4\,\frac{м}{с};$$

$t_7 = 2T = 12$ с

$$\dot{x}(t_7) = 10\exp(-1{,}2) = \left[\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}\cdot 12 - 0{,}1\sin\frac{\pi}{3}\cdot 12\right] \cong 3\,\frac{м}{с}.$$



161. Математический маятник колеблется в среде, обеспечивающей величину логарифмического декремента θ = 0,5. Во сколько раз уменьшится амплитуда колебаний по истечении одного полного периода колебаний?

Решение

1. Запишем уравнение затухающих колебаний в общем виде

$$x(t) = A_0\exp(-\theta t)\sin(\omega t + \varphi_0).$$

2. Для определения амплитудных значений отклонений маятника уравнение необходимо переписать при условии $\sin(\omega t + \varphi_0) = 1$

$$A_1 = A_0 \exp\left(-\theta \frac{t}{T}\right); \quad A_2 = A_0 \exp\left(-\theta \frac{t+T}{T}\right) = A_0 e^{\theta},$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \exp(0{,}5) = 1{,}65.$$

---

162. Математический маятник в течение 120 секунд уменьшил амплитуду колебаний в 4 раза. Определить величину логарифмического декремента, если длина нити подвеса составляет l = 2,28 м.

Решение

1. Запишем уравнение затухающих колебаний

$$A_1 = A_0 \exp\left(-\theta \frac{t}{T}\right).$$

2. Определим период незатухающих колебаний маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \cong 3\,\text{с}.$$

3. Перепишем уравнение амплитуды с учётом заданных значений величин и найденного периода

$$\frac{A_0}{A_1} = \exp\left(\theta \frac{120}{3}\right); \quad 40\theta = \ln 4; \quad \theta = \frac{\ln 4}{40} \cong 0{,}035.$$

---

163. Математический маятник длиной колеблется в среде с коэффициентом затухания δ = 0,045.Определить время τ, в течение которого амплитуда колебаний уменьшится в 10 раз.

Решение

1. Уравнение колебаний математического маятника можно записать, представив отклонение грузика в угловых величинах

$$\varphi(t) = \varphi_0 \exp(-\delta t)\sin \omega t,$$

где ω – частота затухающих колебаний.

2. Запишем уравнение применительно к амплитудным значениям отклонения

$$\varphi_1 = \varphi_0 \exp(-\delta t); \quad \varphi_2 = \varphi_0 \exp[-\delta(t+\tau)].$$

3. Определим отношение амплитуд:

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \exp(\delta\tau); \quad \ln 10 = \delta\tau; \quad \tau = \frac{\ln 10}{\delta} \cong 51\,\text{с}.$$

---

164. Математический маятник длиной l = 1,09 м колеблется в вязкой среде с коэффициентом затухания δ = 0,3 с$^{-1}$. Во сколько раз должен возрасти коэффициент затухания, чтобы гармонические колебания оказались невозможными?

Решение

1. Запишем уравнение периода затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}},$$

из которого следует, что предельное значение коэффициента затухания соответствует $\delta_{max} = \omega_0$, или

$$\delta_{max} = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \cong 3\,c^{-1}.$$

2. Коэффициент затухания должен увеличиться в ζ – раз

$$\zeta = \frac{\delta_{max}}{\delta} = 10.$$

---

165. Амплитуда затухающих колебаний за время τ_1 = 100 с уменьшилась в n_1 = 20 раз. Во сколько раз амплитуда уменьшится за время τ_2 = 200 с?

Решение

1. Запишем уравнение для амплитуд затухающих колебаний:

$$A(t) = A_0 \exp(-\delta t).$$

2. В данном случае

$$\frac{A_0}{A(\tau_1)} = n_1; \quad \ln n_1 = \theta\tau_1.$$

3. Запишем уравнение для момента времени $t = \tau_2$

$$\ln n_2 = \theta\tau_2,$$

4. Решая совместно уравнения относительно величины n_2, получим:

$$n_2 = \frac{A_0}{A(\tau_2)}; \quad A(\tau_2) = A_0 \exp\left(-\frac{\tau_2}{\tau_1}\ln n_1\right) = A_0 n_1^{-\frac{\tau_2}{\tau_1}},$$

откуда

$$n_2 = n_1^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} = 20^{\frac{200}{100}} = 20^2 = 400.$$

---

166. Колебания некой точки происходят в соответствие с уравнением x(t) = 100exp(–0,01t)·cos(8πt), мм. Определить амплитуду после того, как будут выполнены N = 100 полных колебаний.

Решение

1. Из заданного уравнения движения следует что: циклическая частота колебаний составляет $\omega = 3\pi$ рад/с; коэффициент затухания – $\delta = 0{,}01\ c^{-1}$; начальная амплитуда колебаний – 100 см.

2. Определим период колебаний и логарифмический декремент

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}67c, \quad \theta = \delta T = 6{,}7\cdot 10^{-3}.$$

3. Амплитуда после истечения заданного числа колебаний определится на основании заданного уравнения так

$$A_N = A_0 \exp(\theta N) = 100\exp(-1) = 36{,}78\,\text{мм}.$$

---

167. Математический маятник длиной l = 2 м, колеблющийся в среде с потерями, за время τ = 10 мин потерял 50 % своей энергии. Определить логарифмический декремент маятника.

Решение

1. В первом приближении можно считать, что энергия затухающих колебаний пропорциональна квадрату амплитуды:

$$\left.\begin{aligned} E_1 &\cong A_0^2 \exp(-2\delta t_1); \\ E_2 &\cong A_0^2 \exp[-2\delta(t_1+\tau)]. \end{aligned}\right\}$$

2. По условию задачи:

$$\frac{E_2}{E_1} = 0{,}5\,.$$

3. Совместим соотношение для энергий в системой уравнений:

$$\frac{E_2}{E_1} = \exp(-2\delta\tau) = 0{,}5; \;\Rightarrow\; -2\delta\tau = \ln 0{,}5;$$

$$\delta = -\frac{\ln 0{,}5}{2\tau} = -\frac{-0{,}693}{1200} \cong 5{,}8\cdot 10^{-4}\,c^{-1}\,.$$

4. Период колебаний маятника, ввиду малости коэффициента затухания можно приближённо определить уравнением

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 6{,}28\sqrt{\frac{2}{9{,}81}} \cong 2{,}83\,c\,.$$

5. Логарифмический декремент колебаний определится как

$$\theta = \delta T = 1{,}6\cdot 10^{-3}\,.$$

---

168. Математический маятник длиной l = 2 м колеблется в среде с логарифмическим декрементомθ = 0,01, так что энергия колебаний уменьшилась в ζ = 10 раз. Какое время τ прошло при этом с момента начала колебаний?

Решение

1. Запишем уравнение амплитуд затухающего колебания и определим относительную амплитуду

$$A_1 = A_0 \exp\left(-\theta\frac{t}{T}\right); \quad \Rightarrow \quad \frac{A_0}{A_1} = \exp\left(\frac{\theta t}{T}\right);$$

2. Подставим в уравнение соотношение для периода колебаний

$$\xi = \exp\left(\frac{\theta t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}\right);$$

3. Для того чтобы связать величины ξ и ζ необходимо проанализировать уравнение энергии колебательного движения

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(\omega A)^2}{2} = \frac{m2\pi^2 A^2}{T^2};$$

$$\frac{E_0}{E_1} = \left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2; \quad \Rightarrow \quad \zeta = \exp\left(\frac{\theta t}{\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}\right);$$

$$\ln\zeta = \frac{\theta t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}; \quad t = \frac{\pi}{\theta}\sqrt{\frac{\ell}{g}}\ln\zeta = \frac{3{,}14}{0{,}01}\sqrt{\frac{2}{9{,}81}}\cdot 2{,}3 \cong 326\,c = 5{,}4\text{мин}\,.$$

169.. Определите число полных колебаний N, в течение которых энергия системы уменьшится в два раза. Логарифмический декремент колебаний принять равным θ = 0,01.

Решение

1. Для решения задачи воспользуемся уравнением:

$$N_1 = \frac{1}{\theta}\ln\frac{A_0}{A_1} = \frac{1}{\theta}\ln\sqrt{\frac{E_0}{E_1}} = \frac{1}{\theta}\ln\sqrt{2} = \frac{1}{0,01}\ln 1,41 \cong 35\,.$$

---

170. Найти период затухающих колебаний математического маятника если период его собственных колебаний составляет T_0 = 1 с, а логарифмический декремент равен θ = 0,628

Решение

1. Определим циклическую частоту собственных колебаний математического маятника

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 6,28\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}\,.$$

2. Определим коэффициент затухания

$$\theta = \delta T; \quad \delta = \theta/T = 0,628\,\text{с}^{-1}\,.$$

3. Найдём период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \cong \frac{6,28}{\sqrt{39,4 - 0,39}} \cong 1,0054\ \text{с}.$$

---

171. Тело массой m = 5кг совершает гармонические затухающие колебания. За первые 50с колебаний тело теряет 60% своей первоначальной энергии. Определите коэффициент сопротивления среды.

Решение

1. Определим коэффициент затухания δ из следующих соображений

$$\frac{A_0}{A_1} = \exp(\delta\tau); \quad \frac{E_0}{E_1} = \left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2 = \exp(-2\delta\tau); \quad \ln 0,4 = -2\delta\tau\,,$$

$$\delta = \frac{\ln 0,6}{2\tau} = 9,16\cdot 10^{-3}\,\text{с}^{-1}\,.$$

2. Найдём коэффициент сопротивления среды, в которой колеблется тело

$$\delta = r/2m; \quad r = 2\delta m = 0,0916\,\text{кг/с}\,.$$

---

5. Вынужденные колебания

172. Частота собственных колебаний доски, перекинутой через ручей ν_0 = 0,5 Гц. Наступит ли явление резонанса, если по доске будет проходить человек, делающий ζ = 6 шагов каждые τ = 3 с?

Решение

1. Явление резонанса (без учёта потерь) наступает при совпадении частоты возмущающей силы с частотой собственных колебаний.

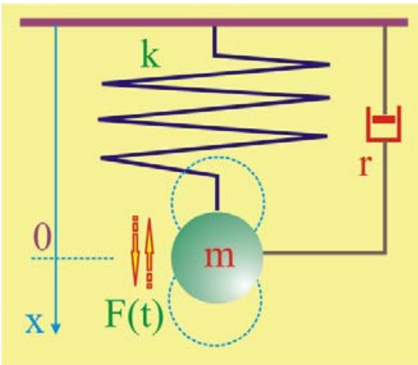


Рис. 172.1. Вынужденные колебания

2. На практике часто требуется колебания поддерживать, что возможно при сообщении колебательной системе энергии от внешнего источника. Такие колебания классифицируются как вынужденные колебания. Рассмотрим колебательную систему в виде массы, соединённой с вертикально расположенной пружиной (рис. 172.1). Помимо силы сопротивления к массе приложена внешняя периодическая сила F(t). Уравнение движения в этом случае запишется следующим образом:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F(t).$$

3. Рассмотрим случай, когда внешняя возбуждающая сила изменяется по гармоническому закону с частотой Ω, например, по закону косинуса

$$F = F_0 \cos\Omega t\,.$$

4. Уравнение движения перепишется в виде:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_0 \cos\Omega t\,.$$

5. Введём следующие обозначения

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},\quad \beta = \frac{r}{2m}.\quad f_0 = \frac{F_0}{m},$$

что позволяет уравнение (3.3) переписать в виде

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\Omega t\,.$$

6. Неоднородное дифференциальное уравнение имеет решение в виде суммы общего решения одноимённого однородного уравнения x_1 и частного решения x_2 неоднородного уравнения, причём

$$x_1 = e^{-\beta t}\left(C_1 e^{t\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}} + C_2 e^{-t\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}\right),$$

$$x_2 = x_0 \cos(\Omega t - \varphi),$$

$$x = x_1 + x_2 = e^{-\beta t}\left(C_1 e^{t\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}} + C_2 e^{-t\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}\right) + x_0 \cos(\Omega t - \varphi).$$

7. Первый член последнего уравнения характеризует свободные затухающие колебания. Постоянные интегрирования C_1 и C_2, как обычно, определяются путём подстановки начальных условий $x(0)$ и $\dot{x}(0)$, имеющих место при t =

0. Второй член этого уравнения описывает стационарные вынужденные колебания, происходящие с частотой вынуждающей внешней силы Ω с амплитудой, определяемой уравнением:

$$x_0 = \frac{F_0}{\Omega\sqrt{r^2 + \left(\frac{k}{\Omega} - \Omega m\right)^2}} = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\Omega^2\beta^2}}.$$

8. Сдвиг фазы колебаний относительно внешней силы равен:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{r}{\frac{k}{\Omega} - \Omega m} = \operatorname{arctg}\frac{2\Omega\beta}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

9. Для случая малого затухания, т.е. при $\beta \to 0$ уравнение амплитуды возможно упростить:

$$x_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{f_0}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2};$$

10. Очевидно, что при $\omega_0 = \Omega$, $A \to \infty$, но это случай довольно далёк от реальности, затухание при колебаниях всегда имеет место быть. Вместе с тем уравнение амплитуды позволяет установить некоторые характерные особенности поведения амплитуды вынужденных колебаний в зависимости от соотношения частот возмущающей силы и собственных колебаний.

11. Целесообразно выделить три характерных диапазона частот (рис. 134.2).

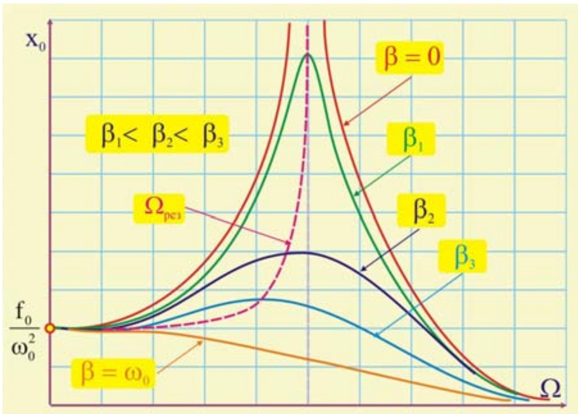


Рис. 172.2. Частотные характеристики

1. Область низких частот: $\Omega \ll \omega_0$: в этом случае сдвиг фаз близок к нулю, а амплитуда вынужденных колебаний составит:

$$x_0 \cong x_{0(Стат)} = \frac{f_0}{\omega_0^2},$$

(3.12)

где $x_{0(Стат)}$ – статическое смещение под действием постоянной силы, равной амплитудному значению возмущающей силы, т.е. $F = F_0$.

2. Область высоких частот: $\Omega \gg \omega_0$. Начальная фаза в этом случае $\alpha \to -\pi$. Колебания происходят в противофазе с вынуждающей силой. Амплитуда с ростом частоты убывает по закону:

$$x_0 \cong x_{0(Стат)} \cdot \left(\frac{\Omega}{\omega_0^2}\right)^2.$$

3. Область резонанса: $\Omega \cong \omega_0$. В отсутствие сопротивления амплитуда вынужденных колебаний неограниченно возрастает. В реальных системах увеличение амплитуды будет ограничиваться диссипативными потерями.

Частоту вынужденных колебаний, при которой наблюдается явление резонанса, называют **резонансной частотой**

$$\Omega_{Рез,} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2};$$

при $\beta \ll \omega_0$, $\Omega_{РЕЗ} \cong \omega_0$.

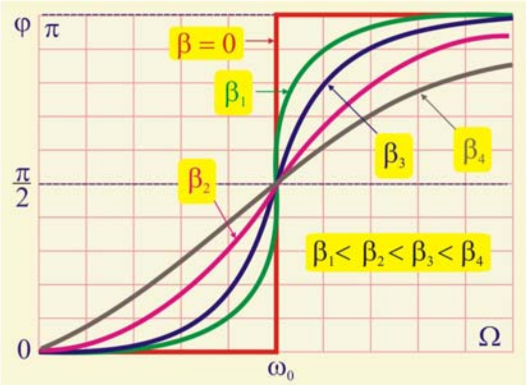


Рис. 172.3. Фазовые характеристики

12. Зависимости, приведенные на рис. 172.3 называются фазовыми характеристикой колебаний. По мере уменьшения силы сопротивления кривые стремятся к предельной зависимости, претерпевающей разрыв в точке $\Omega_{РЕЗ} \cong \omega_0$, т.е. при резонансе. В этой точке при любых значениях коэффициента затухания сдвиг фазы составляет $\varphi = \pi/2$. При малых значениях затухания в области частот $\Omega < \omega_0$ вынужденные колебания почти совпадают по фазе с внешней силой, а при $\Omega > \omega_0$ находится с ней в противофазе. Если частота Ω изменяется плавно, то фаза вынужденных колебаний меняется в области резонанса на обратную частоту, тем резче, чем меньше затухание в системе.

13. Процесс вырождения собственных колебаний и установления вынужденных колебаний протекает по-разному, в зависимости от соотношения между частотами собственных и внешних колебаний. На рис. 134.4. приведены качественные зависимости от времени собственных колебаний (пунктирная кривая) и вынужденных колебаний (сплошная кривая) для разного соотношения частот.

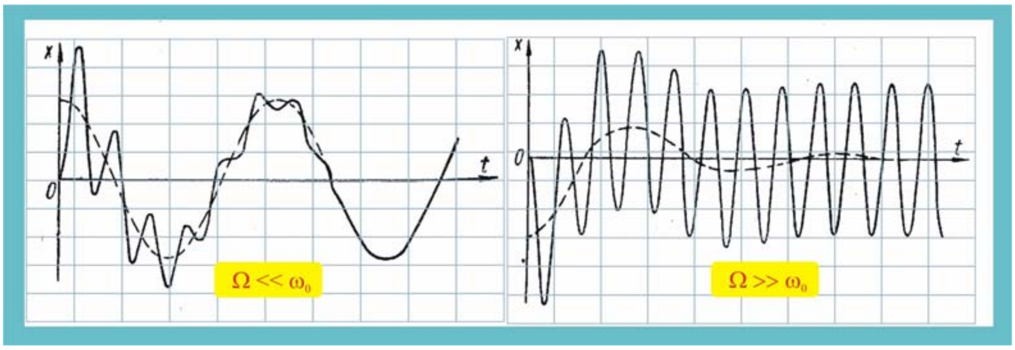


Рис. 172.4. Процесс установления вынужденных колебаний

14. Если величины Ω и ω близки друг к другу, то процесс установления сопровождается чередующимися нарастаниями и спадами типа биений, которые тем глубже, чем меньше силы затухания и тем реже, чем ближе Ω и ω_0. При резонансе, когда $\omega = \Omega$ (рис. 172.5) вынужденные колебания устанавливаются без биений тем медленнее, чем меньше затухание, т.е. $\beta_1 > \beta_2 > \beta_3$.

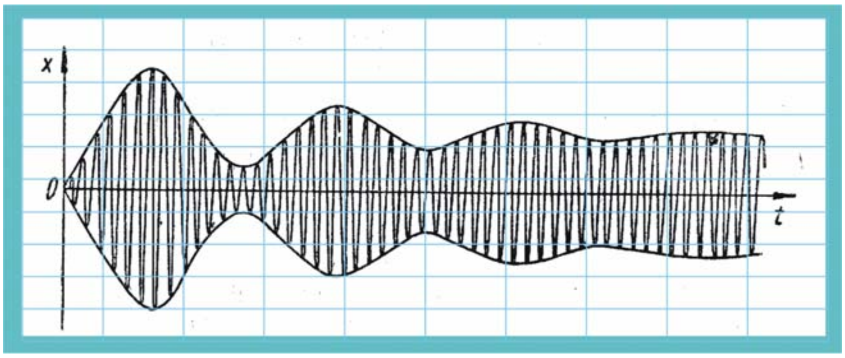


Рис.172.5. Процесс установления вынужденных колебаний при $\omega_0 = \Omega$

15. Явление резонанса в одинаковой степени типично как для механических, так и для электрических и электромеханических колебательных систем и поэтому играет важную роль в самых разнообразных отделах физики и техники.

16. Характер резонанса зависит от свойств как самой колебательной системы, в которой происходит явление, так и от свойств внешней возмущающей силы, действующей на систему. Особенно сложный характер явление резонанса имеет в системах с распределёнными параметрами. Например, в струне, резонанс сохраняет свои типичные свойства, однако имеются и отличительные особенности. Система обладает множеством степеней свободы, т.е. целым набором собственных частот. Резонанс может наступать всякий раз, когда одна из гармоник внешней силы совпадает с одной из собственных частот.

17. Существует масса способов исследования резонансных свойств колебательных систем, но самым, пожалуй, распространённым является электродинамический, когда механические колебания в довольно широкой полосе частот возбуждаются специальным преобразователем (рис. 134.6). Электродинамический преобразователь использует взаимодействие катушки с током и мощного постоянного магнита. Катушка питается переменным током, с частотой которого колеблется исследуемая масса. Такие системы получили особо широкое распространение в судостроении, авиастроении и других отраслях машиностроения, где имеют место высокоинтенсивные источники вибраций. Явление резонанса имеет огромное влияние на прочностные характеристики практически всех известных конструкций машиностроения и транспорта. По статистике около 80% аварий и поломок в системе среднего машиностроения происходит именно из-за, недопустимо высоких амплитуд колебаний.

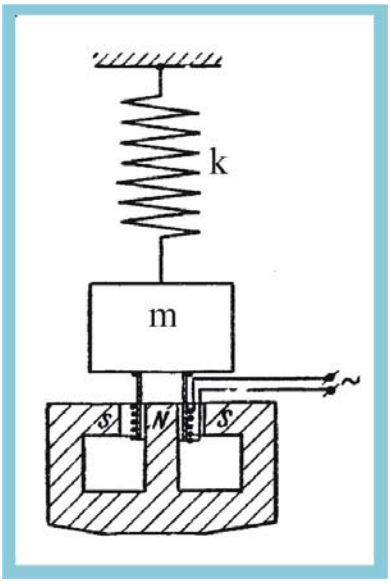


Рис. 172.6. Электродинамический преобразователь

18. Возвращаясь к условиям возбуждения, заданным в условии задачи, определим период и частоту внешней ударной возбуждающей колебания силы:

$$T = \frac{\tau}{\zeta} = \frac{3}{6} = 0{,}5\text{с}; \quad \nu = 2\text{Гц};$$

Поскольку $\nu >> \nu_0$ – резонансного возбуждения не будет.

---

173. Когда человек массой m = 80 кг садится в автомобиль массой M = 1200 кг, центр масс автомобиля опускается на Δx = 1,4 см. Оценить, с какой частотой станет раскачиваться кузов автомобиля после съезда с ухаба?

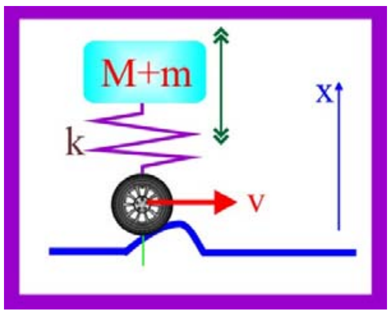


Рис. 135. Колебания автомобиля

Решение

1. Эквивалентный коэффициент упругости четырёх элементов подвески автомобиля:

$$4k\Delta x = mg; \quad k = \frac{mg}{4\Delta x} = \frac{80 \cdot 9{,}82}{4 \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-2}} \approx 14 \cdot 10^3 \frac{Н}{м};$$

2. После спрыгивания с ухаба на колебательную систему действует импульсная ударная нагрузка с широким спектром возбуждающих частот. Проше всего возбудить собственные колебания системы на собственной частоте:

$$2\pi\nu_0 \approx \sqrt{\frac{k}{M+m}}; \quad \nu_0 \approx \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M+m}} \approx \frac{1}{6{,}28}\sqrt{\frac{14 \cdot 10^3}{1280}} \approx 0{,}527 Гц;$$

---

174. Определить период собственных колебаний железнодорожного вагона на рессорах, если его статическая осадка составляет $\Delta x = 0{,}25$ м.

Решение

1. Из условия статического равновесия вагона:

$$mg = k\Delta x; \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{k} = \frac{\Delta x}{g}; \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{\Delta x}{}};$$

2. Период собственных колебаний вагона:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta x}{k}} = 6{,}28\sqrt{\frac{0{,}25}{9{,}82}} \approx 1с;$$

---

175. Период собственных вертикальных колебаний железнодорожного вагона $T = 1{,}25$ с. На стыках рельсов на подвеску вагона действуют периодические ударные нагрузки, являющиеся причиной вынужденных колебаний вагона. При какой скорости поезда амплитуда колебаний будет наибольшей, если длина каждого рельса $\ell = 25$ м?

Решение

1. Явление резонанса будет наблюдаться при совпадении периода собственных колебаний вагона со скважностью периодического возбуждения на стыках:

$$T = \tau; \quad \tau = \frac{\ell}{v}; \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\ell}{v}; \quad v = \frac{\ell}{T} \approx \frac{25}{1{,}25} \approx 20\frac{м}{с} \equiv 72\frac{км}{час};$$

---

176. Вёдра с водой на коромысле имеют частоту собственных колебаний ν_0 = 0,625 Гц. При какой длине шага вода будет особенно сильно выплёскиваться, если человек с вёдрами движется с постоянной скоростью v = 2,7 км/час?

Решение

1. Период собственных колебаний вёдер с водой:

$$T_0 = \frac{1}{\nu_0} = 1{,}6с;$$

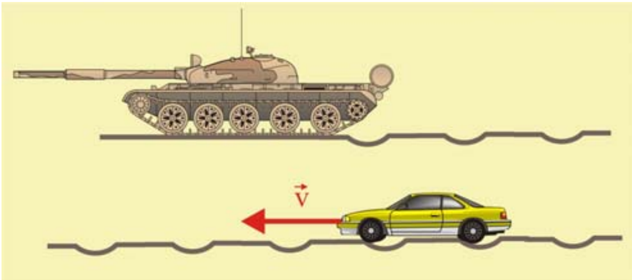
2. Длина шага, при котором скважность ударного возбуждения будет совпадать с периодом собственных колебаний:

$$v = \ell T_0; \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{v}{T_0} \approx \frac{0,75}{1,6} \approx 0,47\text{м};$$

---

177. Танк, проехав по мокрой грунтовой дороге, оставил два ряда углублений, расположенных на расстоянии ℓ = 8 м друг от друга. Через некоторое время по дороге проехал легковой автомобиль массой M = 1,3 т, который попав в резонанс стал испытывать ощутимые вертикальные колебания. С какой скоростью двигался автомобиль, если под действием массы четырёх пассажиров m = 300 кг подвеска автомобиля «проседает» в состоянии покоя на Δx = 2 см.

Решение



1. По величине статической реакции подвески автомобиля определим коэффициент её жесткости :

$$k = \frac{Mg}{\Delta x} = \frac{1,3 \cdot 10^3 \cdot 9,81}{2 \cdot 10^{-3}} \cong 1,25 \cdot 10^4 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

2. Частота собственных колебаний автомобиля:

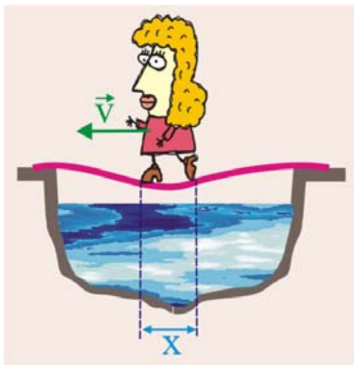
$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}} = \frac{1}{6,28}\sqrt{\frac{1,25 \cdot 10^4}{1,3 \cdot 10^3}} \cong 0,5\,\text{Гц}.$$

3. Скорость движения автомобиля, соответствующая резонансным колебаниям:

$$v = \ell \nu_0 = 8 \cdot 0,5 = 4\,\text{м/с} = 14,4\,\text{км/час}.$$

---

178. Через ручей переброшена длинная упругая доска. Когда женщина стоит посередине такого мостика, доска прогибается в средней части на расстояние Δy = 0,1 м. Когда же она переходит мостик со скоростью v = 3,6 км/час, то доска начинает так раскачиваться в вертикальном направлении, что возникает вероятность падения дамы в воду. Определить длину шага.



Решение

1. Когда девочка стоит посередине доски, мо сила её веса уравновешивается силой, обусловленной упругостью доски:

$$mg = k\Delta y,$$

где k – коэффициент упругости доски, m – масса девочки, Δy – статический прогиб доски.

2. Из уравнения статического равновесия можно определить частоту собственных колебаний системы «девочка – доска»

$$\frac{k}{m} = \frac{g}{\Delta y}; \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta y}}; \quad \nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta y}}.$$

3. С другой стороны, частоту раскачивания доски можно выразить через длину шага x и скорость перемещения ребёнка по доске:

$$\nu = \frac{v}{x}.$$

4. Возрастание амплитуды колебаний будет наблюдаться при совпадении частот:

$$\nu_0 = \nu; \quad \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta y}} = \frac{v}{x};$$

$$x = 2\pi v\sqrt{\frac{\Delta y}{g}} = 6{,}28 \cdot 1\sqrt{\frac{0{,}1}{9{,}81}} \cong 0{,}634\,\text{м}.$$

---

179. Автомобиль массой m = 1000 кг проходит испытания на устойчивость к переменным нагрузкам, для чего через задний буксировочный крюк он соединён с упругим элементом жесткостью k = 0,7 МН/м. К автомобилю прикладывается гармоническая сила $F(t) = 10^5 \sin 15t$. Определить, пренебрегая сопротивлением воздуха и силами трения уравнение движения автомобиля.

Решение

1. В данном случае исследуемый движущийся объект имеет одну степень свободы, по этому для описания достаточно получить уравнение движения относительно одной, горизонтальной оси ox с началом отсчёта в положении автомобиля при недеформированном упругом элементе.

2. Начальные условия задачи при таком выборе системы отсчёта будут выглядеть следующим образом

$$\text{при } t = 0: \quad x = 0; \quad \dot{x} = 0. \tag{1}$$

3. На автомобиль применительно к выбранной оси действуют две силы: сила, вызванная наличием упругого элемента $F_k = -kx$ и внешняя гармоническая сила $F(t) = F_0 \sin\omega t$. Уравнение II закона Ньютона запишется так

$$m\ddot{x} = F(t)_X + F_{kX}, \tag{2}$$

$$\ddot{x} = \frac{F_0}{m}\sin\Omega t - \frac{k}{m}x, \tag{3}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f\sin\Omega t, \tag{4}$$

где ω – циклическая частота

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \cong 26{,}5\frac{\text{рад}}{\text{с}}; \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} \cong 4{,}2\,\text{Гц}; \tag{5}$$

величина приведённой возбуждающей силы

$$f = \frac{F_0}{m} = 100\frac{\text{м}}{\text{с}^2}. \tag{6}$$

4. Уравнение (4) является дифференциальным уравнением второй степени с постоянными коэффициентами. Решение уравнения складывается из суммы решений, которые описывают собственные колебания системы и её колебания под действием периодической внешней силы

$$x = x_1 + x_2, \tag{7}$$

где x1 – общее решение, x2 – частное решение. Характеристическое уравнение запишется следующим образом

$$r^2 + f^2 = 0; \quad \Rightarrow \quad r_{1,2} = \pm fi. \tag{8}$$

5. Уравнение (8) даёт возможность искать общее решение в виде

$$x_1 = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t\,. \tag{9}$$

6. Для определения вынужденных колебаний, т.е. частного решения x2 необходимо найти соотношение между циклическими частотами свободных и вынужденных колебаний. Так как $\omega < \Omega$, то имеют место вынужденные колебания малой частоты, при этом решение целесообразно искать в виде

$$x_2 = A\sin\Omega t + B\cos\Omega t\,, \tag{10}$$

где A и B – коэффициенты подлежащие определению.

7. Подставим уравнение (10) в исходное уравнение (4)

$$\dot{x}_2 = A\Omega\cos\Omega t - B\Omega\sin\Omega t\,, \tag{11}$$

$$\ddot{x}_2 = -A\Omega^2\sin\Omega t - B\Omega^2\cos\Omega t\,, \tag{12}$$

$$-A\Omega^2\sin\Omega t - B\Omega^2\cos\Omega t + \omega^2\left(A\sin\Omega t + B\cos\Omega t\right) = f\sin\Omega t\,, \tag{13}$$

$$-A\Omega^2\sin\Omega t - B\Omega^2\cos\Omega t + A\omega^2\sin\Omega t + B\omega^2\cos\Omega t = f\sin\Omega t\,. \tag{14}$$

8. Приравняем коэффициенты, стоящие в левой и правой частях уравнения (14) при соответствующих тригонометрических коэффициентах

$$-A\Omega^2 + A\omega^2 = f; \quad \Rightarrow \quad A = \frac{f}{\omega^2 - \Omega^2}\,, \tag{15}$$

$$-B\Omega^2 + B\omega^2 = 0; \quad \Rightarrow \quad B = 0\,. \tag{16}$$

9. Таким образом, частное решение уравнения (9) имеет вид

$$x_2 = \frac{f}{\omega^2 - \Omega^2}\sin\Omega t\,. \tag{17}$$

10. Совместим далее уравнения (7), (9) и (17)

$$x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \frac{f}{\omega^2 - \Omega^2}\sin\Omega t\,. \tag{18}$$

11. Для определения постоянных C1 и C2 продифференцируем по времени уравнение (18)

$$\dot{x} = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t + \frac{f\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}\cos\Omega t\,. \tag{19}$$

12. Подставим в уравнение (18) и (19) начальные условия задачи: t = 0, x = 0, $\dot{x} = 0$

$$0 = C_1\cos 0t + C_2\sin 0t + \frac{f}{\omega^2 - \Omega^2}\sin 0t\,, \tag{20}$$

$$0 = -C_1\omega\sin\omega 0 + C_2\omega\cos\omega 0 + \frac{f\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}\cos\Omega 0\,, \tag{21}$$

$$C_1 = 0; \quad C_2 = -\frac{\Omega}{\omega}\frac{f}{\omega^2 - \Omega^2}\,. \tag{22}$$

13. Уравнение движения автомобиля, таким образом, запишется следующим образом

$$x(t) = -\frac{\Omega}{\omega}\frac{f}{\omega^2 - \Omega^2}\sin\omega t + \frac{f}{\omega^2 - \Omega^2}\sin\Omega t\,. \tag{23}$$

14. Подставим в уравнение заданные по условию задачи величины в решение (23)

$$x(t) = -\frac{15}{26{,}5}\frac{100}{475}\sin 26{,}5t + \frac{100}{475}\sin 15t\,. \tag{24}$$

$$x(t) = -0{,}12\sin 26{,}5t + 0{,}2\sin 15t\,. \tag{25}$$

15. Первое слагаемое – собственные колебания A0 = 0,12 м, второе – вынужденные колебания под действием периодической силы F(t) с амплитудой A1 = 0,2 м.

180. Описанные в предыдущей задаче испытания автомобиля проводятся при частичном включении тормозной системы, обеспечивающей силу сопротивления движению, пропорциональную скорости в первой степени R = ζv, где ζ = 2,5·10^5 кг/с. Получить уравнение движения.

Решение

1. Второй закон Ньютона в проекции на ось x (см. предыдущую задачу) представится следующим образом

$$m\ddot{x} = F(t)_X + F_{kX} + R_X, \quad (1)$$

$$\ddot{x} = \frac{F_0}{m}\sin\Omega t - \frac{k}{m}x - \frac{\zeta}{m}\dot{x}, \quad (2)$$

где ψ – разность фаз между возбуждающей силой и силой сопротивления, пропорциональной скорости

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = f\sin\Omega t. \quad (4)$$

3. Используя условия предыдущей задачи, определим постоянные коэффициенты дифференциального уравнения (3)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 26{,}5\,c^{-1}; \quad \delta = \frac{\zeta}{2m} = 125\,c^{-1}; \quad f = \frac{F_0}{m} = 100\,c^{-1}. \quad (5)$$

4. В данном случае движение автомобиля будет происходить при малом затухании, потому что $\omega > \delta$ и $\omega > \Omega$, т.е. решение дифференциального уравнения (4) ищется в виде

$$x = x_1 + x_2, \quad (6)$$

где x1 – общее решение соответствующего однородного уравнения, x2 – частное решение неоднородного уравнения, причём

$$x_1 = A\exp(-\delta t)\sin\left\{\left(\sqrt{\omega^2 - \delta^2}\right)t + \varphi_0\right\}, \quad (7)$$

$$x_2 = a\sin(\Omega t + \varphi - \varepsilon), \quad (8)$$

$$a = \frac{f}{\sqrt{\left(\omega^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}, \quad (9)$$

$$\varepsilon = \operatorname{arctg}\frac{2\delta\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}, \quad (10)$$

$$A(t) = \frac{f}{\sqrt{\left(\omega^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}\sin(\Omega t + \varphi - \varepsilon). \quad (11)$$

5. При $\omega > \Omega$ решение уравнения движения представляется в виде

$$x(t) = \exp(-\delta t)\left(C_1\cos\sqrt{\omega^2 - \Omega^2}\,t + C_2\sin\sqrt{\omega^2 - \Omega^2}\,t\right) + A(t). \quad (12)$$

6. Проведём необходимые вычисления

$$\sqrt{\omega^2 - \Omega^2} \cong \sqrt{702 - 225} \cong 22\,c^{-1}, \quad (13)$$

$$a = \frac{f}{\sqrt{\left(\omega^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} = \frac{100}{\sqrt{484 + 1{,}4\cdot 10^7}} \cong 2{,}7\cdot 10^{-2}\,м, \quad (14)$$

$$\varepsilon = \operatorname{arctg}\frac{2\delta\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \cong 1{,}36\,рад. \quad (15)$$

7. С учётом полученных величин, решение (12) перепишется в виде

$$x(t) = \exp(-125t)(C_1\cos 22t + C_2\sin 22t) + 2{,}7\cdot 10^{-2}\sin(15t - 1{,}36). \quad (16)$$

8. Для определения постоянных интегрирования С1 и С2 найдём производную по времени уравнения (16), т.е. получим уравнение скорости

$$\dot{x}(t) = -125\exp(-125t)(C_1\cos 22t + C_2\sin 22t) + \\ + 22\exp(-125t)(-C_1\sin 22t + C_2\cos 22t) + 0{,}4\cos(15t - 1{,}36). \quad (17)$$

9. Подставим в уравнение (16) начальные условия, аналогичные предыдущей задаче: t = 0, x = 0 и определим значение С1

$$0 = C_1 - 2{,}7\cdot 10^{-2}\sin(1{,}36), \quad C_1 \cong 2{,}64\cdot 10^{-2}. \quad (18)$$

10. Для вычисления С2 в уравнение (17) подставим: t = 0, $\dot{x} = 0$

$$0 = -125C_1 + 22C_2 + 0{,}4\cos 1{,}36, \quad (19)$$

$$C_2 = \frac{125C_1 - 0{,}4\cos 1{,}36}{22} \cong 0{,}146. \quad (20)$$

11. Подставим полученные значения в уравнение (16)

$$x(t) = \exp(-125t)(2{,}7\cdot 10^{-2}\cos 22t + 0{,}146\sin 22t) + \\ + 2{,}7\cdot 10^{-2}\sin(15t - 1{,}36). \quad (21)$$

12. Преобразуем полученное решение к следующему

$$x(t) = \exp(-125t)(2{,}7\cdot 10^{-2}\cos\omega t + 0{,}146\sin\omega t) + \\ + 2{,}7\cdot 10^{-2}\sin(\Omega t - 1{,}36). \quad (22)$$

Наличие перед круглой скобкой экспоненциального множителя с отрицательным показателем степени, говорит о том, что собственные колебания, протекающие с частотой ω, достаточно быстро исчезнут, и автомобиль будет двигаться, совершая вынужденные колебания с циклической частотой Ω.

---

181. Период собственных колебаний пружинного маятника равен T_0 = 0,55 с. При погружении маятника в вязкую жидкость период стал равным T = 0,56 с. Найти резонансную частоту колебаний.

Решение

1. Определим циклическую частоту собственных колебаний маятника

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 11{,}42\,c^{-1}; \quad \omega_0^2 = \frac{4\pi^2}{T_0^2}.$$

2. Запишем уравнение периода затухающих колебаний из которого выразим коэффициент затухания δ

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}; \quad \Rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{\dfrac{4\pi^2}{T_0^2} - \delta^2},$$

$$\frac{4\pi^2 T^2}{T_0^2} - T^2\delta^2 = 4\pi^2; \quad \frac{4\pi^2 T^2}{T_0^2} - 4\pi^2 = T^2\delta^2,$$

$$\delta^2 = \frac{4\pi^2}{T_o^2} - \frac{4\pi^2}{T^2}.$$

3. Уравнение резонансной частоты колебаний

$$\nu_R = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4\pi^2}{T_0^2} - 2\left(\frac{4\pi^2}{T_0^2} - \frac{4\pi^2}{T^2}\right)},$$

$$\nu_R = \sqrt{\frac{2}{T^2} - \frac{1}{T_0^2}} = \sqrt{\frac{2}{0{,}314} - \frac{1}{0{,}3}} \cong 1{,}742\, c^{-1}$$

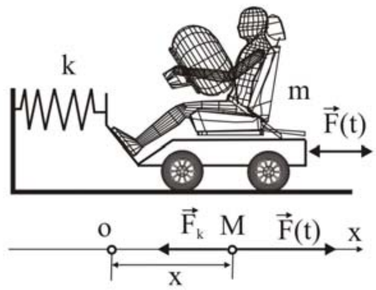
---

182. Установка для исследования индивидуальных средств безопасности пассажиров автотранспорта совместно с манекеном обладает массой m = 510 кг. К установке прикладывают горизонтальную возбуждающую гармоническую силу:

$$F(t) = F_0 \sin \Omega t,$$

где $F_0 = 4{\cdot}10^4$ Н – амплитуда возмущающей силы, $\Omega = 60\ c^{-1}$ – циклическая частота возмущающей силы. Установка соединена с вертикальной стеной упругим элементом жёсткости $k = 1{,}7{\cdot}10^6$ Н/м. Определить уравнение движения установки.

Решение



1. Дифференциальное уравнение движения в проекции на горизонтальную ось в данном случае представится следующим образом

$$m\ddot{x} = -kx + F_0 \sin \Omega t,$$

2. Поделим уравнение (1) на m

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\sin \Omega t,$$

3. Введём стандартные обозначения и вычислим циклическую частоту собственных колебаний системы

$$\frac{k}{m} = \omega^2 = 3364\, c^{-2}; \quad f = \frac{F_0}{m} = 78\frac{м}{c^2}; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 58\, c^{-1}.$$

4. Перепишем уравнение движения с учётом обозначений:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f \sin \Omega t.$$

5. Сравнение величин ω и Ω показывает, что колебания происходят в области резонанса, но тем не менее $\omega < \Omega$

6. Запишем решение в виде:

$$x(t) = -\frac{\Omega}{\omega}\frac{f}{\omega^2 - \Omega^2}\sin \omega t + \frac{f}{\omega^2 - \Omega^2}\sin \Omega t.$$

7. Ввиду того, что $\omega \cong \Omega$ будем иметь следующие соотношения:

$$\frac{\omega}{\Omega} \cong 1; \quad \omega + \Omega \cong 2\omega \cong 2\Omega.$$

8. Перепишем уравнение x(t) следующим образом:

$$x \cong \frac{f}{(\omega - \Omega)(\omega + \Omega)}(\sin \Omega t - \sin \omega t),$$

или

$$x \cong \frac{f}{2\omega(\omega - \Omega)}(\sin \Omega t - \sin \omega t).$$

9. Преобразуем выражение, стоящее в скобках

$$(\sin \Omega t - \sin \omega t) = 2\sin\frac{\Omega - \omega}{2}t\cos\frac{\Omega + \omega}{2}t \cong 2\sin\frac{\Omega - \omega}{2}t\cos \Omega t.$$

10. Уравнение x(t) можно представить так:

$$x = a(t)\cos \Omega t,$$

где

$$a(t) = \frac{f}{\omega(\omega - \Omega)} \sin \frac{\Omega - \omega}{2} t\,.$$

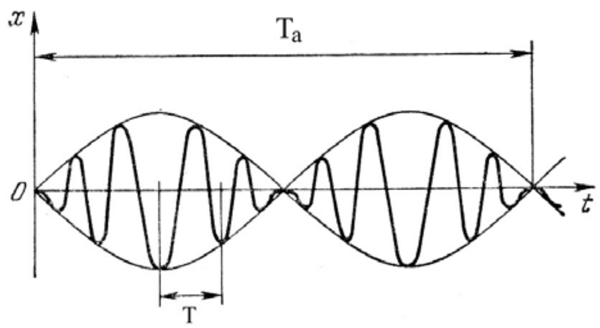
11. При $\omega \cong \Omega$ величина a(t) является медленно изменяющейся во времени с циклической частотой

$$\omega_a = \frac{\Omega - \omega}{2} = 1\frac{\text{рад}}{\text{с}}, \quad (\nu_a \cong 0{,}16\,\text{Гц}),$$

и периодом

$$T_a = \frac{4\pi}{|\Omega - \omega|} = 6{,}28\,\text{с}$$

12. Другими словами, будет иметь место процесс биений, т.е. гармонических колебаний с периодом $T = 2\pi/\Omega$, амплитуда которых изменяется по закону синуса с малой циклической частотой, определяемой уравнением (12). Вынужденные колебания протекают с периодом $T = 2\pi/\Omega$ = 0,1 с.



13. Вычислим величину a(t)

$$a(t) = \frac{78}{58 \cdot 2} \sin 1t = -0{,}67 \sin 1t\,.$$

14. Уравнение a(t), описывающее движение исследуемой установки можно в окончательном виде записать следующим образом

$$x = -0{,}67 \sin 1t \cos 60t\,.$$

---

183. К пружине жёсткостью k = 10 Н/м подвешено тело массой m = 0,1 кг. Тело совершает вынужденные колебания в среде, обладающей сопротивлением $r = 2\cdot 10^{-2}$ кг/с. Найти коэффициент затухания δ и величину амплитуды резонансных колебаний, если амплитуда возмущающей силы F_0 = 0,01 Н.

Решение

1. На тело действуют три силы: сила тяжести, сила сопротивления , сила упругости и возбуждающая сила. Уравнение второго закона Ньютона в данном случае содержит необходимые для решения постоянные коэффициенты

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \sin \Omega t\,,$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \Omega t\,,$$

где $\delta = r/2m = 0{,}1\,\text{с}^{-1}$ – коэффициент затухания; $\omega_0^2 = k/m = 100\,\text{с}^{-2}$ – квадрат собственной циклической частоты, $f_0 = F_0/m = 0{,}1\,\text{м}\cdot\text{с}^2$.

2. Оценим влияние силы сопротивления на изменение частоты колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{100 - 0{,}01} \cong 10\,\text{с}^{-1}.$$

3. Найдём амплитуду вынужденных колебаний

$$A = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} = \frac{0{,}1}{\sqrt{4 \cdot 10^{-2} \cdot 100}} \cong 5 \cdot 10^{-2}\,\text{м}\,.$$

---

6. Упругие волны

183. При каких условиях могут возникать упругие волны?

Решение

1. Существование упругих волн, по большому счёту, предрекается уравнениями законов Ньютона, в частности, основным уравнением динамики:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i = \frac{d(m\vec{v})}{dt}.$$

2. Если к торцу длинного тонкого стержня приложить в течение короткого промежутка времени силу, то торцевой слой приобретёт импульс, под действием которого он сожмётся, т.е. деформируется. Упругие силы передадут движение следующему слою стержня. Упругие силы, возникшие во втором слое, остановят движение торцевого слоя, но передадут импульс следующему слою.

3. Таким образом, движение и деформация будут распространяться вдоль стержня, т.е. по стержню побежит упругая волна, которая будет распространять исходное возмущение по длине стержня практически без изменений. Естественно, что со временем в результате внутреннего трения импульс затухнет. Ударяя по стержню периодически, можно добиться присутствия в стержне стабильных во времени разряжений и сжатий его структуры.

4. Для возникновения упругого волнового движения необходимы два безусловных условия:

- во-первых, в среде должен быть источник, как правило, это тот или иной колебательный процесс.
- во-вторых, источник колебаний должен располагаться в среде, отдельные части которой упруго связаны между собой.

5. Подобные рассуждения, проведенные с механических позиций, можно распространить и на тепловые явления. Торец стержня можно подвергнуть «тепловому удару», сообщая кратковременный тепловой импульс, который поведёт себя не так как механический импульс. Градиент температуры концевого слоя со временем расплывётся по длине стержня, не обнаруживая признаки волнового движения. Дело в том, что передача тепла подчиняется совсем другим законам, отличным от передачи механического движения.

6. При распространении волнового движения в среде протекают два различных явления: движение отдельных частиц среды и перемещение самой упругой волны по среде. Первое явление относится к обычному механическому перемещению отдельных микрообъёмов среды, которые моделируются материальными точками. Второе явление представляется как движение возмущённого состояния среды от одной группы частиц к другой.

7. Величина смещения и скорость частиц определяются параметрами колебательного процесса. Так, например, в звуковой волне смещения и скорости зависят от громкости звука. Частицы следы приобретают движение только в момент прохождения волны, после прохождения возмущения они возвращаются в своё равновесное состояние, в то время как упругая волна распространяется дальше, вовлекая в колебательное движение всё новые объёмы среды.

8. Скорости упругих волн относительно велики, в воздухе при нормальных условиях $c \cong 340$ м/с, в воде – $c \cong 1500$ м/с, в стали – $c \cong 5000$ м/с. Скорость распространения звуковых волн, практически, не зависит от параметров источника колебаний, а определяется только физическими характеристиками самой среды: чем больше упругость среды, тем значительнее силы, возникающие при деформации, и тем быстрее передаётся возмущение от частицы к частице – тем большее значение имеет скорость звука. На скорость распространения оказывает влияние и плотность среды, чем выше плотность, тем среда более «инертна», частицы «медленнее» приобретают скорость, о чём недвусмысленно намекает уравнение второго закона Ньютона.

9. Скорость звука величина конечная, определяемая упругими свойствами и плотностью среды, другие характеристики оказывают не существенное влияние.

---

184. Каковы механизмы образования и распространения упругих волн?

Решение

1. Как следует из предварительных замечаний, волнами, можно считать процессы распространения в пространстве любых изменений состояния материи в форме вещества или поля, не связанных с переносом среды.

2. Отличие упругих волн, обусловленных механическими колебаниями, от всех прочих видов движения состоит в том, что **при волновом процессе не происходит переноса вещества из одного мета в другое, а переносится лишь форма возмущённой среды** – гребни и впадины поперечной волны или сгущения и разряжения продольной волны.

3. Всякое колеблющееся тело (камертон, струна, мембрана, диффузор динамика и т.д.), при условии его нахождения в упругой среде, обозначает своё присутствие излучением упругих волн.

4. Периодические деформации среды, возникающие в окрестности колеблющихся тел, распространяются в окрестностях, при этом упругие силы, действующие между отдельными частичками среды, стремятся их вернуть в невозмущённое состояние статического равновесия. Частицы же среды при распространении колебаний колеблются около этого положения. От одних участков среды к другим передаётся только состояние деформации, т.е. форма возмущённой среды.

5. Процесс распространения колебаний за пределы положения источника называется волновым процессом или попросту – волной. В зависимости от характера упругих деформаций волновые процессы принято делить на продольные и поперечные волны (рис.184.1).

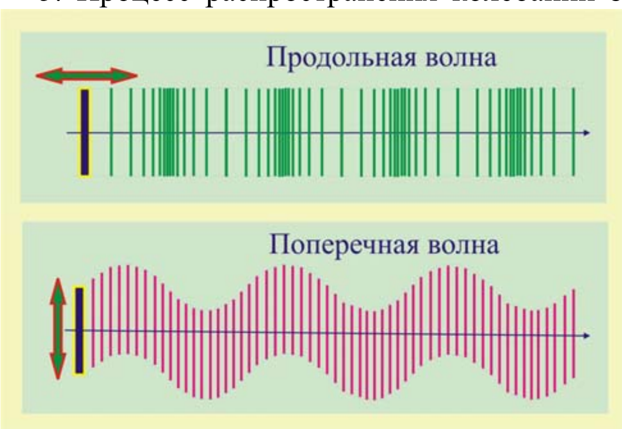


Рис. 184.1. Продольные и поперечные волны

6. Если колебания частиц среды происходят в направлении распространения волны, то эта волна называется продольной. Если же перемещение происходит в направлении

перпендикулярном вектору скорости волнового движения, то волна полагается поперечной.

7. Поперечные волны, по обыкновению, возникают в средах, обладающих сопротивлением сдвигу. Их образование связано с тем, что различные частицы среды начинают колебаться в разное время, поэтому колеблются в разных фазах. Когда одни частицы среды движутся вверх, то другие могут двигаться в это время вниз, среда при этом вынуждена деформироваться, образуя гребни и впадины.

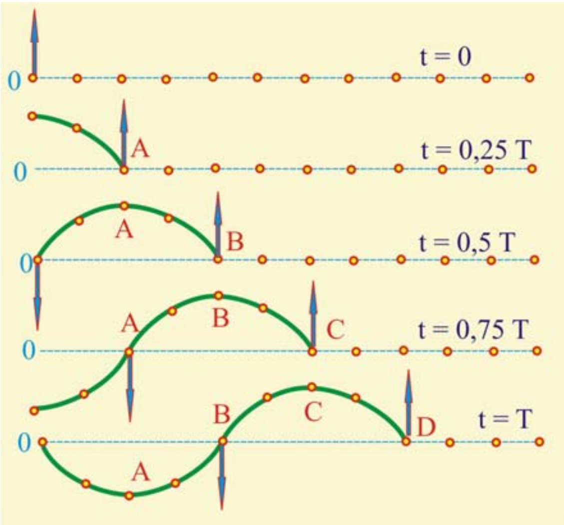


Рис. 184.2. Образование поперечной волны

8. Примером поперечной волны может служить волна, возникающая в длинном упругом шнуре, один конец которого соединён с колеблющимся вертикально телом, а второй на значительном удалении закреплён неподвижно. В начальный момент времени (t = 0) все частицы шнура неподвижны (рис. 184.2), т.е. находятся в равновесии, а конец шнура (точка О) в этот момент получает ускорение, направленное вверх и благодаря наличию связи, увлекает за собой соседние частицы шнура. Через четверть периода, частица находящаяся ранее в точке О, достигает максимального отклонения. Частица А, отстоящая от начала отсчёта на расстоянии $x_A = c\cdot(T/4)$ получит ускорение, тоже направленное вверх. В момент времени $t = T/2$ первая частица вернётся в положение равновесия, имея, при этом, ускорение, направленное вниз, частица А достигнет максимального смещения вверх, а частица В, отстоящая от О на расстояние $x_B = c\cdot(T/2)$, начнёт движение вверх. По истечение времени $t = 3T/4$ частица О достигнет максимального смещения книзу, частица А пройдёт положение равновесия, частица В переместится в крайнее верхнее положение. Частица С, находящаяся на расстоянии $x_C = c\cdot T$ от исходной точки, приобретает ускорение вверх. В последующие моменты времени процесс повторяется.

9. Продольные волны возникают, например, в упругой пружине, один конец которой закреплён, а второй совершает гармонические колебания. Отдельные участки пружины будут колебаться с различными фазами, что приведёт к возникновению вдоль пружины сжатий и растяжений. Типичным примером продольных волн является распространение звуковых и ультразвуковых волн в воздухе или воде, где по мере распространении волнового движения образуются чередующиеся изменения плотности среды.

10. В реальных средах чаще всего возникают комбинированные волны, анализ которых обнаруживает характерные свойства как продольных, так и поперечных волн.

11. Распространяясь в среде, **упругие волны переносят механическую энергию, которая складывается из кинетической энергии движения частиц волны и потенциальной энергии упругой деформации среды**. В зависимости от частотного диапазона волны делятся на инфразвуковые, звуковые, ультразвуковые и гиперзвуковые волны (табл. 1).

Таблица 1

№	Тип волн	Частотный диапазон
1	Инфразвуковые волны	0 – 20 Гц
2	Звуковой диапазон	20 Гц – 20 кГц
3	Ультразвуковой диапазон	20 кГц – 1 мГц
3	Гиперзвуковой диапазон	1 мГц – 10 гГц

12. Область пространства, в которой колеблются все частицы среды, называется **волновым полем**. Поверхность, во всех точках которой частицы колеблются в одинаковой фазе, называется фронтом волны или волновым фронтом.

13. В однородной изотропной среде, т.е. в среде с одинаковыми физическими свойствами во всех направлениях и в отсутствии препятствий, упругие волны распространяются с постоянной скоростью.

14. Наличие препятствий существенно усложняет картину распространения, механизм взаимодействия волн с препятствиями зависит от соотношения размеров препятствий и длин волн.

15. При рассмотрении процесса образования поперечных волн на примере длинного шнура мы имели дело с, так называемыми **бегущими волнами**, возникающими при отсутствии отражения.

16. Если размеры среды ограничены, как в скрипичной или гитарной струне, то бегущие волны, распространяясь, будут отражаться от закрепленных концов и на длине струны образуется комбинация волн и распространяющихся взад и вперёд, в этом случае говорят о **стоячих волнах**.

17. Как отмечено выше, отдельные осцилляторы (колеблющиеся материальные точки) образующие среду, не перемещаются вместе с волнами. Они колеблются по гармоническому закону вблизи положения своего равновесия. В этом легко убедится, если в середину подходящей лужи, в которой на поверхности плавает мусор, бросить камень (рис.184.3). Возникшая круговая волна, распространится до самых до берегов, а вот плавающие предметы практически останутся на месте. Некоторое непродолжительное время они будут по мере достижения их волны подниматься и опускаться относительно спокойного уровня воды.

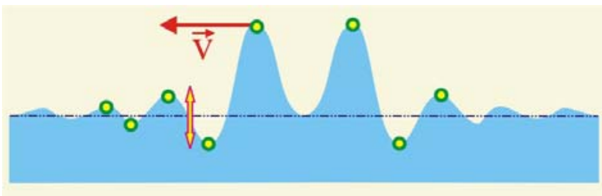


Рис. 184.3. Распространение волны в луже

185. Получить уравнение, описывающее процесс распространения плоской бегущей упругой волны.

Решение

1. Прежде чем приступить к получению уравнения простейшего волнового движения необходимо сделать некоторые замечания о скоростях, фигурирующих в этом процессе, поскольку смысл и содержание этих величин отличаются от принятых в традиционной механике. При рассмотрении волнового движения различают три различных по смыслу и содержанию скорости.

- **Колебательная скорость частиц**. Это скорость, которую приобретают частицы среды, будучи увлечёнными колебательным движением при прохождении волны. По сути это скорость колебаний частиц относительно положения равновесия.

- **Волновая или фазовая скорость**. Это скорость, с которой перемещаются в пространстве поверхности одинаковой фазы, т.е. скорость с которой перемещаются горбы или впадины волн.
- **Групповая скорость**. При сложении нескольких волн с разными длинами (частотами) и скоростями перемещения образуются группы волн (цуги, волновые пакеты). В реальности волны довольно редко наблюдаются в виде отдельных монохроматических компонент. В частности, вспышка белого света имеет сплошной спектр частот, поэтому характеризуется групповой скоростью распространения. Естественно со временем, вследствие разности фазовых скоростей для отдельных компонент в среде, пакет расплывается. Если среда отсутствует, такое имеет место быть для электромагнитных волн, то все частоты распространяются с одинаковыми скоростями. Для монохроматических волн значения фазовой групповой скорости совпадают.

2. Задача исследования волнового движения, как правило, сводится к определению амплитуды и фазы колебательного движения в различных точках среды, а так же изменение этих величин во времени. Задача решаема, если известен закон, по которому колеблется тело, являющееся источником волн, и по каким законам происходит взаимодействие этого тела с окружающей средой.

3. Правда, в ряде случаев информация об источнике волн является несущественной, потому, что вместо параметров колеблющегося тела задаётся расположение волнового фронта или волновой поверхности, а требуется определить состояние колебательного процесса в других точках среды.

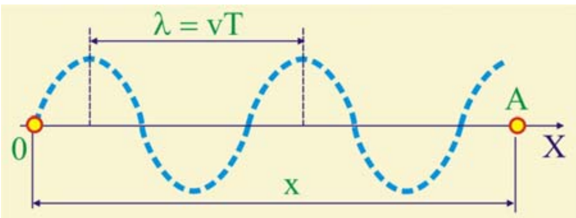


Рис. 185.1. Синусоидальная волна

4. Рассмотрим простейший случай, когда волна распространяется в положительном направлении оси OX, при этом величину, характеризующую колебательные параметры частиц обозначим как y (рис. 185.1). Этой величиной может быть смещение относительно положения равновесия, отклонение давления или плотности среды. Пусть в начальный момент времени при t = 0, y = 0 и начальная фаза φ = 0

$$y = y_0 \sin \omega t ,$$

где $\omega = 2\pi/T$ – циклическая частота, T – период колебаний, y_0 – амплитуда колебаний, ωt – аргумент синуса, определяющий значение колеблющейся величины в каждый момент времени, т.е. ωt – фаза колебаний в точке O.

5. Точки A волновое движение достигнет га время:

$$\tau = \frac{x}{v},$$

фаза колебаний в этой точке определится как:

$$\omega\left(t - \frac{x}{v}\right).$$

6. Совмещая уравнения получим значение колеблющейся величины в точке A для момента времени t

$$y(x,t) = y_0 \sin \omega\left(t - \frac{x}{v}\right),$$

где v – фазовая скорость волны. Если волна распространяется в обратном направлении, то уравнение y(x,t) следует записать следующим образом:

$$y(x,t) = y_0 \sin\omega\left(t + \frac{x}{v}\right).$$

7. Для волны, распространяющейся в обоих направлениях уравнение примет вид:

$$y(x,t) = y_0 \sin\omega\left(t \pm \frac{x}{v}\right).$$

8. Преобразуем последнее уравнение к виду:

$$y(x,t) = y_0 \sin\left(\omega t \pm \frac{\omega x}{v}\right).$$

9. Циклическую частоту ω можно выразить через частоту ν, которая измеряется в герцах, или период Т, который измеряется в секундах, т.е.

$$\omega = 2\pi\nu; \quad \omega = 2\pi/T.$$

10. Поскольку изначально было введено предположение о постоянстве амплитуды и фазовой скорости, т.е. волна предполагалась плоской (поверхности равных фаз представляют собой плоскости). Расстояние, пройденное волной в течение периода, называется длиной волны:

$$\lambda = vT = v\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = \frac{v}{\nu}, \quad \Rightarrow \quad v = \nu\lambda + \frac{\lambda}{T}.$$

11. С учётом введённых обозначений уравнение x(y,t) примет вид

$$y(x,t) = y_0 \sin\left(\omega t \pm \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = y_0 \sin\left(2\pi\nu t \pm \frac{2\pi x}{\lambda}\right).$$

12. В последнем уравнении присутствует постоянная для данной волны величина 2π/λ, которая называется **волновым числом**, это векторная величина, модуль которой равен 2π/λ, направлен вектор волнового числа по направлению распространения волны

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{i},$$

где $\vec{i}$ – единичный вектор, направленный по оси ОХ и измеряемый в единицах волнового числа, т.е. в $м^{-1}$.

13. Уравнение плоской бегущей волны, распространяющейся в направлении оси ОХ, окончательно запишется в виде

$$y(x,t) = y_0 \sin(\omega t - kx).$$

На рис. 185.2 представлен геометрический образ плоской бегущей волны, распространяющейся с фазовой скоростью v.

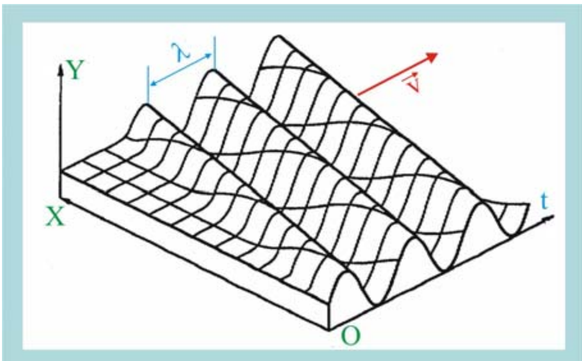


Рис. 185.2. Геометрический образ плоской волны

186. При распространении плоской бегущей упругой волны смещение частиц одновременно является функцией времени и координаты. Возможно, ли эту особенность волнового движения представить одним уравнением?

Решение

1. Колеблющаяся величина, как следует из уравнений для y(x,t) зависит одновременно от двух переменных: координаты x и времени t. Скорость изменения y в функции времени t, при постоянстве x, представится в виде **частной производной:**

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)_{x=\mathrm{const}} = \frac{\partial y}{\partial t}.$$

2. Величина $\partial y/\partial t$ является уравнением скорости частицы в некоторой фиксированной тоске среды. Изменение y вдоль оси x характеризуется тоже частной производной при фиксации момента времени t

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{t=\mathrm{const}} = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

3. Уравнение определяет разность значений колеблющейся величины, отнесённой к некоторому расстоянию, отсчитываемому вдоль направления распространения волны, т.е. показывает, каким образом изменяется величина y вдоль оси OX (в данный момент времени).

4. Используя уравнение волнового движения, определим частные производные рассматриваемой величины *y* вначале по времени:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial y}{\partial t} = y_0\omega\cos\left(t-\frac{x}{v}\right); \\ a &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -y_0\omega^2\sin\omega\left(t-\frac{x}{v}\right) = -\omega^2 y. \end{aligned}\right\}$$

5. В случае, если y является смещением частицы среды из положения равновесия, то u будет представлять собой скорость, измеряемую в м/с, естественно, что a будет ускорением при колебательном движении данной точки среды. Изменение колебательной скорости и ускорения будут периодическими, причём амплитудные значения составят:

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= y_0\omega; \\ a_0 &= y_0\omega^2 = u_0\omega. \end{aligned}\right\}$$

6. Продифференцируем далее исходное уравнение по координате x для фиксированного момента времени t

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= y_0\left(-\frac{\omega}{v}\right)\cos\left(t-\frac{x}{v}\right); \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= -y_0\frac{\omega^2}{v^2}\sin\left(t-\frac{x}{v}\right) = -\frac{\omega^2 y}{v^2}. \end{aligned}\right\}$$

7. Оценим размерности вторых производных

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right] &= \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; \\ \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] &= \frac{\text{м}\cdot\text{с}^2}{\text{с}^2\cdot\text{м}^2} = \frac{1}{\text{м}}. \end{aligned}\right\}$$

8. Сравнивая размерности вторых производных, можно видеть, что они отличаются на $\text{м}^2/\text{с}^2$, т.е. на квадрат фазовой скорости, что даёт основание записать

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

9. Это есть **волновое уравнение,** решение которого определяет взаимосвязь смещения частиц среды в функции времени и координаты для случая одномерной плоской бегущей волны.

10. Рассмотрим упругую волну, распространяющуюся в произвольном направлении так, что вектор скорости волны с осями $\{x,y,z\}$ составляет углы $\{\alpha,\beta,\gamma\}$. Предположим далее, что колебания в плоскости, совмещённой с началом координат (рис. 185.3) имеют вид:

$$\xi_0 = a\cos(\omega t + \alpha),$$

где ξ_0 – смещение частиц среды из состояния равновесия, a – амплитудное значение смещения. Рассмотрим волновую поверхность при её прохождении от начала системы отсчёта на расстоянии *l*. Колебания в этой плоскости, так же как и в предыдущем случае будут запаздывать относительно колебаний, определяемых уравнением $\xi(t)$ на время $\tau = l/v$, т.е. будут удовлетворять уравнению:

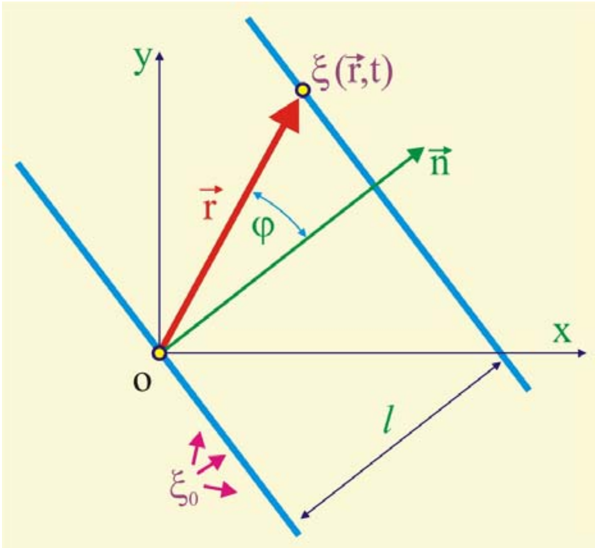


Рис. 185.3. Система координат для волны, распространяющейся в произвольном направлении

$$\xi = a\cos\left[\omega\left(t - \frac{\ell}{v} + \alpha\right)\right].$$

11. Введём в последнее уравнение волновое число с учётом того, что:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{\lambda\nu} = \frac{\omega}{v},$$

$$\xi = a\cos(\omega t - k\ell + \alpha).$$

12. Расстояние *l* можно выразить через радиус вектор $\vec{r}$ и вектор нормали $\vec{n}$

$$\vec{n}\vec{r} = r\cos\alpha = \ell.$$

Подставим значение *l* в уравнение $\xi(x,t)$

$$\xi = a\cos(\omega t - k\vec{n}\vec{r} + \alpha) = a\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha).$$

13. Полученное уравнение соответствует плоской незатухающей волне, распространяющейся в среде в направлении волнового вектора $\vec{k}$. Если волна затухает, то так же как это делалось для затухающих колебаний, уравнение волны необходимо дополнить множителем $\exp(-\beta r)$.

14. Так как вектор $\vec{r}$ определяет равновесное положение рассматриваемой точки среды, то уравнение $\xi(x,t)$ характеризует отклонение от положения равновесия. Для перехода от радиус-вектора к координатам точки $\{x,y,z\}$ представим скалярное произведение векторов $\vec{k}\vec{r}$ в виде проекций на оси декартовой системы координат

$$\vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\alpha x + \frac{2\pi}{\lambda}\cos\beta y + \frac{2\pi}{\lambda}\cos\gamma.$$

15. Уравнение волны с учётом последнего соотношения запишется в виде:

$$\xi(x,y,z;t)=a\cos(\omega t-k_x x-k_y y-r_z z+\alpha).$$

16. Функция ξ(x,y,z;t) позволяет определять отклонение точки среды с координатами {x,y,z} в момент времени t. Волновое уравнение для рассматриваемого случая запишется так:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2},$$

или

$$\Delta\xi=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2},$$

где Δ – оператор Лапласа.

186. Какие характеристики среды определяют скорость распространения упругих волн?

Решение

1. Рассмотрим распространение плоской продольной волны в направлении оси x в изотропной безграничной среде. Мысленно выделим некий цилиндрический объём площадью основания S и высотой Δx (рис. 186). Как следует из уравнения плоской бегущей волны:

$$\xi(x,t)=\xi_0\sin(\omega t-kx),$$

смещение частиц ξ с различными координатами x имеют различные значения, другими словами ξ = f(x).

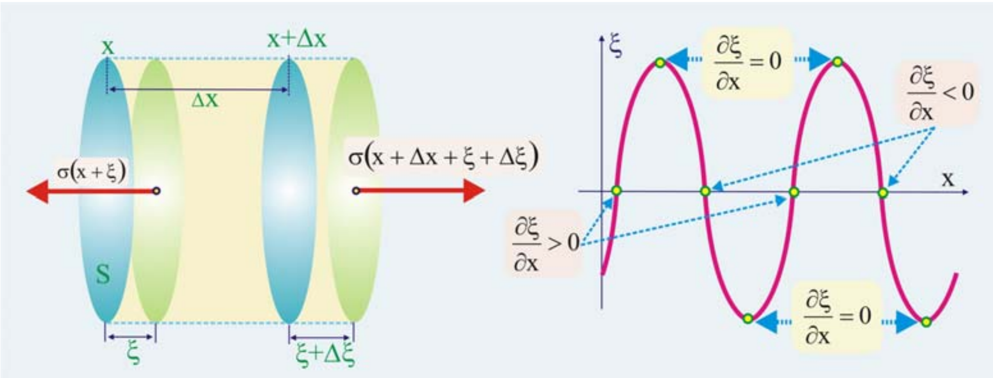


Рис. 186. Определение скорости волн в упругой среде

2. Предположим, что в результате внешнего воздействия среда, заключённая внутри цилиндра деформируется. При перемещении основания цилиндра с координатой x на величину ξ, основание с координатой (x + Δx) сместится на величину (ξ + Δξ), т.е. рассматриваемый объём получает удлинение Δξ. Среднюю деформацию цилиндра можно представить в виде безразмерной величины

$$<\varepsilon>=\frac{\Delta\xi}{\Delta x}.$$

3. Чтобы получить деформацию ε в некотором сечении x необходимо рассмотреть предел отношения

$$\varepsilon=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\xi}{\Delta x}=\frac{\partial\xi}{\partial x}.$$

4. Появление деформации растяжения или сжатия объёма среды свидетельствует о наличии нормального напряжения σ

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\partial\xi}{\partial x},$$

где E – модуль Юнга данной среды. Величина напряжения зависит от координаты x (правая часть рис. 186). При значениях x, соответствующих максимальному отклонению частиц от положения равновесия деформация и напряжение равны нулю. В местах, где частицы проходят положение равновесия деформация и напряжение достигают максимума, при этом положительные и отрицательные деформации чередуются, что соответствует растяжению или сжатию среды, таким образом, по длине цилиндра устанавливаются чередующиеся разряжения и сгущения.

5. Найдём уравнение движения цилиндрического объёма, для чего запишем ускорение точек цилиндра в виде второй производной смещения по времени

$$a_x = \frac{d^2\xi}{dt^2}.$$

6. Масса вещества заключённого в выделенном цилиндрическом объёме определится через плотность ρ недеформированной среды

$$m = \rho S\Delta x.$$

7. Проекция силы, действующей на основание цилиндра равна произведению его площади на разность нормальных напряжений в сечениях (x + Δx + ξ) и (x + ξ)

$$F_x = SE\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_{x+\Delta x+\xi+\Delta\xi} - \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_{x+\xi}\right].$$

8. Значение производной $\partial\xi/\partial x$ в сечении $x+\delta$ при малости δ можно представить в виде

$$F_x = SE\left\{\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_x + \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}(\Delta x + \xi + \Delta\xi)\right] - \left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_x + \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\xi\right]\right\},$$

или

$$F_x = SE\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}(\Delta x + \Delta\xi) \approx SE\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\Delta x.$$

9. Ввиду того, что относительное удлинение $\partial\xi/\partial x$ при упругих деформациях всегда на много меньше единицы, значит $\Delta\xi \ll \Delta x$, следовательно, слагаемыми $\Delta\xi$ при суммировании можно пренебречь, что позволяет уравнение силы переписать в виде

$$F_x = ma_x; \quad \Rightarrow \quad \rho S\Delta x\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = SE\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\Delta x.$$

10. Проведя сокращения в последнем уравнении, получим

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}.$$

11. Полученное уравнение представляет собой частный случай волнового уравнения записанного для случая независимости ξ от координат y и z, кроме того, что в данном случае фазовая скорость представляется как:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

12. Фазовую скорость упругой продольной волны можно получить исходя из анализа механических величин. Представим, что в среде расположен реальный бесконечно длинный (длина на много больше длины волны) цилиндр с непроницаемыми стенками. В цилиндр вставлен невесомый подвижный поршень с площадью основания S. В начальный момент времени $t = t_0$ поршень начинает двигаться внутрь сосуда, где присутствует следа с плотностью ρ, со скоростью v_1, приводя среду внутри цилиндра в деформированное состояние. За малый промежуток времени Δt деформация распространится на расстояние vΔt. Масса деформированного участка составит:

$$\Delta m = \rho S v \Delta t,$$

13. Изменение импульса, пришедшей в движение среды (газа или жидкости) запишется так

$$\Delta P = \frac{1}{2}\Delta m v_1 .$$

14. Изменение импульса в соответствии со вторым законом Ньютона можно представить как изменение импульса среднего значения, действующей на среду

$$\Delta P = < F > \Delta t .$$

15. Приравняем два последних уравнения

$$\frac{1}{2}\Delta m v_1 = < F > \Delta t, \quad \frac{1}{2}\rho S v v_1 = < F >,$$

16. Средняя сила, отнесённая к площади поршня, равна давлению р, т.е.

$$< F > = \frac{1}{2}\Delta p S .$$

17. Абсолютное значение давление в соответствии с законом Гука можно выразить через модуль объёмной упругости K и изменение объёма ΔV

$$\Delta p = -K\left(\Delta V / V\right),$$

знак минус показывает, что при сжатии среды, давление повышается, а при расширении понижается. Объём среды, подвергшейся деформированию в данном случае равен

$$V = v S \Delta t ,$$

в то время как, объёмная деформация составляет

$$\Delta V = -v_1 S \Delta t ,$$

поскольку за промежуток времени от t_0 до $(t_0 + \Delta t)$ частицы среды, прилегающие к поршню, сместятся на расстояние $v_1 \Delta t$. С учётом этих обстоятельств избыточное давление, возникающее при перемещении поршня можно представить следующим образом

$$\Delta p = K\frac{v_1 S \Delta t}{v S \Delta t} = K\frac{v_1}{v} .$$

18. Средняя сила, с учётом полученных соотношений, запишется в виде

$$< F > = \frac{1}{2} K S \frac{v_1}{v} .$$

Подставим полученное уравнение силы в уравнение <F>:

$$\frac{1}{2} K S \frac{v_1}{v} = \frac{1}{2}\rho S v v_1, \quad \frac{K}{v} = \rho v, \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{K}{\rho}} .$$

19. Как видно, полученное уравнение фазовой (волновой) скорости продольных волн совпадает с ранее записанным уравнением,

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

а модуль объёмной упругости является, по сути, модулем Юнга.

20. Проводя подобные рассуждения, можно показать, что скорость поперечных волн в изотропных средах равна

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

где G – модуль сдвига среды. Полученные уравнения для фазовой скорости показывают, что её величина **определяется физическими характеристиками среды**.

21. Покажем это на примере идеального газа, находящегося в нормальных условиях ($p_0 \cong 10^5$ Па, $T_0 \cong 273$ К) или близких к ним. Состояние идеального газа определяется уравнением Клапейрона – Менделеева

$$pV = \frac{m}{\mu}RT,$$

где μ – молярная масса газа, R – универсальная газовая постоянная, T – абсолютная температура. Введём в уравнение состояния плотность газа

$$p = \frac{m}{V}\frac{RT}{\mu} = \frac{\rho RT}{\mu},$$

откуда

$$\rho = \frac{p\mu}{RT}.$$

22. Плотность газа при постоянстве его химического состава и температуры зависит от давления, причём эта зависимость определяется способом перехода газа из одного состояния в другое. Обсудим это более подробно. Для начала запишем уравнение давления для бесконечно малого изменения объёма, подвергнутого деформации:

$$dp = -K\frac{dV}{V}, \quad \Rightarrow \quad K = -V\frac{dp}{dV}.$$

Значение производной dp/dV зависит от процессов протекающих в газе при изменении состояния.

23. Применительно к волновым процессам возможны два предельных варианта. Первый вариант наблюдается при относительно медленном процессе деформации, на низких частотах, а второй при быстропротекающих процессах, что соответствует высокочастотным изменениям параметров колебательной системы, являющейся источником волнового движения.

24. **На низких частотах процесс изменения состояния можно представить как изотермический,** т.е. протекающий без изменения температуры, он интерпретируется математически законом Бойля – Мариотта:

$$pV = \text{const}.$$

25. Продифференцируем уравнение с учётом того, что в изотермическом процессе изменяется как давление, так и объём:

$$dp \cdot V = p \cdot dV = 0.$$

26. Перепишем последнее уравнение следующим образом:

$$\left(\frac{dp}{dV}\right)_{T=\text{const}} = -\frac{p}{V}.$$

27. Подставим последнее соотношение в уравнение объёмной упругости:

$$K_{T=const} = p,$$

а полученное значение давления совместим с зависимостью для плотности:

$$\rho = \frac{K_{T=const}\mu}{RT}, \quad \Rightarrow \quad K_{T=const} = \frac{\rho RT}{\mu}.$$

28. Перепишем уравнение фазовой скорости с учётом найденного значения коэффициента объёмной упругости при изотермическом процессе

$$v_{(T)} = \sqrt{\frac{RT}{\mu}}.$$

28. Распространение в среде высокочастотных колебаний соответствует адиабатическому процессу, т.е. отсутствием теплообмена между отдельными микрообъёмами среды и внешними термодинамическими системами. Адиабатический закон изменения состояния идеального газа описывается как:

$$pV^{\gamma} = const,$$

где γ – коэффициент Пуассона (показатель адиабаты) для данного газа, определяемый как отношение молярных или удельных теплоёмкостей $\gamma = C_p/C_V$. Как и в предыдущем случае, продифференцируем уравнение:

$$dpV^{\gamma} + \gamma pV^{\gamma-1}dV = 0,$$

или

$$\left(\frac{dp}{dV}\right)_{\delta Q=0} = -\frac{\gamma p}{V}, \quad \Rightarrow \quad K_{\delta Q=0} = \gamma p.$$

29. Подставляя далее значение коэффициента объёмной упругости в отсутствие теплообмена в уравнение для ρ, получим:

$$\rho = \frac{K_{\delta Q=0}\mu}{\gamma RT}, \quad \Rightarrow \quad K_{\delta Q=0} = \frac{\gamma\rho RT}{\mu}.$$

30. Уравнение фазовой скорости для этого случая представится следующим образом

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}.$$

31. Каким же из полученных уравнений нужно пользоваться при определении, например, скорости упругих волн акустического диапазона в воздухе? Подставим в уравнение фазовой скорости следующие данные: $R \cong 8{,}3$ Дж/(Моль·К); $T \cong 293$ К ($20\ ^0$С); $\mu \cong 3\cdot 10^{-2}$ кг/моль (т.е. параметры воздуха при нормальных условиях)

$$v\big|_{T=const} \cong \sqrt{\frac{8{,}3\cdot 293}{3\cdot 10^{-2}}} \cong 285\,\frac{м}{с}.$$

Далее воспользуемся уравнением адиабатического процесса при $\gamma \cong 1{,}4$:

$$v\big|_{\delta Q=0} \cong \sqrt{\frac{1{,}4\cdot 8{,}3\cdot 293}{3\cdot 10^{-2}}} \cong 337\,\frac{м}{с}.$$

32. Поскольку измеренное значение скорости звука в воздухе v = 340 м/с, то очевидно, что механизм **изменения состояния воздуха ближе к адиабатическому процессу.**

187. При распространении упругой волны переноса мысы вещества в пространстве не происходит, каким образом, в таком случае осуществляется перенос энергии волной?

Решение


Рис. 187.1. Леонардо да Винчи

1. Над тем, что такое волны люди начали задумываться давно. Ещё в XV в. гениальный Леонардо да Винчи в своих дневника писал о своих наблюдений о волнах: *«Импульс гораздо быстрее воды, потому, что многочисленны случаи, когда волна бежит от места своего возникновения, а вода не двигается с места, – наподобие волн, образующихся в мае на нивах течением ветров; волны кажутся бегущими по полю, между тем нивы со своего места не сходят»*.

2. Современный мир полон волн, очевидно, этот тип движения один из самых распространённых в природе. Достаточно вспомнить, что подавляющее большинство живых существ, включая и царя природы, типа, использует каналы информации, основанные на восприятии и обработке именно волновых процессов.

3. Наши органы слуха используют упругие волны акустического диапазона. В полосе частот 20 Гц – 20 кГц мы говорим, подслушиваем и даже, поём. Посредством восприятия электромагнитных волн оптического диапазона в полосе частот $3\cdot10^{14}$ – $3\cdot10^{15}$ Гц мы видим окружающую нас действительность. А уж современная действительность с телевизорами, навигаторами, мобильными телефонами и прочими атрибутами сегодняшнего времени, буквально повязана человека с волновыми процессами самого разного свойства.

4. Как только человек начал размышлять о вонах, он сразу обратил внимание, что волновые процессы имеют ярко выраженное энергетическое содержание. Сейсмические волны и цунами, приносящие разрушения, прозрачно намекали, – волны несут энергию, причём немалую. Но даже те из людей, которых минули сейсмические стихии, не могли не обратить внимания на то, что ветровые волны на поверхности водных пространств способны совершать работу, в большинстве своём, негативную, в виде разрушения плавучих и береговых творений рук человеческих.

5. Что солнце даёт, по сути, землянам жизнь выяснилось в незапамятные времена. Солнце на протяжении длительного времени, по сравнению с которым современные религии могут считать себя эмбрионами, даже полагалось Богом, что было, на наш взгляд, более логично, чем боги, придуманные потом. Электромагнитные волны света и тепла, приходящие на Землю от Солнца обладают мощностью примерно 1 кВт/м^2. Современные преобразователи могут трансформировать около 10% энергии в электричество. Солнечная энергия преобразуется растениями в химическую энергию, которая затем при сжигании угля и нефти занимает достойное место в энергетическом обеспечении цивилизации. В пище, которая поддерживает жизнь человека и животных, несомненно, есть составляющая энергии электромагнитных волн. Во всех приведенных примерах общим является факт переноса волнами энергии, хотя мощность различных типов волн существенно различна.

6. Ветровые волны способны передвигать камни массой в несколько тонн, акустические же волны, излучаемые человеческим голосом, переносят относительно мизерную энергию. Если все болельщики английского стадиона Уэмбли, будут во всю мощь своих голосовых связок сотрясать воздух все девяносто минут футбольного матча, то суммарной энергии не хватит для увеличения температуры чашки кофе на несколько градусов.

7. Так же как и всякое движущееся вещество, волновое движение обладает импульсом, хотя импульс волн не так очевиден, как их энергия. При рассмотрении энергетических характеристик волнового движения следует иметь в виду, что скорость его распространения конечна. Световые волны движутся со скоростью $3\cdot 10^8$ м/с, упругие волны имеют меньшую скорость.

8. Энергия, импульс и скорость являются важными характеристиками волнового движения, однако есть ещё одно свойство, которое имеет принципиальное значение – это **линейность волн**.

9. Если в воду бросить одновременно два камешка, то образованные ими круговые волны станут распространяться, как бы, не замечая друг друга. Одна группа волн без изменений проходит через другую, совокупность таких волн представляет собой суммарный эффект.

10. Получим некоторые количественные характеристики энергетического содержания волнового движения. Определим изменение энергии малого объёма упругой среды dV, связанное с изменениями, вносимыми распространяющейся плоской волной. Обозначим, как и ранее, смещение частиц через ξ. Если исследуемый объём выбрать достаточно малым, то можно принять, что все частицы, входящие в состав этого объёма колеблются синфазно с одинаковыми скоростями

$$v_1 = \frac{d\xi}{dt}.$$

11. Кинетическая энергия рассматриваемого микрообъёма может быть представлена в виде

$$dK = \frac{dmv_1^2}{2} = \frac{\rho v_1^2 dV}{2}.$$

12. Запишем уравнение волны, распространяющейся вдоль оси OX в виде

$$\xi = a\sin(\omega t - kx + \alpha),$$

откуда

$$v_1 = \frac{d\xi}{dt} = a\omega\cos(\omega t - kx + \alpha).$$

13. Подставим значение скорости в уравнение кинетической энергии

$$dK = \frac{1}{2}\rho a^2\omega^2 dV\cos^2(\omega t - kx + \alpha).$$

14. Упругие свойства среды предполагают наличие и потенциальной составляющей энергии, причём если рассматриваемую систему считать консервативной, что не далеко от истины, то справедлив закон сохранения энергии, т.е.

$$d\Pi = dK = \frac{1}{2}\rho a^2\omega^2 dV\cos^2(\omega t - kx + \alpha),$$

или

$$dW = dK + d\Pi = \rho a^2\omega^2 dV\cos^2(\omega t - kx + \alpha).$$

15. Если последнее уравнение поделить на dV, то получится энергия, отнесённая к объёму, в котором она проявляется, т.е. **объёмная плотность энергии волнового движения** ϖ

$$\varpi = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{dW}{dV} .$$

16. Таким образом, для объёмной плотности энергии волнового движения можно записать следующее уравнение:

$$\varpi = \rho a^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kx + \alpha).$$

17. Объёмная плотность энергии пропорциональная квадрату амплитуды и квадрату циклической частоты изменяется во времени по периодическому закону. Ели раскрыть квадрат косинуса, то получим

$$\varpi = \rho \frac{a^2 \omega^2}{2} \left[1 + \cos 2(\omega t - kx + \alpha)\right].$$

18. Определим далее скорость распространения энергии u, т.е. скорости распространения поверхности, соответствующей максимальному значению плотности энергии. Определим уравнение поверхности вида $\varpi = \varpi_{max}$, что соответствует условию равенства нулю аргумента косинуса в уравнении ϖ

$$2(\omega t - kx + \alpha) = 0 .$$

19. Скорость перемещения такой поверхности вдоль оси OX запишем в виде производной

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = v .$$

20. Из полученного уравнения следует, **что для плоской синусоидальной волны распространение энергии происходит со скоростью совпадающей с фазовой скоростью.**

21. Поскольку процесс переноса энергии характеризуется периодичностью, то целесообразно ввести энергетическую характеристику, учитывающую временной фактор. Такой величиной является **поток энергии Φ_W**, который представляется в виде энергии, проходящей через единичную площадку в единицу времени

$$\Phi_W = \frac{dW}{dt}.$$

22. Предположим, что поверхность S, через которую определяется поток энергии, расположена перпендикулярно направлению распространения. За время dt через такую единичную площадку будет перенесена энергия, содержащаяся в слое среды толщиной

$$d\ell = u dt ,$$

следовательно

$$dW = \varpi \cdot S \cdot u \cdot dt ,$$

что позволяет уравнение потока представить следующим образом:

$$\Phi_W = \varpi \cdot S \cdot u .$$

23. В общем случае форма поверхности, через которую рассматривается поток энергии, может иметь любую форму, ориентированную к направлению распространения волны произвольным образом. В этом случае величина потока через отдельные участки поверхности будет не одинаковой. На интуитивном уровне это свойство потока используется нами часто. Например, всем известно, что на восходе и закате Солнца загорать лучше стоя, а в районе полудня, – располагая тело горизонтально. Чтобы охарактеризовать это обстоятельство коли-

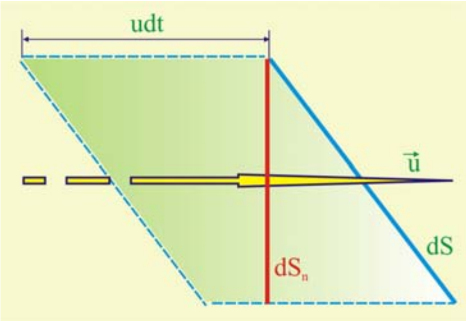


Рис. 187.2. Плотность потока энергии

чественно, в рассмотрение ввели новую величину U, **плотность потока волновой энергии,** которая учитывает взаимное расположения направления распространения волны и ориентацию рассматриваемой поверхности (рис. 187.2)

$$U = \frac{d\Phi_W}{dS_n},$$

За время dt через площадку dS будет переносится энергия, заключённая в затемнённом косом цилиндре, объём которого составит

$$dV = u \cdot dt \cdot dS_n,$$

при этом поток определится как

$$d\Phi_{\varpi} = \varpi \cdot u \cdot dS_n,$$

следовательно,

$$U = \varpi u, \quad \vec{U} = \varpi\vec{u}.$$

Вектор плотности потока энергии волнового движения для упругих волн был впервые введён в практику в 1874 г. отечественным учёным Умовым Н.А., впоследствии его стали называть вектором Умова.

---

188. Волны на глубокой воде в океане достигают длин порядка λ = 300 м, Период таких волн составляет T = 13,5 с. Какова скорость распространения таких волн?

Решение

1. Расстояние, пройденное волной в течение периода, называется длиной волны λ:

$$\lambda = vT; \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\lambda}{T} = 22{,}2\frac{м}{с} \equiv 80\frac{км}{ч};$$

---

189. Определить расстояние между двумя соседними точками, находящимися в одинаковых фазах, если волны распространяются со скоростью v = 330 м/с, частота колебаний равна ν = 256 Гц.

Решение

1. Расстояние между синфазно колеблющимися точками среды равно длине волны λ

$$\lambda\nu = v; \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{v}{\nu} \approx 1{,}29 м;$$

---

190. Лодка раскачивается на волнах, распространяющихся со скоростью v = 1,5 м/с. Расстояние между двумя ближайшими друг к другу гребнями λ = 6 м. Определить период колебаний лодки.

Решение

$$\lambda = vT; \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\lambda}{v} = 4с; \quad \nu = 0{,}25 Гц;$$

---

191. Волны распространяются вдоль резинового шнура со скоростью v = 3 м/с при частоте колебаний ν = 2 Гц. Определить разность фаз у точек, отстоящих друг от друга на расстоянии ℓ = 75 см.

Решение

1. Длина волны:

$$v = \lambda\nu; \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{v}{\nu} = 1{,}5\text{м};$$

2. При распространении волны на расстояние λ в течение периода фаза колебаний изменяется на величину 2π, следовательно, заданное расстояние ℓ соответствует изменению фаза на величину π, которое соответствует отрезку времени $\tau = T/2$.

---

192. Скорость звука в воде v= 1450 м/с. На каком ближайшем расстоянии друг от друга находятся точки, колеблющиеся противофазно при частоте колебаний ν = 725 Гц?

Решение

1. Длина волны:

$$v = \lambda\nu; \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{v}{\nu} = 2\text{м};$$

2. Разность фаз $\Delta\varphi = \pi$ будет наблюдаться для точек, расположенных на расстоянии друг от друга

$$\ell = \lambda/2 = 1 \text{ м};$$

---

193. Волна распространяется со скоростью v = 360 м/с при частоте ν = 450 Гц. Чему равна разность фаз двух точек волны, отстоящих друг от друга на расстоянии ℓ = 20 см.

Решение

1. Длина волны:

$$v = \lambda\nu; \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{v}{\nu} = 0{,}8\text{м};$$

2. Разность фаз $\Delta\varphi$ между двумя точками расположенными в области распространения плоской бегущей волны должна удовлетворять условию:

$$2\pi\ell = \lambda\Delta\varphi; \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi\frac{2\pi\ell}{\lambda} = \frac{\pi}{2};$$

---

194. Волна распространяется со скоростью v = 2,4 м/с при частоте колебаний ν = 3 Гц. На каком расстоянии находятся точки, разность фаз колебаний между которыми $\Delta\varphi = \pi/2$?

Решение

$$v = \lambda\nu; \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{v}{\nu}; \quad 2\pi\ell = \lambda\Delta\varphi; \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{\lambda\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{v\pi}{2\nu 2\pi} = \frac{v}{4\nu} = 0{,}2\text{м};$$

---

195. Определить частоту акустических колебаний в стали, если расстояние между ближайшими точками волны, отличающимися по фазе на $\Delta\varphi = \pi/2$ равно ℓ = 1,54 м. Скорость звука в стали v = 5000 м/с,

Решение

1. Разность фаз $\Delta\varphi = \pi/2$ соответствует расстоянию:

$$2\pi\ell = \lambda\Delta\varphi; \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{\lambda\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\lambda}{4}; \quad \Rightarrow \quad \lambda = 4\ell;$$

2. Частота звуковых колебаний:

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{4\ell} \approx 812\text{Гц};$$

---

196. На поверхности воды распространяется волна со скоростью v = 2,4 м/с при частоте колебаний ν = 2 Гц. Какая разность фаз между точками, лежащими на одном луче и отстоящих друг от друга на расстоянии: x_1 = 10 см; x_2 = 60 см; x_3 = 120 см; x_3 = 140 см?

Решение

$$2\pi x = \lambda\Delta\varphi; \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi = \frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{2\pi\nu x}{v};$$

$$\Delta\varphi_1 = \frac{2\pi\nu x_1}{\lambda} = \frac{2\pi\cdot 2\cdot 0{,}1}{2{,}4} \approx 0{,}667\pi \approx \frac{\pi}{6};$$

$$\Delta\varphi_2 = \frac{2\pi\nu x_2}{\lambda} = \frac{2\pi\cdot 2\cdot 0{,}6}{2{,}4} \approx 1{,}5\pi \approx 3\frac{\pi}{2};$$

$$\Delta\varphi_3 = \frac{2\pi\nu x_3}{\lambda} = \frac{2\pi\cdot 2\cdot 1{,}2}{2{,}4} \approx 2\pi;$$

$$\Delta\varphi_4 = \frac{2\pi\nu x_4}{\lambda} = \frac{2\pi\cdot 2\cdot 1{,}4}{2{,}4} \approx 2{,}33\pi;$$

---

197. Плоская бегущая волна распространяется вдоль прямой со скоростью v = 20 м/с. Две точки, находящиеся на этой прямой на расстояниях x_1 = 12 м и x_2 = 15 м от источника волн, колеблются с разностью фаз $\Delta\varphi = 0{,}75\pi$ рад. Амплитуда колебаний источника волн ξ_0 = 0,1 м. Определить, в какой момент времени τ после начала процесса распространения волн дальняя от источника точка будет иметь смещение ξ_2 = 7,1 см. Каково смещение ближайшей к источнику тоски в этот момент времени?

Решение

1. Уравнение плоской бегущей волны:

$$\xi(x,t) = \xi_0\cos(\omega t - kx) = \xi_0\cos\left(2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right);$$

2. Длина волны:

$$2\pi(x_2 - x_1) = \Delta\varphi\lambda; \quad 2\pi\Delta x = 0{,}75\pi\lambda; \quad \lambda = \frac{2\pi\Delta x}{0{,}75\pi} = 8\text{м};$$

3. Частота колебаний:

$$\nu = \frac{v}{\lambda} \approx 2{,}5\text{Гц};$$

4. Волновое число:

$$k = 2\pi/\lambda = 0{,}785\text{м}^{-1};$$

5. Время, соответствующее смещению дальней точки на ξ_1:

$$\frac{\xi_1}{\xi_0} = \cos\left(2\pi\nu\tau - \frac{2\pi x}{\lambda}\right); \quad 2\pi\left(\nu\tau - \frac{x}{\lambda}\right) = \arccos\frac{\xi_1}{\xi_0} = \frac{\pi}{4};$$

$$\nu\tau - \frac{x}{\lambda} = \frac{1}{8}; \quad \tau \approx \frac{1}{2,5}\left(\frac{1}{8} + 1,785\right) \approx \frac{2}{2,5} \approx 0,8c;$$

6. Смещение в ближней к источнику точке в момент времени τ:

$$\xi_2 = \xi_0\cos\left(2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) = 0,1\cos\left(2\pi \cdot 2,5 \cdot 0,8 - \frac{2\pi}{8}12\right) = 0,1\cos\pi = -0,1м;$$

---

198. Во сколько раз изменится длина звуковой волны при её переходе из воздуха в воду? В воде скорость звука $c_1 \approx 1480$ м/с, в воздухе – $c_2 \approx 340$ м/с.

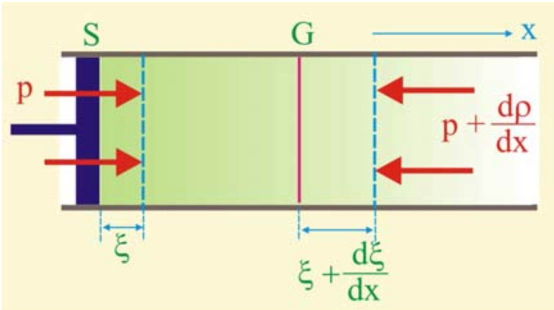


Рис. 198. К выводу волнового уравнения

Решение

1. Звуковые волны должны подчиняться волновому уравнению

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2},$$

где ξ – смещение частиц среды из положения равновесия, c – скорость звука. Применительно к звуку волновое уравнение можно получить на примере распространения сжатия в бесконечно длинной трубе, заполненной воздухом (рис. 198).

2. Ось трубы совпадает с положительным направлением оси *x*. В трубу вставлен поршень площадью S, который вдвинут внутрь трубы на расстояние ξ. Возникшее при этом сжатие распространяется вправо с конечной скоростью, так что частицы воздуха, расположенные в сечении G, расположенном на единичном расстоянии смещаются так же вправо на величину $\xi + \partial\xi/\partial x$.

3. Воздух, заключённый в рассматриваемом единичном объёме трубы претерпевает изменения

$$\frac{dV}{V} = \frac{d\xi}{dx}.$$

4. Если изменение объёма протекает по адиабатической схеме, то:

$$pV^\gamma = const,$$

где p – давление газа, γ – отношение удельных теплоёмкостей при постоянном давлении и объёме. Продифференцируем уравнение адиабаты:

$$\frac{dp}{p} = -\gamma\frac{dV}{V} = -\gamma\frac{d\xi}{dx}.$$

5. Полагая давление газа в невозмущённом состоянии p_0, изменение давления, обусловленное движением поршня можно представить следующим образом

$$p = p_0 - \gamma p_0\frac{d\xi}{dx}.$$

6. Если давление, развиваемое поршнем, равно p, то в соответствии с третьим законом Ньютона, на противоположную поверхность рассматриваемого единичного объёма действует давление $p + (dp/dx)$. По величине разности давлений можно судить о силе, действующей на единичный объём

$$F = -\frac{dp}{dx} = p_0\gamma\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}.$$

7. В соответствии со вторым законом Ньютона сила должна быть равна массе газа в единичном объёме, умноженной на ускорение:

$$p_0\gamma\frac{d^2\xi}{dx^2} = \rho_0\frac{d^2\xi}{dt^2},$$

где ρ_0 – плотность газа. Последнее уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}.$$

8. Введя обозначение

$$\sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = c,$$

придём волновому уравнению, из которого видно, что скорость распространения акустической волны зависит от параметров среды, в которой она распространяется.

9. При переходе волны из одной среды в другую изменяется скорость её распространения, т.е. меняется длина волны, частота остаётся неизменной т.к. она зависит только от свойств источника колебаний:

$$\frac{\lambda_1}{c_1} = \frac{\lambda_2}{c_2}; \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{c_1}{c_2} \approx 4{,}35;$$

---

199. Звуковые колебания с частотой ν имеют в первой среде длину волны λ_1, а во второй среде – λ_2. Как изменяется скорость распространения колебаний при переходе из первой среды во вторую, если $\lambda_1 = 2\lambda_2$?

Решение

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \lambda_1\nu; \\ c_2 &= 2\lambda_1\nu; \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{2}; \quad c_1 = \frac{c_1}{2};$$

---

200. Найти скорость звука в воде, если колебания с периодом T = 0,005 с возбуждают звуковую волну длиной λ = 7,175 м.

Решение

$$c = \frac{\lambda}{T} \approx 1345\frac{м}{с};$$

---

201. Определить длину звуковой волны в воде, генерируемой источником колебаний с частотой ν = 200 Гц, если скорость звука в воде с =1450 м/с.

Решение

$$c = \lambda\nu; \quad \lambda = \frac{c}{\nu} = 7{,}25м;$$

---

202. Частота голоса человека имеет примерные пределы: $\nu_1 \approx$ 80 Гц; $\nu_2 \approx$ 1300 Гц. Каковы длины волн этих тонов при скорости звука с $\approx$ 338 м/с?

Решение

$$c=\lambda\nu;\quad \lambda_1=\frac{c}{\nu_1}=4{,}225\text{м};\quad \lambda_2=\frac{c}{\nu_2}=0{,}26\text{м};$$

---

203. Первый раскат грома наблюдается через время τ = 12 с после вспышки молнии. На каком расстоянии от наблюдателя возникла молния?

Решение

1. Скорость света в воздухе $c_1 \approx 3\cdot10^8$ м/с, скорость звука – $c_2 \approx 340$ м/с, другими словами, $c_1 >> c_2$, поэтому:

$$\ell \approx c_2\tau \approx 4{,}08\cdot10^3\text{м} \approx 4\text{км};$$

---

204. Звук пушечного выстрела дошёл до наблюдателя через τ = 30 с после того, как была замечена вспышка. Расстояние между пушкой и наблюдателем ℓ = 10 км. Определить скорость распространения звуковой волны.

Решение

$$c=\frac{\ell}{\tau}\approx\frac{10^4}{30}\approx 333\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

---

205. Задано уравнение плоской бегущей волны $\xi(x,t)=5\cdot10^{-3}\cos(628t-2x)$, найти частоту колебаний частиц среды ν, длину волны λ, фазовую скорость распространения волны v_f, амплитудное значение скорости $\dot{\xi}_m$ и ускорения $\ddot{\xi}_m$.

Решение

1. Циклическая частота колебаний частичек среды при распространении заданной волны ω = 628 с$^{-1}$, при этом частота определится как:

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{628}{6{,}28}=100\text{ Гц}.$$

2. Длину волны определим из уравнения волнового числа, при условии, что k = 2 м$^{-1}$

$$k=\frac{2\pi}{\lambda};\quad \lambda=\frac{2\pi}{k}=3{,}14\text{ м}.$$

3. Фазовая скорость распространения волны:

$$v_f=\lambda\nu=314\,\text{м/с}.$$

4. Амплитудное значение скорости колеблющихся частиц:

$$\dot{\xi}(t)=\frac{d\xi}{dt}=-\omega\xi_m\sin\omega;\quad \dot{\xi}_m=-\omega\xi_m=628\cdot5\cdot10^{-3}=3{,}14\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

5. Амплитудное значение ускорения:

$$\ddot{\xi}_m=\frac{d^2\xi_m}{dt^2}=-\omega^2\xi_m=1{,}97\cdot10^3\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

---

206. Точки некоторой среды совершают незатухающие колебания, которые распространяются с фазовой скоростью v. Получить уравнение волнового движения и показать его физический смысл.

Решение

1. При нулевой начальной фазе смещение частиц среды при распространении упругой волны можно записать следующим образом

$$\xi(x,t)=\xi_m \sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)\right]=\xi_m \sin\left(\omega t-\frac{\omega x}{v}\right),$$

$$\xi(x,t)=\xi_m \sin\left[\frac{2\pi t}{T}-\frac{2\pi x}{Tv}\right]=\xi_m\left(\frac{2\pi t}{T}-\frac{2\pi x}{\lambda}\right).$$

2. Количество длин волн λ, укладывающихся на отрезке 2π, называется волновым числом

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi}{vT}=\frac{\omega}{v}.$$

3. Введём в уравнение волны волновое число

$$\xi(x,t)=\xi_m \sin(\omega t-kx).$$

4. Найдём частные производные исходного уравнения по времени t и координате x

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}=u=\xi_m\omega\cos(\omega t-kx);$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=a=-\xi_m\omega^2\sin(\omega t-kx)=-\omega^2\xi(x,t);$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\xi_m(-k)\cos(\omega t-kx);$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=-\xi_m k^2\sin(\omega t-kx)=-\frac{4\pi^2\nu^2}{v^2}\xi(x,t)=\frac{\omega^2}{v^2}\xi(x,t).$$

5. Ввиду того, что переменные x и t не зависят друг от друга, то, сравнивая их значения, получим:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}.$$

6. Полученное уравнение является дифференциальным уравнением плоской бегущей волны. Это уравнение описывает не только распространение плоской волны в упругой среде, но и широкое многообразие других волновых процессов, поэтому называется волновым уравнением.

7. В частности для акустической волны в твёрдых телах волновое уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{E}{\rho}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2};$$

где E – модуль упругости (модуль Юнга), ρ – плотность среды. Так например, для стали $E = 2\cdot10^{11}$ Н/м^2, ρ=7800 кг/м^3, скорость звука равна

$$c=\sqrt{E/\rho}\cong 5100\ \text{м/с}.$$

8. Распространения упругих волн в газах, если считать их идеальными, описывается уравнением адиабаты $PV^{\gamma}=\text{const}$, из которого следует, что

$$dPV-P\gamma dV=0.$$

Это уравнение можно преобразовать к волновому уравнению, в котором скорость определится как

$$c=\sqrt{(P_o/\rho_o)\cdot\gamma},$$

где $\gamma = c_p/c_v$ – показатель адиабаты, $p_0 = n_0kT$ – давление в отсутствие волны, ρ_0 – плотность невозмущённого газа, n_0 – концентрация молекул в невозмущённой среде, $k = 1{,}38\cdot 10^{-23}$ Дж/К, T – абсолютная температура. С учётом того, что $n_0 = \rho_0/m_0$,

$$p_0 = \rho_0 kT\frac{1}{m_0} = \frac{\rho_0 RT}{\mu};$$

9. Скорость определится как:

$$c = \sqrt{\gamma\frac{RT}{\mu}};$$

Уравнение показывает, в частности, что скорость звука в газах совпадает со скоростью теплового движения молекул:

$$< v >= \sqrt{\frac{3RT}{\mu}};$$

---

207. Плоская упругая волна генерируется источником колебаний с частотой ν = 200 Гц с амплитудным значением смещения $\xi_m = 4\cdot 10^{-3}$ м. Записать уравнение колебаний среды для случая $\xi(0,t)$, если в начальный момент времени смещение максимально. Определить смещение точек среды через время τ_1 = 0,1 с на удалении от источника x_1 = 1 м, принимая скорость распространения волнового движения c = 300 м/с.

Решение

1. Уравнение плоской бегущей волны с учётом приведённых в условии данных, запишется следующим образом

$$\xi(x,t) = \xi_m\cos(\omega t - kx).$$

2. В точке расположения источника при x = 0 уравнение примет вид

$$\xi(0,t) = \xi_m\cos\omega t = 4\cdot 10^{-3}\cos 2\pi\nu t.$$

3. Определим смещение частичек среды в момент времени τ_1 на удалении от источника x_1 = 1 м

$$\xi(x_1,\tau_1) = 4\cdot 10^{-3}\cos(2\pi\nu\tau_1 - kx_1);$$

$$\xi(x_1,\tau_1) = 4\cdot 10^{-3}\cos\left(2\pi\nu\tau_1 - \frac{2\pi\nu}{c}x_1\right);$$

$$\xi(x_1,\tau_1) = 4\cdot 10^{-3}\cos\left[2\pi\nu - \frac{x_1}{c}\right];$$

$$\xi(x_1,\tau_1) = 4\cdot 10^{-3}\cos\left(6{,}28\cdot 100\cdot 0{,}1 - \frac{1}{300}\right) = 1{,}83\cdot 10^{-3}\,\text{м}.$$

---

208. Акустические волны с частотой колебания ν = 0,5 кГц, амплитудой смещения частиц $\xi_m = 2{,}5\cdot 10^{-4}$ мм и длиной волны λ = 0,7 м распространяются в упругой среде. Определить скорость волны v и амплитудное значение колебательной скорости частиц $\dot{\xi}_m$.

Решение

1. Определим скорость распространения волны

$$v = \lambda\nu = 350\,\text{м/с}.$$

2. Амплитудное смещение частичек среды найдём из следующих соображений:

$$\xi(x,t) = \xi_m \cos(\omega t - kx);$$
$$\dot{\xi}(t) = -2\pi\nu\xi_m \sin(\omega t - kx);$$
$$\dot{\xi}_m = -2\pi\nu\xi_m \cong 0{,}79\,\text{м/с}.$$

---

209. Плоская волна с периодом T = 3 мс с амплитудой колебания частиц среды $\xi_m = 2\cdot 10^{-4}$ мм и длиной волны λ = 1,2 м распространяется в упругой среде. Для точек удалённых от источника колебаний на расстояние x_1 = 2 м определить в момент времени τ = 7 мс: смещение частиц среды, их скорость и ускорение, считая начальную фазу нулевой.

Решение

1. Запишем уравнение плоской бегущей волны:

$$\xi(x,t) = \xi_m \sin(\omega t - kx).$$

2. Подставим в уравнение заданные величины:

$$\xi(x_1,\tau) = \xi_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}\tau - \frac{2\pi}{\lambda}x_1\right),$$

$$\xi(x_1,\tau) = 2\cdot 10^{-4} \sin\left(\frac{6{,}28}{3\cdot 10^{-3}}7\cdot 10^{-3} - \frac{6{,}28}{1{,}2}2\right) = 175\,\text{мкм}.$$

3. Колебательную скорость частиц среды определим, продифференцировав уравнение $\xi(x,t)$ по времени:

$$\dot{\xi}(x_1,\tau) = \frac{d\xi}{dt} = \frac{2\pi}{T}\xi_m \cos\left(\frac{2\pi}{T}\tau - \frac{2\pi}{\lambda}x_1\right),$$

$$\dot{\xi}(x_1,\tau) = \frac{6{,}28}{3\cdot 10^{-3}} 2\cdot 10^{-4} \cos 6{,}28\left(\frac{7\cdot 10^{-3}}{3\cdot 10^{-3}} - \frac{2}{1{,}2}\right) = 0{,}33\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

4. Ускорение частиц жидкости:

$$\ddot{\xi}(x_1,t)\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2}\xi_m \sin 2\pi\left(\frac{\tau}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) = 767\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

---

210. Упругая волна с амплитудным значением смещения ξ_m = 0,1 м распространяется без затухания прямолинейно. Найти величину смещения частиц среды на удалении от источника колебаний $x_1 = 3\lambda/4$ для момента времени τ = 0,9 T.

Решение

1. Запишем уравнение смещения для плоской бегущей упругой волны:

$$\xi(x,t) = \xi_m \sin(\omega t - kx).$$

2. Подставим в уравнение $\xi(x,t)$ условия прямолинейного распространения волны

$$\xi(x_1,\tau) = \xi_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}0{,}T - \frac{2\pi}{\lambda}\frac{3\lambda}{4}\right) = \xi_m \sin 0{,}3\pi = 8{,}1\cdot 10^{-2}\,\text{м}.$$

---

211. Волна, имеющая период T = 1,2 с и амплитудное значение смещения частиц среды $\xi_m = 2\cdot 10^{-2}$ м распространяется прямолинейно со скоростью v = 15 м/с. Определить смещение частицы среды, находящейся на расстоянии x_1 = 45 м от источника колебаний, если с момента их возникновения прошло τ = 4 с.

Решение

1. Запишем уравнение смещения при распространении упругой волны следующим образом:

$$\xi(x_1,\tau) = \xi_m \cos\left(\frac{2\pi}{T}\tau - \frac{2\pi}{Tv}x_1\right),$$

$$\xi(x_1,\tau) = 2\cdot 10^{-2}\cos\left(\frac{6{,}28}{1{,}2}4 - \frac{6{,}28}{1{,}2\cdot 15}45\right) = 1{,}2\cdot 10^{-2}\,\text{м}.$$

---

212. Для точек, находящихся на расстоянии Δx = 0,5 м друг от друга на прямой, вдоль которой распространяется упругая волна со скоростью v = 50 м/с и периодом $T = 5\cdot 10^{-2}$ с, определить разность фаз колебаний $\Delta\Phi$.

Решение

1. Запишем уравнения фазы колебаний для заданных по условию задачи точек:

$$\Phi = (\omega t - kx) = \left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{Tv}x\right),$$

$$\Phi_1 = (\omega t - kx_1) = \left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{Tv}x_1\right),$$

$$\Phi_2 = (\omega t - kx_2) = \left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{Tv}x_2\right),$$

2. Определим разность фаз:

$$\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = \frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{Tv}x_1 - \frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{Tv}x_2 = \frac{2\pi}{Tv}\Delta x = 1{,}26\,\text{рад}\left(72{,}2^0\right).$$

---

213. Упругая волна распространяется вдоль прямой линии со скоростью v = 40 м/с при частоте колебаний частиц среды ν = 5 Гц. Определить разность фаз колебаний между источником и точкой отстоящей на расстоянии x_1 = 2 м.

Решение

1. Запишем уравнение фаз колебаний для источника и заданной точки с учётом того, что $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ м

$$\Phi_1 = \left(2\pi\nu t - \frac{2\pi\nu}{v}x_1\right);\quad \Phi_2 = \left(2\pi\nu t - \frac{2\pi\nu}{v}x_2\right).$$

2. Разность фаз колебаний между рассматриваемыми точками

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi\nu}{v}\Delta x = \frac{6{,}28\cdot 5}{40}2 = 1{,}57\,\text{рад}\left(90^0\right).$$

---

214. Волновой фронт распространяется со скоростью v = 100 м/с. Наименьшее расстояние между точками среды, колеблющимися синфазно, составляет Δx = 1 м. Определить частоту колебаний.

Решение

1. Расстояние между двумя ближайшими точками, совершающими синфазные колебания, преодолевается волной за время одного полупериода. Зная скорость распространения волнового фронта, можно определить период и частоту колебаний частиц среды

$$T = \frac{2\Delta x}{v}; \quad \nu = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\Delta x} = 50\,\text{Гц}.$$

---

215. При распространении плоской волны частицы среды колеблются с частотой ν = 25 Гц. Частицы среды, отстоящие друг от друга на расстоянии Δx = 0,1 м, колеблются с разностью фаз $\Delta\Phi = 60^0$. Найти скорость распространения волны.

Решение

1. Запишем уравнение разности фаз и определим скорость распространения волны

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi\nu}{v}\Delta x\,,$$

$$\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi\nu}{v}\Delta x; \quad \Rightarrow \quad v = 6\nu\Delta x = 15\,\text{м/с}.$$

---

216. Звуковая волна в воздухе распространяется со скоростью v = 340 м/с, период колебания частиц среды равен T = 1 мс. Определить, на каком расстоянии от источника направление движения частиц поменяется на обратное. Как изменится это расстояние при увеличении частоты колебаний источника вдвое?

Решение

1. Изменение направления смещения частиц на обратное происходит при изменении фазы на $\Delta\Phi = 180^0 = \pi$ рад, поэтому:

$$\pi = \frac{2\pi}{Tv}\Delta x; \quad \Delta x_1 = \frac{Tv}{2} = 0{,}17\,\text{м}.$$

2. При увеличении частоты вдвое период уменьшится тоже в два раза, следовательно, минимальное расстояние между точками среды, колеблющимися в противофазе, составит Δx = 8,5 см.

---

217. Бегущая акустическая волна описывается уравнением:

$$\xi(x,t) = \xi_m \cos(1560t - 5{,}2x),$$

где величины времени t и расстояния x выражены в секундах и метрах, соответственно. Вычислить частоту колебаний частиц среды ν, скорость распространения волны c и её длину λ.

Решение

1. По условию задачи заданы следующие параметры волнового движения: циклическая частота колебаний ω = 1560 рад/с, волновое число k = 5,2 м$^{-1}$.

2. Частота колебаний частиц среды относительно положения равновесия

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 248\ \text{Гц}.$$

3. Длина волны определится из следующих соображений

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = 1{,}21\ \text{м}.$$

4. Скорость распространения волны

$$k = \frac{\omega}{c}; \quad c = \frac{\omega}{k} = 300\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

---

218. Акустическая волна, распространяющаяся в воздухе, описывается уравнением:

$$\xi(x,t) = 6\cdot 10^{-5}\cos(1800t - 5{,}3x),$$

где время t выражено в секундах, расстояние x – в метрах. Найти отношение амплитудного значения смещения частиц среды к длине волны и отношение максимального значения колебательной скорости частиц к скорости распространения волны.

1. Из заданного уравнения $\xi(x,t)$ следует, что: $\xi_m = 6\cdot 10^{-5}$ м; $\omega = 1800$ рад/с; $k = 5{,}3\ \text{м}^{-1}$, поэтому длину волны можно определить следующим образом:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 1{,}18\ \text{м}.$$

2. Отношение амплитуды смещения частиц при колебаниях к длине волны, таким образом, будет равно:

$$\frac{\xi_m}{\lambda} = \frac{6\cdot 10^{-5}}{1{,}18} = 5{,}1\cdot 10^{-5}.$$

3. Определим амплитудное значение колебательной скорости:

$$\dot{\xi}_m = \frac{d\xi(x,t)}{dt} = -\omega\xi_m = 1800\cdot 6\cdot 10^{-5} = 0{,}11\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

4. Скорость распространения волны:

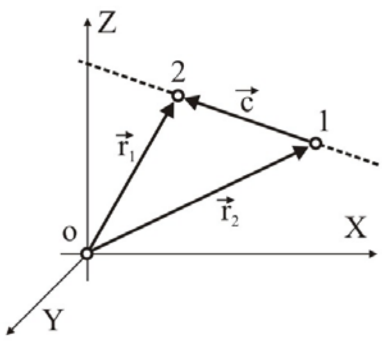
$$c = \frac{\omega}{k} = 340\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

5. Отношение амплитудного значения колебательной скорости к скорости распространения волны:

$$\frac{\dot{\xi}_m}{c} = \frac{0{,}11}{340} = 3{,}24\cdot 10^{-4}.$$

---

219. Плоская акустическая волна, распространяющаяся со скоростью c возбуждает колебания частичек упругой среды с циклической частотой ω. Направление распространения волны составляет углы α, β и γ с осями декартовой системы координат X, Y, Z. Определить разность фаз колебаний точек среды с координатами $\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\{x_2, y_2, z_2\}$.



Решение

1. Фаза в общем случае распространения волны вдоль одной из осей определяется уравнением:

$$\Phi = \omega t - \frac{\omega}{c} x .$$

Для выделенных в пространстве точек 1 и 2 величины ω и t будут одинаковыми, т.е. разность фаз ΔΦ определяется в данном случае только координатами точек. В векторном представлении:

$$\Delta\Phi = \vec{k}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right),$$

где $\vec{k} = k\vec{n}$ – волновой вектор, определяемый в виде скалярного произведения волнового числа k на единичный вектор $\vec{n}$, перпендикулярный волновой поверхности, $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ – радиус-векторы точек.

2. Запишем разность векторов в скалярной форме через направляющие косинусы:

$$\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right| = \left(x_1 - x_2\right)\cos\alpha + \left(y_1 - y_2\right)\cos\beta + \left(z_1 - z_2\right)\cos\gamma .$$

3. Подставим уравнение ΔΦ в соотношение для Φ с учётом значения модуля волнового вектора k = ω/c

$$\Delta\Phi = \frac{\omega}{c}\left|\left(x_1 - x_2\right)\cos\alpha + \left(y_1 - y_2\right)\cos\beta + \left(z_1 - z_2\right)\cos\gamma\right| .$$

---

220. Найти волновой вектор k и скорость распространения волны, заданной уравнением:

$$\xi(x,y,z,t) = \xi_m \cos(\omega t - \alpha x - \beta y - \gamma z) .$$

Решение

1. По условию заданы проекции волнового вектора $k_x = \alpha$, $k_y = \beta$, $k_z = \gamma$, поэтому, используя единичные векторы $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ волновой вектор можно представить следующим образом:

$$\left|\vec{k}\right| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} , \quad \vec{k} = \alpha\vec{e}_x + \beta\vec{e}_y + \gamma\vec{e}_z .$$

2. Скорость распространения волны:

$$c = \frac{\omega}{\left|\vec{k}\right|} = \frac{\omega}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} .$$

---

221. Плоская акустическая волна распространяется со скоростью c, имеющей на оси декартовой системы координат, проекции $\{c_x, c_y, c_z\}$. Записать уравнение волнового вектора, если циклическая частота колебаний частиц среды рана ω.

Решение

1. Модуль вектора скорости через его проекции на оси декартовой системы координат можно выразить следующим образом:

$$\left|\vec{c}\right| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} .$$

$$\left|\vec{k}\right| = \frac{\omega}{\left|\vec{c}\right|} = \omega\left(\frac{\vec{e}_x}{c_x} + \frac{\vec{e}_y}{c_y} + \frac{\vec{e}_z}{c_z}\right) .$$

---

222. Вычислить скорость распространения продольных акустических волн в алюминии, латуни, меди, никеле, серебре и органическом стекле.

Решение

1. При распространении акустической волны следует различать два совершенно разных явления: движение частиц среды в волне и перемещение самой упругой волны в среде. Первое явление – это движение частиц как материальных точек; второе явление – переход возмущенного состояния среды с одних частиц на другие. Так, величина смещения и скорость частицы в волне зависят от силы звука, например для слышимых звуков – от их громкости. Эти величины в звуковой волне, как правило, очень малы, а после прохождения волны каждая частица практически остается в своем исходном положении. Волна же удаляется от места возникновения; скорость ее велика (сотни и тысячи метров в секунду) и не зависит от силы звука, а только от параметров среды, в частности, от модуля Юнга и плотности среды

2. Скорость звука всегда конечна, отсюда следует, что во всех акустических вопросах нужно учитывать как упругость среды, так и ее инерционные свойства; от других же свойств среды ее акустическое поведение не зависит.

3. Если к телу приложить силу, то в нем всегда должна создаться упругая волна. Однако в обычных задачах теоретической механики упругие волны не учитывают. Изучая движение свободного тела, возникающее под действием прикладываемой к телу силы, считают, что ускорение получает сразу все тело, а не только участок приложения силы, затем соседний участок и т. д. Аналогично, рассматривая действие силы на закрепленное тело, считают, что тело, деформируясь, приходит в равновесие все сразу, во всех своих частях. Такой подход равносилен предположению, что скорость звука в теле бесконечна.

4. В первом примере это соответствует абсолютно жесткому телу (бесконечная упругость), а во втором – без массовому телу. Механические задачи при таком подходе сильно упрощаются; В частности, оказывается возможным в каждой задаче учитывать либо только массу тела (первый пример), либо только его упругие свойства (второй пример).

5. Скорость распространения продольных волн, как показано ранее, в упругой среде вычисляется по формуле:

$$c = \sqrt{E/\rho}\,,$$

$$E = -\frac{\sigma}{\varepsilon} = -\frac{\sigma}{\Delta\ell/\ell}\,,$$

где σ - упругое напряжение в стержне, $\Delta\ell/\ell = \varepsilon$ - относительное удлинение.

6. Для вычисления скорости звука в заданных по условию задачи металлах приведём значения модуля Юнга и плотности

№	Металл	E, $\cdot 10^7$ Н/м^2	ρ, 10^3 кг/м^3
1	Алюминий	6650	2,7
2	Латунь	9500	8,55
3	Медь	10800	8,93
4	Никель	20400	8,75
5	Серебро	8270	10,52
6	Органическое стекло	525	1,18

$$c_1 = \sqrt{\frac{6,65\cdot 10^{10}}{2,7\cdot 10^3}} \cong 4960\frac{м}{с};\quad c_2 = \sqrt{\frac{9,5\cdot 10^{10}}{8,55\cdot 10^3}} \cong 3300\frac{м}{с};$$

$$c_3 = \sqrt{\frac{1,1\cdot 10^{11}}{8,93\cdot 10^3}} \cong 3510\frac{м}{с};\quad c_4 = \sqrt{\frac{2\cdot 10^{11}}{8,75\cdot 10^3}} \cong 4790\frac{м}{с};$$

$$c_5 = \sqrt{\frac{8,2\cdot 10^{10}}{1,052\cdot 10^4}} \cong 2790\frac{м}{с};\quad c_6 = \sqrt{\frac{5,25\cdot 10^{9}}{1,18\cdot 10^3}} \cong 2110\frac{м}{с};$$

---

223. Ухо человека воспринимает акустические волны в диапазоне частот от ν_{min} = 16 Гц до ν_{max} = 20 кГц. Определить соответствующие этим частотам длины волн, если скорость звука в воздухе составляет с = 340 м/с.

Решение

1. Скорость звука, длина волны и частота колебаний частиц среды связаны следующим соотношением:

$$c = \nu\lambda;\quad \Rightarrow\quad \lambda = \frac{c}{\nu},$$

откуда:

$$\lambda_{min} = \frac{c}{\nu_{min}} = 21,3\,м;\quad \lambda_{max} = \frac{c}{\nu_{max}} = 1,7\,см.$$

---

224. Звуковые колебания распространяются в азоте N_2 при температуре Т = 300 К. Определить скорость звука.

Решение

1. Распространения упругих волн в газах, если считать их идеальными, описывается уравнением адиабаты $PV^{\gamma} = const$, из которого следует, что:

$$dPV - P\gamma dV = 0.$$

Это уравнение можно преобразовать к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\quad \text{или}\quad \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2},$$

при этом скорость определится как

$$c = \sqrt{\frac{p_0\gamma}{\rho_0}},$$

где $\gamma = c_p/c_v$ – показатель адиабаты, $p_0 = n_0kT$ - давление в отсутствие волны, ρ_0 - плотность невозмущённого газа, n_0 –концентрация молекул в невозмущённой среде, $k = 1,38\cdot 10^{-23}$ Дж/К, Т – абсолютная температура. С учётом того, что $n_0 = \rho_0/m_0$,

$$p_0 = \rho_0 kT\frac{1}{m_0} = \frac{\rho_0 RT}{\mu};$$

скорость определится как:

$$c = \sqrt{\gamma\frac{RT}{\mu}};$$

2. Уравнение скорости показывает, в частности, что скорость звука в газах совпадает со скоростью теплового движения молекул. Скорость распростране-

ния упругих волн, в большинстве своём, не зависит от амплитуды колебаний, исключение составляют волны взрывного типа, которые относятся к нелинейным волнам, когда колебания среды, порождающие эти волны, не являются гармоническими.

3. Двухатомная молекула азота N_2 состоит из двух атомов, т.е. обладает пятью степенями свободы i = 5

$$\gamma = \frac{i+2}{i} = 1{,}4.$$

Молярная масса азота $\mu(N_2) = 28\cdot 10^{-3}$ кг/моль, универсальная газовая постоянная R = 8,3 Дж/моль·К. В соответствие с уравнением (5) скорость звука определится как

$$c(N_2) = \sqrt{\frac{\gamma R T}{\mu}} = \sqrt{\frac{1{,}4\cdot 8{,}3\cdot 300}{28\cdot 10^{-3}}} \cong 354\,\frac{м}{с}.$$

---

225. Получить зависимость скорости звука в воздухе при изменении его температуры от T_{min} = 230 К до T_{max} = 320 К.

Решение

1. Для воздуха $\mu = 3\cdot 10^{-2}$ кг/моль, γ = 1,4, поэтому уравнение (6) предыдущей задачи можно переписать следующим образом

$$c = 19{,}7\sqrt{T}.$$

2. Для построения зависимости c = f(T) сведём результаты вычислений в таблицу

Т, К	230	240	250	260	270	280	290	300	310	320
с, м/с	299	305	311	318	324	330	335	341	347	352

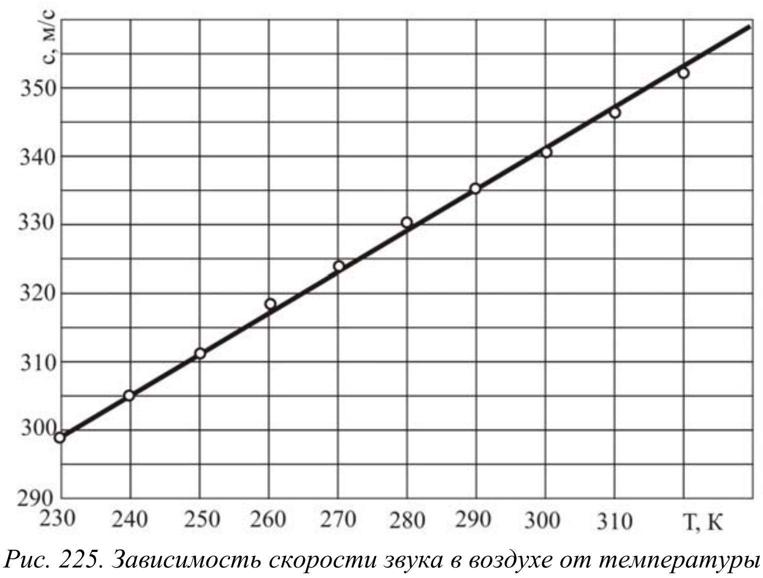


Рис. 225. Зависимость скорости звука в воздухе от температуры

226. На расстоянии x = 800 м от импульсного источника звука, расположенного в воздухе находятся два приёмника, один из которых расположен в воде. Задержка между сигналами в воде и воздухе составляет $\Delta\tau$ = 1,84 с. Определить скорость звука в воде, если температура воздуха равна T = 295 К.

Решение

1. По графику зависимости скорости звука от температуры воздуха, приведенному в предыдущей задаче, определим скорость при заданной в условии температуре – c_1 = 337 м/с.

2. Определим время распространения звуковой волны в воздухе τ_1

$$\tau_1 = \frac{x}{c_1} = 2{,}37\,\text{с}.$$

3. Время распространения сигнала в воде:

$$\tau_2 = \tau_1 - \Delta\tau = 0{,}533\,\text{с}.$$

4. Скорость звука в воде:

$$c_2 = \frac{x}{\tau_2} = 1500\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

---

227. Скорость звука в некотором газе при нормальных условиях равна c = 308 м/с. Плотность газа равна ρ_0 = 1,78 кг/м^3. Определить отношение удельных теплоёмкостей c_p/c_V.

Решение

1. Воспользуемся для определения скорости уравнением

$$c = \sqrt{\frac{p_0\gamma}{\rho_0}},$$

откуда

$$\gamma = \frac{c^2\rho_0}{p_0},$$

при $p_0 = 1\cdot10^5$ Па

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{308^2\cdot1{,}78}{10^5} = 1{,}69.$$

---

228. Найти отношение скоростей распространения акустической волны в водороде и углекислом газе, если эти газы находятся в одинаковых условиях.

Решение

1. Отметим, что заданные газы имеют следующие параметры при нормальных условиях: для водорода H_2 – $\mu_1 = 2\cdot10^{-3}$ кг/моль, γ_1 = 1,4; для углекислого газа CO_2 – μ_2 = 48 кг/моль, γ_2 = 1,33

2. Составим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \sqrt{\frac{\gamma_1 RT}{\mu_1}};\\ c_2 &= \sqrt{\frac{\gamma_2 RT}{\mu_2}}. \end{aligned}\right\}$$

3. Поделим уравнения системы друг на друга:

$$\frac{c_1}{c_2} = \sqrt{\frac{\gamma_1\mu_2}{\gamma_2\mu_1}} = \sqrt{\frac{1{,}4\cdot48\cdot10^{-3}}{1{,}33\cdot2\cdot10^{-3}}} \cong 5.$$

---

229. При подъёме от поверхности Земли температура изменяется от T_0 = 300 К до T_2, увеличиваясь на ΔT = 7 мК/м. Оценить, за какое время акустическая волна распространится на высоту h = 8 км.

Решение

1. Определим температуру на высоте h над поверхностью Земли:

$$T_1 = T_0 - \Delta T h = 300 - 7\cdot 10^{-3}\cdot 8\cdot 10^{-3} = 244\,\mathrm{K}.$$

2. Найдём конечную и начальную скорость звука:

$$c_0 = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{\mu}} = \sqrt{\frac{1{,}33\cdot 8{,}3\cdot 300}{3\cdot 10^{-2}}} \cong 332\,\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{\gamma R T_1}{\mu}} = \sqrt{\frac{1{,}33\cdot 8{,}3\cdot 244}{3\cdot 10^{-2}}} \cong 300\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

3. Среднее значение скорости звука:

$$<c> = \frac{c_0 + c_1}{2} = 316\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

4. Примерное время распространения на высоту h:

$$\tau = \frac{h}{<c>} = \frac{8\cdot 10^3}{316} = 25{,}3\,\text{с}.$$

---

230. Для акустической волны возбуждающей в среде колебания с циклической частотой ω, получить зависимость групповой скорости u от фазовой скорости c.

Решение

1. Как известно, постоянная фаза упругой волны может быть выражена следующим уравнением

$$\Phi = \omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_0 = \text{const}.$$

2. Продифференцируем уравнение с учётом того, что переменными величинами являются t и x

$$dt - \frac{1}{c}dx = 0; \quad \Rightarrow \quad c = \frac{dx}{dt},$$

где c – скорость распространения волны.

3. В соответствие с разложением Фурье всякая волна может быть представлена в виде суперпозиции (суммы) нескольких волн. Другими словами, в пространстве будет распространяться волновой пакет (группа волн). Если две составляющие волнового пакета незначительно отличаются по циклической частоте, так что $d\omega \ll \omega$ и $dk \ll k$, то уравнение пакета записывается следующим образом:

$$\xi(x,t) = \xi_m \cos(\omega t - kx) + \xi_m \cos[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x],$$

$$\xi(x,t) = 2\xi_m \cos\left(\frac{t d\omega - x dk}{2}\right)\cos(\omega t - kx).$$

4. Амплитуда такого волнового движения будет медленно изменяться как функция времени и координаты:

$$\xi(x,t)=\left|2\xi_m\cos\left(\frac{td\omega-xdk}{2}\right)\right|.$$

5. В качестве характерной кинематической характеристики волны принимается скорость распространения максимума амплитуды. При условии $td\omega - xdk = const$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d\omega}{dk}=u\,.$$

Величина u называется групповой скоростью, которая связана с фазовой скоростью следующим образом:

$$u=\frac{d\omega}{dk};\quad c=\frac{\omega}{k}=\frac{2\pi}{\lambda},$$

$$u=\frac{d(ck)}{dk}=c+k\frac{\frac{dc}{d\lambda}}{\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)}=c+k\left(-\frac{\lambda^2}{2\pi}\right)\frac{dc}{d\lambda},$$

с учётом того, что $\lambda/2\pi = 1/k$

$$u=c-\lambda\frac{dc}{d\lambda}.$$

---

231. Фазовая скорость акустической волны, удовлетворяет уравнению

$$c=\frac{\aleph}{\sqrt{\nu+\vartheta}},$$

где ν = 1 кГц – частота колебаний, ϑ = 200 Гц, $\aleph$ = 10 м·с$^{-3/2}$ – постоянные размерные коэффициенты. Найти групповую скорость для частоты ν = 1 кГц.

Решение

1. В данном случае длину волны можно представить следующим образом:

$$\lambda=\frac{c}{\nu}=\frac{\aleph}{\nu\sqrt{\nu+\vartheta}}.$$

2. Групповая скорость:

$$u=\frac{d\omega}{dk}=2\pi\frac{d\nu}{dk},$$

где $k=2\pi/\lambda$ – волновое число.

3. Подставим значение волнового числа в уравнение групповой скорости:

$$u=2\pi\frac{d\nu}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)}.$$

4. Вычислим знаменатель последнего уравнения:

$$d\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\frac{1{,}5\nu+\vartheta}{\aleph\sqrt{\nu+\vartheta}}d\nu\,.$$

5. Совместим уравнения:

$$u=\frac{d\nu\aleph\sqrt{\nu+\vartheta}}{(1{,}5\nu+\vartheta)d\nu}=\frac{\aleph\sqrt{\nu+\vartheta}}{1{,}5\nu+\vartheta}=\frac{10\sqrt{10^3+200}}{1{,}5\cdot10^3+200}\cong 0{,}2\,\frac{м}{с}.$$

---

232. Поплавок на поверхности воды за время τ = 30 с совершил n = 40 колебаний вокруг положения равновесия, рыбак, расположившейся на берегу, на двадцатиметровом отрезке насчитал N = 20 гребней волн. Определить скорость волн, распространяющихся в водоёме.

Решение

1. Период колебаний частиц жидкости при распространении волны можно выразить через параметры колебаний и характеристики волны:

$$T = \frac{\tau}{n}; \quad T = \frac{\lambda}{v},$$

откуда:

$$v = \frac{\lambda n}{\tau}.$$

2. Длину волны в данном случае целесообразно выразить, воспользовавшись результатами наблюдений $\lambda = s/N$, тогда скорость представится следующим образом:

$$v = \frac{sn}{\tau N} = \frac{20 \cdot 40}{30 \cdot 20} = 1{,}33\,\frac{м}{с}.$$

---

233. Некто, не обременённый возрастом, исключительно в познавательных целях, бросает в середину круглой лужи камень, отмечая, что за время τ_1 = 80 с к его ногам «подошло» n = 15 гребней волн. Расстояние между гребнями составляло λ = 0,2 м, первый «сигнал» от камня распространялся в течение τ_2 = 20 с. Каким образом по результатам этих наблюдений модно вычислить радиус лужи.

Решение

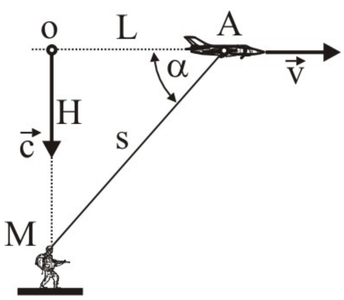
1. Если волновой фронт перемещается с постоянной скоростью, то $s = v\tau_1$. С другой стороны скорость волн можно выразить через их длину $v = \lambda/T = \lambda n/\tau_2$.

2. Подставим далее значение скорости в уравнение расстояния, проходимого волновым фронтом

$$R = \lambda n \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{0{,}2 \cdot 15 \cdot 80}{20} = 12\,м.$$

---

224. Услышав, пришедший сверху звук пролетающего самолёта, наблюдатель обнаружил его визуально под углом α = 45^0 к горизонту. Определить скорость самолёта v и расстояние до него s, если звук распространялся в течение τ = 2 с.



Решение

1. Расстояние L и высоту H звук проходит за одно и то же время, что даёт основание записать следующие соотношения:

$$L = v\tau; \quad H = c\tau;$$

$$\frac{Y}{L} = tg\alpha = \frac{c}{v}; \quad \Rightarrow \quad v = \frac{c}{tg\alpha} = 340\,\frac{м}{с}.$$

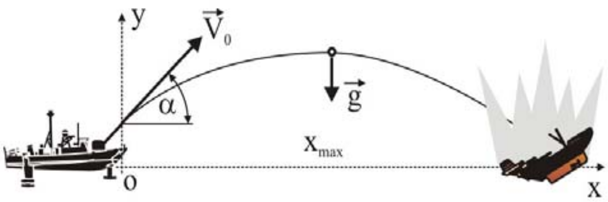
2. Расстояние s определится из равнобедренного прямоугольного треугольника OAM

$$s = \frac{c\tau}{\sin\alpha} = \frac{340\cdot 2}{0,707} = 962\,\text{м}.$$

---

225. Из корабельного орудия главного калибра установленного на максимальную дальность стрельбы вылетает снаряд с начальной скоростью v_0 = 500 м/с и поражает надводную цель. Через какой промежуток времени канониры услышат звук взрыва, если движение снаряда в воздухе происходит с пренебрежимо малым сопротивлением?

Решение



1. Время прошедшее после выстрела будет представлять собой сумму двух промежутков: собственно времени полёта снаряда до цели и времени распространения звуковой волны от цели к атакующему судну:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \frac{x_{max}}{v_0\cos\alpha} + \frac{x_{max}}{c},$$

$$\tau = x_{max}\left(\frac{1}{v_0\cos\alpha} + \frac{1}{c}\right).$$

2. Максимальная дальность стрельбы при прочих равных условиях обеспечивается при $\alpha = 45^0$, при этом:

$$x_{max} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g}.$$

3. Совместим уравнения:

$$\tau = \frac{v_0}{g}\left(\frac{1}{\cos\alpha} + M\right) \cong 144\,c,$$

где $M = v_0/c = 500/340 = 1,47$ – число Маха.

---

226. При измерениях установлено, что акустические колебания при переходе из одной среды в другую увеличивают длину волны в три раза. Во сколько раз, при этом изменяется скорость распространения волны?

Решение

1. При распространении акустических вол в средах с различными волновыми сопротивлениями ($\Re = \rho c$) период и частота колебаний остаются постоянными, изменяются только скорость звука и длина волны

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 &= c_1 T;\\ \lambda_2 &= c_2 T.\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{c_1}{c_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

2. Подставим в уравнение соотношение длин волн, заданное по условию задачи $3\lambda_2 = \lambda_1$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{3\lambda_2}{\lambda_2} = 3.$$

---

227. На прямой, вдоль которой в воде распространяется упругая волна выделены две точки, одна из которых отстоит от источника на расстоянии x_1 = 100 м, а вторая на расстоянии x_2 = 160 м. Определить разность фаз колебаний в этих точках, если частота источника колебаний равна ν = 10 кГц.

Решение

1. Запишем уравнение колебаний точек среды на заданных расстояниях:

$$\left.\begin{aligned}\xi_1 &= \xi_m \cos(\omega t_1 - kx_1);\\ \xi_2 &= \xi_m \cos(\omega t_2 - kx_2).\end{aligned}\right\}.$$

2. Разность фаз в этом случае определится уравнением:

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1,$$

$$\Delta\Phi = 2\pi\nu\frac{x_2}{c} - 2\pi\nu\frac{x_1}{c} = \frac{2\pi\nu}{c}(x_2 - x_1),$$

$$\Delta\Phi = \frac{6{,}28\cdot 10^4}{1500}(160 - 100) = 8\cdot 10^2\,\pi\,\text{рад}.$$

---

228. Два синфазных источника акустических волн генерируют в упругую среду колебания с длиной волны λ = 0,6 м и амплитудой смещения частиц среды $\xi_{m(1)} = \xi_{m(2)} = 10^{-3}$ м. Определить амплитуду результирующих колебаний ξ_m в точке пространства, которая располагается на удалении x_1 = 3,5 м и x_2 = 5,4 м от источника, а направление волновых векторов совпадает.

Решение

1. Запишем уравнение заданных волн:

$$\left.\begin{aligned}\xi_1 &= \xi_{m(1)} \cos(\omega t - kx_1);\\ \xi_2 &= \xi_{m(1)} \cos(\omega t - kx_2).\end{aligned}\right\}$$

2. Определим разность фаз колебаний между заданными точками волнового пространства:

$$\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = k(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1),$$

3. Поскольку в заданных точках колебания, с одинаковыми амплитудными значениями смещения $\xi_{m(1)} = \xi_{m(2)} = \xi_m$, движутся в данный момент времени в одном направлении, то суммарное смещение можно выразить следующим образом:

$$\xi = 2\xi_m\left|\cos\frac{\Delta\Phi}{2}\right| = 2\xi_m\left|\cos\frac{\pi(x_2 - x_1)}{\lambda}\right|;$$

$$\xi = 2\cdot 10^{-3}\left|\cos\frac{3{,}14\cdot 1{,}9}{0{,}6}\right| \cong 1{,}73\cdot 10^{-3}\,\text{м}.$$

---

229. Бегущая волна отражается от границы раздела сред и распространяется в противоположном направлении, образуя стоячую волну. Найти местоположение узлов и пучностей стоячей волны, если скорость прямого и обратного волнового фронта распространяются в среде с фазовой скоростью с = 340 м/с при частоте колебания частиц среды ν = 3,4 кГц.

Решение

1. Запишем уравнения двух упругих волн, распространяющихся в противоположных направлениях:

$$\left.\begin{aligned}\xi_1(x,t) &= \xi_m \cos(\omega t - kx + \vartheta_1);\\ \xi_2(x,t) &= \xi_m \cos(\omega t + kx + \vartheta_2).\end{aligned}\right\}$$

2. Сложим уравнения и преобразуем по формуле для суммы косинусов:

$$\xi(x,t) = \xi_m\left[\cos(\omega t - kx + \vartheta_1) + \cos(\omega t + kx + \vartheta_2)\right],$$

$$\xi(x,t) = 2\xi_m \cos\left(kx + \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2}\right)\cdot\cos\left(\omega t + \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}\right).$$

3. Уравнение стоячей волны можно упростить, если начало системы отсчёта выбрать таким образом, чтобы разность фаз прямой и отражённой волны оказалась равной нулю, т.е. $\vartheta_2 - \vartheta_1 = 0$, а момент времени – чтобы $\vartheta_2 + \vartheta_1 = 0$ и выразить волновое число через длину волны $k = 2\pi/\lambda$

$$\xi(x,t) = 2\xi_m \cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\cdot\cos\omega t.$$

Из уравнения видно, что все точки пространства занятые стоячей волной колеблются с той же частотой ω что и взаимодействующие волны. Амплитуда стоячей волны A является функцией координаты x, изменяясь по закону косинуса:

$$A = \left|2\xi_m \cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\right|.$$

4. Амплитуда стоячей волны достигает максимума в, так называемых, пучностях:

$$x_{max} = \pm m\frac{\lambda}{2} \quad (m = 0,1,2,...),$$

$$x_{max(1)} = \pm m\frac{c}{2\nu} = \pm 1\frac{340}{6800} = \pm 0{,}05\ м,$$

$$x_{max(2)} = \pm 0{,}1\ м;$$

5. Минимум амплитуды имеет место в точках (узлы стоячей волны):

$$x_{min} = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{c}{2\nu}.$$

$$x_{min(1)} = \pm 0{,}075\ м; \quad x_{min(2)} = \pm 0{,}15\ м.$$

---

230. Определить длину бегущей волны, если в стоячей волне расстояние между первой и седьмой пучностями составляет $l_{1-7} = 0{,}15$ м

Решение

1. Отметим, что расстояние между источником волн пучностями определяется как:

$$x_{max} = \pm m\frac{\lambda}{2} \quad (m = 0,1,2,...).$$

2. Расстояние между первой и седьмой пучностями l_{1-7} – при m = 6

$$\ell_{1-7} = 6\frac{\lambda}{2}; \quad \lambda = \frac{2\lambda_{1-7}}{6} = 0{,}05\ м.$$

---

231. Определить длину бегущей волны, если расстояние между первым и четвёртым узлом в стоячей волне составляет l_{1-4} = 0,15 м.

Решение

1. Координаты точек пространства с нулевым смещением, занятого стоячей волной определяются уравнением:

$$x_{min} = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}.$$

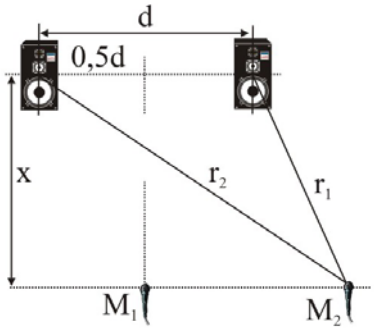
2. Для заданных условий уравнение (1) необходимо переписать в следующем виде:

$$\ell_{1-4} = \left(2{,}5 + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}; \quad \lambda = 0{,}1\,\text{м}.$$

---

232. Динамики стереосистемы излучают тональный сигнал фиксированной частоты и расположены на расстоянии d = 3 м друг от друга. При перемещении микрофона, расположенного на удалении x = 6 м от плоскости излучения параллельно этой плоскости на расстояние a = 1,7 м он фиксирует первый интерференционный минимум. Найти частоту звука приняв c = 340 м/с.

Решение



1. Рассмотрим простейший случай распространения в одном и том же пространстве двух волн, описываемых уравнениями:

$$\xi_1 = \xi_{m1}\sin(\omega_1 t - k_1 r_1 + \varphi_1) = \xi_{m1}\sin\Phi_1;$$

$$\xi_2 = \xi_{m2}\sin(\omega_2 t - k_2 r_2 + \varphi_2) = \xi_{m2}\sin\Phi_2;$$

где r_1 и r_2 расстояние от источников волн до рассматриваемой точки M_2, k – волновое число, φ_1, φ_2 – начальные фазы интерферирующих волн. Результирующее колебание в точке M_2 определится исходя из принципа суперпозиции, т.е. необходимо определить суммарное смещение частичек среды при одновременном действии обоих волн:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = \xi\sin\Phi;$$

Величины ξ и Φ могут быть найдены методом векторных диаграмм

$$\xi^2 = \xi_{m1}^2 + \xi_{m2}^2 + 2\xi_{m1}\xi_{m2}\cos(\Phi_2 - \Phi_1);$$

$$\Phi = \text{arctg} = \frac{\xi_{m1}\sin\Phi_1 + \xi_{m2}\sin\Phi_2}{\xi_{m1}\cos\Phi_1 + \xi_{m2}\cos\Phi_2};$$

Преобразуем разность фаз складываемых колебаний:

$$\Phi_2 - \Phi_1 = (\omega_2 - \omega_1)t - (k_2 r_2 - k_1 r_1) + (\varphi_2 - \varphi_1).$$

2. С учётом того, что волновое число является функцией циклической частоты колебаний и скорости распространения волны – k= ω/c, разности фаз можно придать вид, более удобный для дальнейшего анализа

$$\Phi_2 - \Phi_1 = (\omega_2 - \omega_1)t - \left(\frac{\omega_2 r_2}{c_2} - \frac{\omega_1 r_1}{c_1}\right) + (\varphi_2 - \varphi_1).$$

3. В данном случае складываются когерентные волны, для которых:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega; \quad c_1 = c_2 = c,$$

то уравнение для разности фаз можно переписать следующим образом:

$$\Phi_2 - \Phi_1 = -\frac{\omega}{c}(r_2 - r_1) + (\varphi_2 - \varphi_1),$$

4. Условие минимума при интерференции когерентных волн можно представить так:

$$\Delta_{min} = r_2 - r_1 = (2m+1)\frac{\lambda}{2},$$

при m = 0, $\Delta_{min} = \lambda/2$.

5. Выразим расстояния r_1 и r_2 через заданные по условию геометрические параметры:

$$r_1 = \sqrt{x^2 + (a - 0{,}5d)^2},$$

$$r_2 = \sqrt{x^2 + (a + 0{,}5d)^2}.$$

6. Выразим далее частоту колебаний:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2(r_2 - r_1)}.$$

7. Подставим в уравнение частоты значение r_1 и r_2

$$\nu = \frac{c}{2\left[\sqrt{x^2 + (a + 0{,}5d)^2} - \sqrt{x^2 + (x - 0{,}5d)^2}\right]},$$

$$\nu = \frac{340}{2\left(\sqrt{36 + 10{,}2} + \sqrt{36 - 10{,}2}\right)} = 100\,\text{Гц}.$$

---

233. От первого источника акустических волн колебания достигают микрофона М за время τ_1 = 0,67 с. От второго источника, начавшего работать одновременно с первым, колебания в точку расположения микрофона доходят за τ_2 = 0,7 с. Минимальный или максимальный сигнал будет фиксировать микрофон, если волны с λ = 6,8 м когерентные

Решение

1. Усиление сигнала при интерференции будет иметь место если на разности хода волн $\Delta r = r_2 - r_1$ будет укладываться чётное целое число полуволн. Минимум, т.е. ослабление, будет наблюдаться при нечётном целом числе полуволн.

2. Определим величину Δr, выразив расстояния от излучателей до микрофона через скорость волн и заданные времена

$$r_1 = c\tau_1; \quad r_2 = c\tau_2; \quad \Delta r = c(\tau_2 - \tau_1).$$

3. Разделим разность хода волн на величину $\lambda/2$

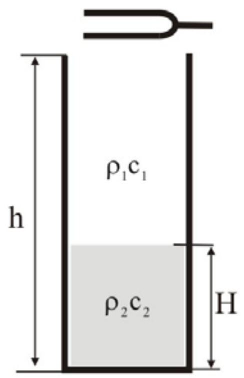
$$\varsigma = \frac{2\Delta r}{\lambda} = \frac{2c(\tau_2 - \tau_1)}{\lambda} = \frac{2 \cdot 340 \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{6{,}8} = 3.$$

4. Поскольку на разности хода волн укладывается нечётное число полуволн, то микрофон, расположенный в заданной точке, будет фиксировать ослабление сигнала.

---

234. Камертон с частотой собственных колебаний ν = 680 Гц поместили над цилиндрическим сосудом высотой h = 1,5 м который постепенно заполняют водой. При каком уровне жидкости звук камертона будет усиливаться?

Решение



1. Акустическое сопротивление воздуха равно $\rho_1 c_1 \cong 41$ кг/м^{2}с, а воды – $\rho_2 c_2 \cong 1{,}6\cdot 10^6$ кг/м^{2}с, т.е. поверхность воды можно рассматривать в данном случае как твёрдое тело, от которого отражается, возбуждаемая камертоном звуковая волна. В этой связи при падении и отражении волны на поверхности жидкости должен находиться узел стоячей волны, а на уровне верхнего края сосуда – пучность.

2. Расстояние между соседними узлом и пучностью равно $\lambda/4$, расстояние между соседними узлами или пучностями равны $\lambda/2$, что даёт основание записать для высоты воздушного столба воздуха следующее условие:

$$h - H = \frac{\lambda}{4} + m\frac{\lambda}{2}.$$

3. Определим длину волны в воздухе при c_1 = 340 м/с

$$\lambda = \frac{c_1}{\nu} = \frac{340}{680} = 0{,}5\,\text{м}.$$

4. Определим усиления звука при m = 0

$$h_{0(1)} = h - H = \frac{\lambda}{4} = 0{,}125\,\text{м};$$

при m = 1

$$h_{0(2)} = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} = 0{,}15\,\text{м};$$

при m =2

$$h_{0(3)} = \frac{\lambda}{4} + \lambda = 0{,}625\,\text{м};$$

при m = 3

$$h_{0(4)} = \frac{\lambda}{4} + 1{,}5\lambda = 0{,}875\,\text{м};$$

---

235. Труба длиной l = 1,2 м, заполненная воздухом при температуре T = 300 К, расположена вблизи акустического излучателя. Найти минимально возможную частоту колебаний воздушного столба для открытой и закрытой с обоих концов трубы.

Решение

1. Определим скорость звука при заданной температуре:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma R T}{\mu}},$$

где $\gamma = (i+2)/i = 1{,}33$ – показатель адиабаты, R = 8,3 Дж/моль·К – универсальная газовая постоянная, $\mu \cong 28\cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса воздуха:

$$c = \sqrt{\frac{1{,}33\cdot 8{,}3\cdot 300}{28\cdot 10^{-3}}} = 344\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

2. Колебания воздушного столба в открытой трубе будут протекать с минимальной частотой в том случае, когда на длине трубы будет укладываться половина длины волны

$$\ell = \frac{\lambda}{2}; \quad \lambda_{max} = 2\ell = 2{,}4\,\text{м}\,.$$

3. Соответствующая условию λ_{max} минимальная частота:

$$\nu_{min} = \frac{c}{\lambda_{max}} = \frac{344}{2{,}4} = 143\,\text{Гц}\,.$$

4. В случае закрытой трубы будет образовываться стоячая волна, для которого условие для λ_{max} примет следующий вид:

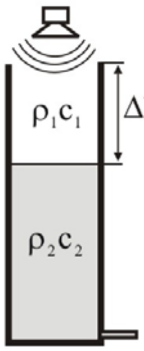
$$\ell = \frac{\lambda}{4}; \quad \lambda_{max} = 4\ell = 4{,}8\,\text{м}\,,$$

соответствующая минимальная частота будет равна:

$$\nu_{min} = \frac{c}{\lambda_{max}} = \frac{344}{4{,}8} = 71{,}7\,\text{Гц}\,.$$

---

236. Вертикальный стеклянный сосуд заполнен водой. Над сосудом помещён звучащий на частоте 440 Гц громкоговоритель. Когда уровень воды в сосуде при открывании нижнего крана, опустился на Δy_1 = 19,5 см, звук камертона достиг максимального значения. Определить скорость звука в воздухе.



Решение

1. Усиление силы звука при понижении уровня жидкости в сосуде будет происходить, когда высота воздушного столба над водой будет кратна нечётному количеству четвертьволновых отрезков, т.е.

$$\Delta y_1 = \frac{\lambda}{4}; \quad \Delta y_2 = 3\frac{\lambda}{4}; \quad \Delta y_3 = 5\frac{\lambda}{4}\,.$$

2. Величина Δy_1, таким образом, даёт основание определить длину волны:

$$\lambda = 4\Delta y_1 = 0{,}78\,\text{м}\,.$$

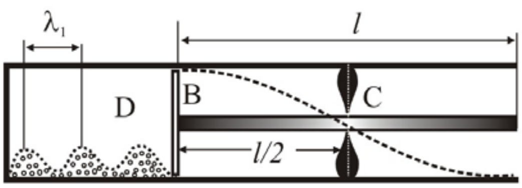
3. Скорость звука в воздухе:

$$c_1 = \lambda\nu = 343\,\text{м/с}\,.$$

---

237. Для измерения скорости звуковых волн в латунном стержне A длиной l = 0,8 м, закреплённом в его среднем сечении C используют метод акустической интерферометрии, когда на одном из концов стержня помещается лёгкий диск B. В закрытом цилиндрическом воздушном пространстве D возбуждается стоячая волна, которая визуализируется мелкодисперсным порошком. В одном из измерений длина стоячих волн оказалась равной λ_1 = 8,5 см. Определить скорость звука в латуни.

Решение



1. Частоту колебаний стержня определим по длине стоячей волны λ_1 в воздухе, принимая скорость звука в воздухе c_1 = 340 м/с

$$\nu = \frac{c_1}{\lambda_1}.$$

2. Первая собственная частота стержня соответствует максимумам смещения его торцов и максимуму колебательной скорости в среднем сечении:

$$\lambda_2 = \ell.$$

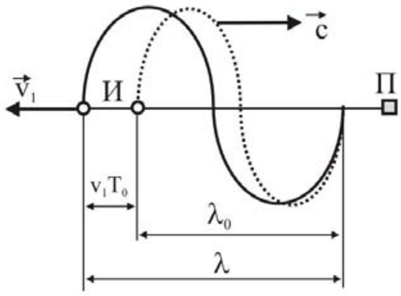
3. Скорость звука в латуни определиться как:

$$c_2 = \ell\frac{c_1}{\lambda_1} = 0{,}8\frac{340}{8{,}5\cdot 10^{-2}} = 3200\,\frac{м}{с}.$$

---

238. Локомотив, приближающийся к неподвижному наблюдателю со скоростью v_1 = 144 км/ч, даёт гудок на частоте основного тома ν = 300 Гц. Определить кажущуюся частоту, воспринимаемого наблюдателем звука. Как изменится эта частота при удалении локомотива?

Решение



1. Изменение частоты воспринимаемого звука будет наблюдаться вследствие эффекта Доплера, который фактически заключается в том, что при приближении движущегося источника звука возбуждаемый его сиреной волны воспринимаются как более высокие, а при удалении от наблюдателя – как более низкие.

2. Рассмотрим вначале вариант удаления источника со скоростью v_1. За время одного периода T_0 источник смещается в среде на расстояние

$$v_1T_0 = \frac{v_1}{\nu_0},$$

где ν_0 – частота колебаний источника. Естественно, что длина волны движущегося источника λ будет отличаться от длины волны неподвижного источника λ_0

$$\lambda = \lambda_0 + v_1T_0 = (c + v_1)T_0 = \frac{c + v_1}{\nu_0}.$$

3. Частота волны, воспринимаемая приёмником, определится уравнением:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{\nu_0}{1 + \frac{v_1}{c}}.$$

4. В случае приближения приёмника уравнение частоты перепишется следующим образом

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{\nu_0}{1 - \frac{v_1}{c}}.$$

5. Подставим в уравнения частоты заданные по условию задачи величины:

$$\nu_{прибл.} = \frac{300}{1 - \frac{40}{340}} = 340\,Гц;$$

$$\nu_{удал.} = \frac{300}{1 + \frac{40}{340}} = 268\,Гц.$$

---

239. Мимо неподвижного электровоза, сирена которого излучает тональный сигнал на частоте ν_0 = 300 Гц движется пассажирский поезд со скоростью u = 40 м/с. Какую частоту воспринимает пассажир поезда при приближении и удалении от электровоза?

Решение

1. Уравнения эффекта Доплера для рассматриваемого в задаче случая можно представить одним соотношением:

$$\nu = \frac{c \pm u}{c}\nu_0,$$

$$\nu_{\text{прибл.}} = \frac{c+u}{c}\nu_0 = \frac{340+40}{340}300 = 335\,\text{Гц},$$

$$\nu_{\text{удал.}} = \frac{c-u}{c}\nu_0 = \frac{340-40}{340}300 = 265\,\text{Гц}.$$

---

240. Мимо неподвижного наблюдателя проходит электропоезд. При приближении электропоезда наблюдатель воспринимает кажущуюся частоту сирены ν_1 = 1100 Гц, а при удалении поезда – ν_2= 900 Гц. Определить скорость электропоезда и истинную частоту излучаемого звука.

Решение

1. Выразим из уравнения эффекта Доплера величину ν_0:

$$\nu_0 = \frac{\nu_1 c}{c+u}.$$

2. Подставим значение ν_0 в уравнение меньшей частоты:

$$\nu_2 = \frac{c-u}{c}\frac{\nu_1 c}{c+u} = \nu_1\frac{c-u}{c+u}.$$

3. Выразим скорость электропоезда:

$$\nu_2(c+u) = \nu_1(c-u),$$

$$u = \frac{c(\nu_1-\nu_2)}{\nu_1+\nu_2} = \frac{340\cdot 200}{2000} = 34\frac{\text{м}}{\text{с}} = 122\frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

4. Подставим значение скорости электропоезда u исходное уравнение и определим частоту излучения его сирены:

$$\nu_0 = \frac{\nu_1 c}{c+u} = \frac{1100\cdot 340}{340+34} = 1000\,\text{Гц}.$$

---

241. В момент прохождения электропоезда мимо неподвижного наблюдателя он воспринимает скачкообразное изменение тональности сирены локомотива. Определить относительное изменение частоты $\Delta\nu/\nu_0$, если скорость поезда равна u = 15 м/с.

Решение

1. В соответствие с уравнениями эффекта Доплера образуем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \nu_{\text{прибл.}} &= \frac{c+u}{c}\nu_0; \\ \nu_{\text{удал.}} &= \frac{c-u}{c}\nu_0. \end{aligned}\right\}$$

2. Запишем величину $\Delta\nu/\nu_0$, используя систему уравнений:

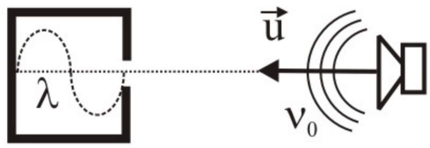
$$\nu_{прибл.} - \nu_{удал.} = \Delta\nu = \frac{c+u}{c}\nu_0 - \frac{c-u}{c}\nu_0 = \nu_0\left(\frac{c+u}{c} - \frac{c-u}{c}\right),$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{2u}{c} = \frac{30}{340} = 0{,}09.$$

---

242. Неподвижный резонатор, настроенный на длину волны $\lambda = 4{,}2\cdot10^{-2}$ м и движущийся источник звука с частотой излучения ν_0 = 8 кГц расположены на одной прямой. В каком направлении и с какой постоянной скоростью должен двигаться источник, чтобы звучание резонатора было максимальным?

Решение



1. Определим первую собственную частоту резонатора:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = 8100\,Гц.$$

2. Поскольку $\nu > \nu_0$ источник звука должен приближаться к резонатору со скоростью u, при этом:

$$\nu = \frac{c+u}{c}\nu_0,$$

откуда:

$$u = \frac{c(\nu - \nu_0)}{\nu_0} = \frac{340\cdot100}{8000} = 4{,}2\,\frac{м}{с}.$$

---

243. Поезд движущейся мимо неподвижного наблюдателя со скоростью u = 120 км/ч, даёт звуковой сигнал продолжительностью τ_0 = 5 с. Какова будет кажущаяся продолжительность сигнала при приближении и удалении поезда при скорости звука c = 348 м/с?

Решение

1. При приближении поезда к наблюдателю при фиксированном числе колебаний $\tau = NT$ кажущаяся частота будет увеличиваться, период, соответственно уменьшаться, поэтому время восприятия N колебаний можно записать следующим образом:

$$\tau_{прибл.} = \frac{c-u}{c}\tau_0 = \frac{348-33{,}3}{348}5 = 4{,}52\,с.$$

2. При удалении поезда длительность сигнала будет восприниматься как:

$$\tau_{удал.} = \frac{c+u}{c}\tau_0 = 5{,}48\,с.$$

---

244. Скорый поезд со скоростью u = 20 м/с приближается к станции, на которой стоит электричка, которая подаёт сигнал с частотой ν_0 = 600 Гц. Определить кажущуюся частоту, воспринимаемую машинистом движущегося скорого поезда.

Решение

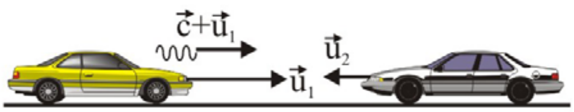
1. В данном случае эффект Доплера проявляется потому, что имеется движущийся источник и неподвижный приёмник. Кажущаяся частота определяется уравнением:

$$\nu = \frac{c}{c-u}\nu_0 = \frac{340}{340-20}600 = 638\,\text{Гц}\,.$$

---

245. На скоростном загородном шоссе сближаются два автомобиля со скоростями u_1 = 30 м/с и u_2 = 20 м/с. Первый автомобиль подаёт сигнал на частоте ν_1 = 600 Гц. Чему равна кажущаяся частота звука ν_2, воспринимаемого водителем второй машины во время сближения и удаления? Изменится ли результата при подаче сигнала второй машиной? Скорость звука принять равной c = 332 м/с.

Решение



1. При сближении автомобилей и при подаче сигнала первым автомобилем кажущаяся частота, воспринимаемая водителем второго автомобиля определится уравнением:

$$\nu_2 = \frac{c+u_2}{c-u}\nu_1 = \frac{332+20}{332-30}600 = 699\,\text{Гц}\,.$$

2. При удалении автомобилей кажущаяся частота составит:

$$\nu_2^* = \frac{c-u_2}{c+u_1}\nu_2 = \frac{332-20}{332+30}600 = 517\,\text{Гц}\,.$$

3. При подаче сигнала вторым автомобилем в режиме сближения:

$$\nu_1^* = \frac{c+u_1}{c-u_2}\nu_1 = \frac{332+30}{332-20}600 = 696\,\text{Гц}\,,$$

в режиме удаления:

$$\nu_1^* = \frac{c-u_1}{c+u_3}\nu_2 = \frac{332-30}{332+20}600 = 515\,\text{Гц}\,.$$

---

246. При скоростных испытаниях гоночного автомобиля, движущегося мимо контрольного пункта со скоростью u = 360 км/ч, частота основного тона работающего двигателя меняется скачком. Какой процент от истинной частоты основного тона двигателя составляет скачёк? Скорость звука принять равной c = 340 м/с.

Решение

1. В соответствие с принципом Доплера частота воспринимаемого звука определяется уравнением:

$$\nu_1 = \frac{c+u_{пр}}{c-u_{ист}}\nu_0\,,$$

где ν_0 – истинная частота основного тона, излучаемого работающим двигателем, ν_1 – кажущаяся частота. В рассматриваемом случае скорость приёмника $u_{пр} = 0$, поэтому:

$$\nu_1 = \frac{c}{c-u_{ист}}\nu_0\,.$$

2. При движении болида к наблюдателю уравнение перепишется следующим образом:

$$\nu_1 = \frac{c}{c-u_{ист}}\nu_0\,,$$

при удалении от наблюдателя:

$$\nu_1^* = \frac{c}{c+u}\nu_0 .$$

3. Определим величину доплеровского скачка частоты:

$$\Delta\nu = \nu_1 - \nu_1^* = \frac{c}{c-u}\nu_0 - \frac{c}{c+u}\nu_0 ,$$

$$\Delta\nu = c\nu_0\left(\frac{1}{c-u} - \frac{1}{c+u}\right); \quad \frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{1}{c-u} - \frac{1}{c+u} ,$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = 340\left(\frac{1}{340-100} - \frac{1}{340+100}\right) \cong 64{,}6\,\% .$$

---

247. Автомобиль на скоростном шоссе проходит мимо неподвижного наблюдателя со скоростью u = 180 км/ч. Наблюдатель воспринимает доплеровский скачёк частоты основного тона сигнала автомобиля $\Delta\nu$ = 200 Гц. Принимая скорость звука в воздухе равной c = 340 м/с определить частоту основного тона сигнала.

Решение

1. Воспользуемся уравнениями эффекта Доплера:

$$\nu_1 = \frac{c}{c-u}\nu_0 ; \quad \nu_1^* = \frac{c}{c+u}\nu_0 .$$

2. Доплеровский скачёк частоты $\Delta\nu$

$$\Delta\nu = \nu_1 - \nu_1^* = \frac{2uc\nu_0}{(c-u)(c+u)} .$$

3. Разрешим уравнение относительно ν_0

$$\nu_0 = \frac{(c-u)(c+u)\Delta\nu}{2uc} = \frac{(340-50)(340+50)\cdot 200}{2\cdot 340\cdot 50} \cong 665\,\text{Гц} .$$

---

248. По цилиндрической трубе диаметром d = 0,2 м и длиной l = 5 м, расположенной в сухом воздухе, распространяется акустическая волна, обладающая средней за период интенсивностью < I > = 50 мВт/м^2. Найти среднюю за период энергию акустического поля < W >, заключенного в трубе.

Решение

1. Определим объёмную плотность акустической энергии в трубе

$$I = \langle\varpi\rangle c; \quad \langle\varpi\rangle = \frac{I}{c} .$$

2. Энергия акустического поля, заключенного в трубе

$$\langle W\rangle = \langle\varpi\rangle V = \frac{I}{c}\frac{\pi d^2\ell}{4} = \frac{5\cdot 10^{-2}\cdot 3{,}14\cdot 4\cdot 10^{-2}\cdot 5}{4\cdot 340} \cong 2{,}3\cdot 10^{-5}\,\text{Дж} .$$

---

249. Интенсивность звука равна I = 1 Вт/м^2. Определить среднюю объёмную плотность энергии акустической волны < ϖ > при скорости звука, равной c = 332 м/с.

Решение

$$I = \langle\varpi\rangle c; \quad \langle\varpi\rangle = \frac{I}{c} = \frac{1}{332} = 3\cdot 10^{-3}\,\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} .$$

---

250. Изотропный источник излучает акустическую мощность N = 10 Вт. Найти величину средней объёмной плотности энергии $<\varpi>$ на расстоянии r = 0,1 м от источника при температуре сухого воздуха T = 250 К.

Решение

1. Интенсивность точечного изотропного источника связана с его мощностью следующим соотношением:

$$I = \frac{N}{4\pi r^2}.$$

2. Скорость звука в заданных условиях:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}.$$

3. Средняя объёмная плотность акустической энергии:

$$<\varpi> = \frac{I}{c} = \frac{N}{4\pi r^2\sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}} = \frac{10}{12{,}56\cdot 10^{-2}\sqrt{\frac{1{,}33\cdot 8{,}3\cdot 250}{28\cdot 10^{-3}}}} \cong 0{,}254\,\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}.$$

---

251. Определить мощность точечного изотропного источника акустических волн N, если на расстоянии r = 25 м интенсивность составляет I = 20 мВт/м^2. Найти среднюю объёмную плотность акустической энергии $<\varpi>$ на заданном расстоянии.

Решение

1. Определим мощность источника:

$$I = \frac{N}{4\pi r^2};\quad N = I\cdot 4\pi r^2 = 2\cdot 10^{-2}\cdot 12{,}56\cdot 625 = 157\,\text{Вт}.$$

2. Средняя объёмная плотность акустической энергии:

$$<\varpi> = \frac{I}{c} = \frac{2\cdot 10^{-2}}{340} \cong 60\,\frac{\text{мкДж}}{\text{м}^3}.$$

---

252. Определить удельное акустическое сопротивление Z_S воздуха при нормальных условиях.

Решение

1. Физические характеристики воздуха при нормальных условиях: температура абсолютная T = 273, 15 К; давление p = $1\cdot 10^5$ Па; молярная масса $\mu = 29\cdot 10^{-3}$ кг/моль; показатель адиабаты $\gamma = (I + 2)/I = 1{,}4$, плотность – $\rho = 1{,}32$ кг/м^3.

2. Определим скорость звука в воздухе при заданных условиях:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{1{,}4\cdot 8{,}3\cdot 273}{29\cdot 10^{-3}}} \cong 330\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

3. Удельное акустическое сопротивление воздуха:

$$Z_S = \rho c = 1{,}32\cdot 330 = 436\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^2\cdot\text{с}} \equiv 436\,\frac{\text{Па}\cdot\text{с}}{\text{м}}.$$

---

253. Определить удельное акустическое сопротивление воды Z_S при температуре T= 290 К.

Решение

1. Скорость звука в жидкости определяется уравнением:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\beta\rho}} = \sqrt{\frac{1}{4,9\cdot 10^{-8}\cdot 10^{3}}} = 1430\,\frac{м}{с},$$

где $\beta = 4,9\cdot 10^{-10}$ Па$^{-1}$ – сжимаемость воды, $\rho \cong 1\cdot 10^3$ кг/м^3 – плотность воды.

2. Удельное акустическое сопротивление:

$$Z_S = \rho c = \rho\sqrt{\frac{1}{\beta\rho}} = \sqrt{\frac{\rho}{\beta}} = 1,43\,\frac{МПа\cdot с}{м}.$$

---

254. Найти максимальную колебательную скорость частиц кислорода, при прохождении через него акустической волны с амплитудным значением давления p_m = 0,2 Па при температуре T = 300 К и нормальном атмосферном давлении.

Решение

1. Звуковое давление связано с амплитудным значением колебательной скорости уравнением:

$$p_m = \rho c\dot{\xi}_m.$$

2. Определим плотность кислорода и скорость звука в нём при заданных условиях, воспользовавшись уравнением Клапейрона – Менделеева:

$$p_0 V = \frac{m}{\mu}RT; \quad p_0\mu = \rho RT; \quad \rho = \frac{p_0\mu}{RT} = \frac{10^5\cdot 16\cdot 10^{-3}}{8,3\cdot 300} = 0,643\,\frac{кг}{м^3}.$$

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{1,4\cdot 8,3\cdot 300}{16\cdot 10^{-3}}} = 467\,\frac{м}{с}.$$

3. Разрешим уравнение p_m относительно амплитудного значения колебательной скорости и подставим найденные величины:

$$\dot{\xi}_m = \frac{p_m}{\rho c} = \frac{0,2}{0,643\cdot 467} = 6,7\cdot 10^{-4}\,\frac{м}{с}.$$

---

255. Найти акустическое сопротивление воздуха, находящегося в трубе диаметром d = 0,2 м при температуре T = 300 К и давлении p = $2\cdot 10^5$ Па.

Решении

1. Воспользовавшись уравнением Клапейрона – Менделеева, определим плотность воздуха в трубе:

$$\rho = \frac{p\mu}{RT} = \frac{2\cdot 10^5\cdot 29\cdot 10^{-3}}{8,3\cdot 300} = 2,33\,\frac{кг}{м^3}.$$

2. Скорость звука в трубе:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{1,4\cdot 8,3\cdot 300}{29\cdot 10^{-3}}} = 346\,\frac{м}{с}.$$

3. Акустическое сопротивление:

$$Z_A = \frac{Z_S}{s} = \frac{4\rho c}{\pi d^2} = \frac{4\cdot 2,33\cdot 346}{3,14\cdot 4\cdot 10^{-2}} = 2,57\cdot 10^4\,\frac{Па\cdot с}{м^3}.$$

256. Через азот при температуре T = 290 К и давлении p = 104 кПа проходит акустическая волна с частотой колебаний частиц среды ν = 400 Гц. Амплитуда звукового давления при этом составляет p_m = 0,5 Па. Найти амплитудное значение смещения частиц среды из равновесного положения.

Решение

1. Определим скорость звука в азоте при заданных условиях:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{1{,}4\cdot 8{,}3\cdot 290}{28\cdot 10^{-3}}} = 346\,\frac{м}{с}.$$

2. Плотность азота:

$$\rho = \frac{p\mu}{RT} = \frac{1{,}04\cdot 10^{5}\cdot 28\cdot 10^{-3}}{8{,}3\cdot 290} = 1{,}21\,\frac{кг}{м^3}.$$

3. Запишем уравнение звукового давления, выразив его величину через амплитудное значение смещения:

$$p_m = 2\pi\nu\rho c\xi_m;\quad \xi_m = \frac{p_m}{2\pi\nu\rho c} = \frac{0{,}5}{6{,}28\cdot 400\cdot 1{,}21\cdot 346} = 475\,нм.$$

---

257. Найти амплитуду звукового давления, если частицы воздуха колеблются с амплитудой $\xi_m = 1\cdot 10^{-6}$ м на частоте ν = 600 Гц.

Решение

1. Будем считать, что колебания частиц воздуха происходят при нормальных условиях: T = 273 К, $p = 1{,}04\cdot 10^5$ Па, при этом $\mu = 29\cdot 10^{-3}$ кг/моль.

2. Плотность воздуха и скорость звука при нормальных условиях

$$\rho = \frac{p\mu}{RT} = \frac{1{,}04\cdot 10^{5}\cdot 29\cdot 10^{-3}}{8{,}3\cdot 273} = 1{,}33\,\frac{кг}{м^3}.$$

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{1{,}4\cdot 8{,}3\cdot 273}{29\cdot 10^{-3}}} = 330\,\frac{м}{с}.$$

3. Амплитудное значение звукового давления

$$p_m = 2\pi\nu\rho c\xi_m = 6{,}28\cdot 1{,}33\cdot 600\cdot 330\cdot 10^{-6} = 1{,}65\,Па.$$

---

258. Удельное акустическое сопротивление воздуха составляет Z_S = 420 Па·с/м. На расстоянии r = 100 м от изотропного источника акустических волн амплитудное значение давления равно p_m = 0,2 Па. Определить мощность источника волн N.

Решение

1. Определим амплитудное значение колебательной скорости частиц воздуха при прохождении акустической волны, воспользовавшись уравнением:

$$p_m = \rho c\dot{\xi}_m;\quad \dot{\xi}_m = \frac{p_m}{Z_S} = 4{,}76\cdot 10^{-4}\,\frac{м}{с}.$$

2. Приняв плотность воздуха равной ρ = 1,33 кг/м^3, найдём объёмную плотность акустической энергии:

$$<\varpi> = \frac{1}{2}\rho\dot{\xi}^2 = 0{,}5\cdot 1{,}33\cdot 2{,}27\cdot 10^{-7} = 1{,}7\cdot 10^{-7}\,\frac{Дж}{м^3}.$$

3. Интенсивность акустической волны:

$$I = <\varpi> c = 1{,}51\cdot 10^{-7}\cdot 330 = 4{,}98\cdot 10^{-5}\ \text{Вт}/\text{м}^2 .$$

4. Акустическая мощность источника:

$$N = 4\pi r^2 I = 12{,}56\cdot 10^{4}\cdot 4{,}98\cdot 10^{-5} = 6{,}25\ \text{Вт}.$$

---

259. Для точечного источника акустических волн мощностью N = 1 Вт, находящимся в воздухе найти на расстоянии r = 100 м амплитудное значение звукового давления p_m.

Решение

1. Интенсивность акустического поля, создаваемого источником

$$I = \frac{N}{4\pi r^2}.$$

2. Выразим среднюю объёмную плотность акустической энергии рассматриваемого источника через его интенсивность и амплитуду акустического давления:

$$<\varpi> = \frac{N}{4\pi r^2 c}; \quad <\varpi> = \frac{1}{2}\frac{p_m^2}{\rho c^2}.$$

3. Совместим последние уравнения и разрешим относительно искомой величины:

$$\frac{N}{4\pi r^2 c} = \frac{p_m^2}{2\rho c^2}; \quad p_m = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{NZ_s}{2\pi}} = \frac{1}{100}\sqrt{\frac{1\cdot 420}{6{,}28}} = 8{,}2\cdot 10^{-2}\ \text{Па}.$$

---

260. В сухом воздухе при нормальных условиях интенсивность звука составила I = 10^{-11} Вт/м^2. Определить амплитуду акустического давления p_m.

Решение

1. Определим скорость звука в воздухе при нормальных условиях, т.е. при $T_0 = 273$ К, $p_0 = 10^5$ Па, $\mu = 29\cdot 10^{-3}$ кг/моль

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{1{,}4\cdot 8{,}3\cdot 273}{29\cdot 10^{-3}}} = 330\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

2. Найдём плотность воздуха при нормальных условиях:

$$\rho = \frac{p\mu}{RT} = \frac{1{,}04\cdot 10^5\cdot 29\cdot 10^{-3}}{8{,}3\cdot 273} = 1{,}33\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

3. Удельное акустическое сопротивление воздуха:

$$Z_S = \rho c = 439\ \text{Па}\cdot\text{с}/\text{м}.$$

4. Воспользуемся соотношениями:

$$<\varpi> = \frac{I}{c} = \frac{1}{2}\frac{p_m^2}{\rho c^2}; \quad I = \frac{1}{2}\frac{p_m^2}{2\rho c}; \quad \Rightarrow p_m = \sqrt{2IZ_S} = 8{,}8\cdot 10^{-5}\ \text{Па}.$$

---

261. Слуховой орган среднего статистического человека может воспринимать акустические колебания в интервале частот ν_{min} = 22 Гц, ν_{max} = 18 кГц. Определить диапазон длин волн для температур окружающего воздуха t_1 = – 25 ^{0}С и t_2 = 40 ^{0}С.

Решение

1. Определим скорость звука при заданных условиях принимая внешнее давление равным $p = 10^5$ Па, молярную массу $\mu = 29\cdot10^{-3}$ кг/моль, число степеней свободы молекул воздуха $i = 5$, показатель адиабаты $\gamma = 1{,}4$

$$c_1 = \sqrt{\frac{\gamma R T_1}{\mu}} = \sqrt{\frac{1{,}4\cdot 8{,}3\cdot 248}{29\cdot 10^{-3}}} = 315\,\frac{\text{м}}{\text{с}},$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{\gamma R T_2}{\mu}} = \sqrt{\frac{1{,}4\cdot 8{,}3\cdot 313}{29\cdot 10^{-3}}} = 354\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

2. Искомые диапазоны длин волн:

$$\lambda_{max} = \frac{c_1}{\nu_{min}} = \frac{315}{22} = 14{,}3\,\text{м}.$$

$$\lambda_{min(1)} = \frac{c_2}{\nu_{max}} = \frac{315}{18\cdot 10^3} = 1{,}75\cdot 10^{-2}\,\text{м}.$$

---

262. Сравнить скорости распространения акустических волн в стали и меди, приняв модуль Юнга для стали E_{Fe} = 216 ГПа, для меди E_{Cu} = 118 ГПа.

Решение

1. Примем величину плотности стали $\rho_{Fe} = 7{,}7\cdot10^3$ кг/м^3, плотности меди – $\rho_{Cu} = 8{,}6\cdot10^3$ кг/м^3 и определим скорости звука в заданных металлах:

$$c_{Fe} = \sqrt{\frac{E_{Fe}}{\rho_{Fe}}} = \sqrt{\frac{2{,}16\cdot 10^{11}}{7{,}7\cdot 10^3}} = 5296\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

$$c_{Cu} = \sqrt{\frac{E_{Cu}}{\rho_{Cu}}} = \sqrt{\frac{1{,}18\cdot 10^{11}}{8{,}6\cdot 10^3}} = 3360\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

2. Определим отношение скоростей звука в металлах

$$\frac{c_{Fe}}{c_{Cu}} = 1{,}58.$$

---

263. В результате акустических измерений было установлено, что скорость звука в ацетоне равна c_1 = 1190 м/с при плотности ρ_1 = 790 кг/м^3 а в глицерине c_2 = 1950 м/с при плотности ρ_2 = 1260 кг/м^3. В каком соотношении находятся сжимаемости этих жидкостей?

Решение

1. Модуль Юнга является величиной, обратно пропорциональной сжимаемости $\beta = 1/E$, с другой стороны:

$$E = \rho c^2,$$

откуда:

$$\beta = \frac{1}{\rho c^2}.$$

2. Определим далее сжимаемости заданных жидкостей и найдём их отношение:

$$\beta_1 = \frac{1}{\rho_1 c_1} = \frac{1}{790 \cdot 1190^2} \cong 9 \cdot 10^{-10} \frac{1}{\text{Па}}.$$

$$\beta_2 = \frac{1}{\rho_2 c_2} = \frac{1}{1260 \cdot 1950^2} \cong 2 \cdot 10^{-10} \frac{1}{\text{Па}}.$$

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = 4{,}5.$$

---

264. Определить разность глубин океана, если в первой точке измерения интервал времени между акустической посылкой и отражённым от дна сигналом составил τ_1 = 6 с, а во второй точке это время было равным – τ_2 = 1 с. Принять сжимаемость морской воды равной $\beta = 4{,}6 \cdot 10^{-10}$ Па$^{-1}$, плотность $\rho = 1{,}03 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение

1. Определим скорость звуковых волн в морской воде:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\beta\rho}} = \sqrt{\frac{1}{4{,}6 \cdot 10^{-10} \cdot 1{,}03 \cdot 10^3}} = 1450 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

2. Разность глубин океана в точках измерения составит:

$$2h_1 = c\tau; \quad h_1 = \frac{c\tau_1}{2} = \frac{1450 \cdot 6}{2} = 4530\,\text{м}.$$

$$h_2 = \frac{c\tau_2}{2} = \frac{1540 \cdot 1}{2} = 770\,\text{м},$$

$$\Delta h = h_1 - h_2 = 3760\,\text{м}.$$

---

265. Измерения показали, что среднеквадратичная скорость молекул водяного пара составила < v > = 600 м/с. Определить скорость распространения акустической волны.

Решение

1. Запишем уравнения для среднеквадратичной скорости молекул и скорости звука:

$$< v >= \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}; \quad c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}.$$

2. Разделим уравнения друг на друга:

$$c =< v > \sqrt{\frac{\gamma}{3}} = 600\sqrt{\frac{1{,}33}{3}} \cong 400 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

---

266. Пары ксенона в сферической проекционной лампе находятся при давлении $p = 2 \cdot 10^5$ Па и температуре T = 500 К. Определить скорость звука в данном состоянии газа. Как изменится результат при заполнении колбы парами ртути?

Решение

1. Ксенон является одноатомным газом, молекула которого обладает тремя степенями свободы i = 3. молярная масса газа – $\mu_1 = 131{,}3 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, показатель адиабаты $\gamma = (i+2)/i = 1{,}67$.

2. Скорость распространения звука в ксеноне

$$c_{Xe} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu_1}} = \sqrt{\frac{1{,}67 \cdot 8{,}3 \cdot 500}{131{,}3 \cdot 10^{-3}}} = 230\,\frac{м}{с}.$$

3. При заполнении колбы папами ртути скорость звука изменится, так как молярная масса ртути $\mu_2 = 200{,}59 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$$c_{Hg} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu_2}} = \sqrt{\frac{1{,}67 \cdot 8{,}3 \cdot 500}{200{,}59 \cdot 10^{-3}}} = 186\,\frac{м}{с}.$$

---

267. Известно, что средняя молярная кинетическая энергия поступательного движения молекул атомарного водорода составляет $<\varepsilon_\mu> = 2 \cdot 10^2$ Дж/моль. Определить скорость звука в этом газе.

Решение

1. Уравнение средней кинетической энергии поступательного движения молекул даёт основание для определения температуры этого газа:

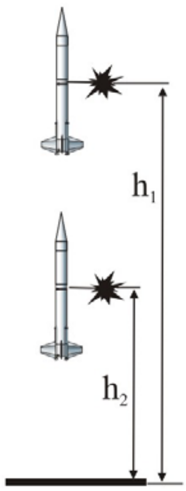
$$<\varepsilon_\mu> = \frac{3}{2}RT; \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2<\varepsilon_\mu>}{3R};$$

2. Скорость звука в данном состоянии газа определится уравнением:

$$c = \sqrt{\frac{2\gamma<\varepsilon_\mu>}{3 \cdot \mu}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}67 \cdot 2 \cdot 10^2}{3 \cdot 10^{-3}}} = 472\,\frac{м}{с}.$$

---

268. Измерение температуры разреженного газа, включая верхние слои атмосферы, термометрическими методами невозможно, так как традиционные термометры ввиду малой концентрации молекул приходят в термодинамическое равновесие длительное время. Измерение температуры возможно с помощью вертикально запускаемых ракет, на борту которых имеются звуковые гранаты. Определить температуру на высоте h = 20 км, если между взрывами гранат на высоте h_1 = 30 км и h_2 = 28 км зафиксирована задержка прихода регистрируемого на месте старта ракеты звука на $\Delta\tau$ = 5 с.



Решение

1. Скорость акустической волны в газах, наряду с их физическими свойствами, определяется и температурой:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}.$$

2. За фиксируемое время $\Delta\tau$ звуковая волна преодолевает расстояние $\Delta h = h_1 - h_2$, другими словами,

$$\Delta h = c\Delta\tau; \quad c = \frac{h_1 - h_2}{\Delta\tau}.$$

3. Приравняем уравнения:

$$\frac{\gamma RT}{\mu} = \frac{(h_1 - h_2)^2}{\Delta\tau^2}.$$

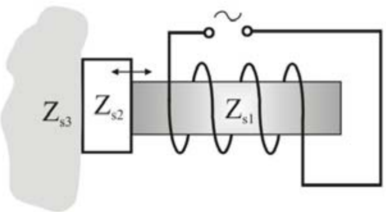
4. Разрешим уравнение относительно температуры:

$$T = \frac{\mu}{\gamma R}\frac{(h_1 - h_2)^2}{\Delta\tau^2} = \frac{29 \cdot 10^{-3}}{1{,}4 \cdot 8{,}3}\frac{4 \cdot 10^6}{48} = 207\,K\left(-66\,^0C\right).$$

---

269. Для увеличения коэффициента полезного действия ультразвуковых магнитострикционных излучателей, нагружаемых на воду, для их согласования со средой снабжают специальными накладками. Из какого материала следует изготавливать согласующий элемент для никелевого преобразователя, излучающего в воду. Плотность никеля ρ_1 = 8,75·г/см^3, модуль Юнга – E_1 = 2·10^{11}Н/м^2, скорость звука в никеле с = 4785 м/с.

Решение



1. Наибольший коэффициент полезного действия излучателя можно получить, когда его удельное акустическое сопротивление Z_{S1} будет равно удельному акустическому сопротивлению среды, в данном случае – воды.

2. Удельное акустическое сопротивление воды равно:

$$Z_{S3} = \rho_3 c_3 = 1\cdot 10^3 \cdot 1500 = 1{,}5\cdot 10^6 \text{ кг}/\text{м}^2\text{с}.$$

в то время как удельное сопротивление никеля составляет

$$Z_{S1} = \rho_1 c_1 = 8{,}75\cdot 10^3 \cdot 4785 = 4{,}2\cdot 10^7 \text{ кг}/\text{м}^2\text{с}.$$

3. Анализ удельных акустических сопротивлений показывает, что наиболее совместимы с водой накладки из эбонита, плотность которого ρ_2 = 1,15·10^3 кг/м^3, скорость звука – c_2 = 1570 м/с. Удельное акустическое сопротивление эбонита:

$$Z_{S2} = \rho_2 c_2 = 1{,}8\cdot 10^6 \text{кг}/\text{м}^2\text{с},$$

что не на много отличается от удельного акустического сопротивления воды.

---

270. Интенсивность акустических волна равна I_1 = 10^{-10} Вт/м^2 и I_2 = 0,01 Вт/м^2. Определить уровень их интенсивности L_P.

Решение

1. Уровень интенсивности (уровень акустической мощности) измеряется в децибелах и определяется уравнением:

$$L_P = 10\lg\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

где I_0 = 1·10^{-12} Вт/м^2 – нулевой уровень интенсивности, за который принимается порог слышимости среднестатистического органа слуха взрослого человека на частоте ν = 1 кГц, соответствующее стандартному акустическому давлению $p_0 \cong 2\cdot 10^{-5}$ Па.

2. Уровень интенсивности заданных акустических волн на основании уравнения (1) определится следующим образом:

$$L_{P(1)} = 10\lg\left(\frac{10^{-10}}{10^{-12}}\right) = 20\,\text{Дб}.$$

$$L_{P(2)} = 10\lg\left(\frac{0{,}01}{10^{-12}}\right) = 100\,\text{Дб}.$$

---

271. Точечный изотропный акустический источник обеспечивает на расстоянии r_1 = 24 м уровень интенсивности звука $L_{P(1)}$ = 32 дБ. Определить уровень интенсивности источника на удалении r_2 = 16 м.

Решение

1. Используя взаимосвязь между интенсивностью и мощностью источника, можно записать следующие соотношения:

$$N = 4\pi r_1^2 I; \quad N = 4\pi r_2^2 I,$$

$$I_1 r_1^2 = I_2 r_2^2; \quad \Rightarrow I_2 = I_1 \frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

2. Поделим обе части уравнения на величину пороговой интенсивности I_0 = $1 \cdot 10^{-12}$ Вт/м^2

$$\frac{I_2}{I_0} = \frac{I_1}{I_0}\frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

3. Прологарифмируем уравнение и умножим обе его части на 10:

$$10\lg\frac{I_2}{I_0} = 10\lg\frac{I_1}{I_0} + 10\lg\frac{r_1^2}{r_2^2}.$$

4. По условию задачи:

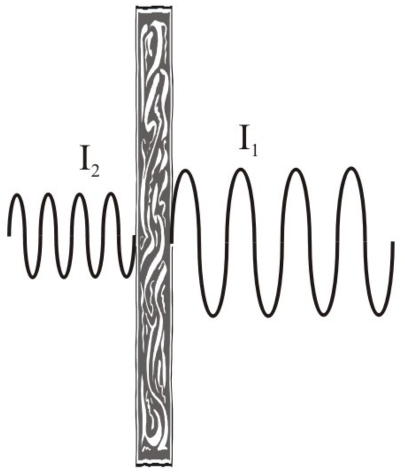
$$10\lg\frac{I_1}{I_0} = L_{P(1)} = 32\,\text{дБ},$$

следовательно:

$$L_{P(2)} = 32 + 10\lg\frac{r_1^2}{r_2^2} = 32 + 10\lg\frac{576}{256} = 35{,}5\,\text{дБ}.$$

---

272. Пройдя через звукоизолирующую конструкцию, акустическая волна уменьшила уровень своей интенсивности на ΔL_P = 30 дБ. Во сколько раз при этом уменьшилась интенсивность звука.



Решение

1. Условие ослабления акустической волны звукоизолирующей перегородкой математически можно записать следующим образом:

$$10\lg\frac{I_1}{I_0} - 10\lg\frac{I_2}{I_0} = \Delta L_P,$$

откуда:

$$\lg\frac{I_1}{I_0} - \lg\frac{I_2}{I_0} = \frac{\Delta L_P}{10} = 3.$$

2. Выразим далее из уравнения отношение интенсивностей акустической волны до перегородки и после:

$$\frac{I_1}{I_2} = 10^3 = 1000.$$

---

273. Уровень шума от работы одного электродвигателя составил $L_{P(1)}$ = 60 дБ. Каков будет уровень шума при одновременной работе двух и десяти таких электродвигателей?

Решение

1. Определим интенсивность акустического излучения одного электродвигателя:

$$L_{P(1)} = 10\lg\frac{I_1}{I_0} = 60\,дБ;\quad \lg\frac{I_1}{I_0} = 6;\quad \frac{I_1}{I_0} = 10^6;$$

$$I_1 = I_0 \cdot 10^6;\quad I_1 = 10^6 \cdot 10^{-12} = 1\cdot 10^{-6}\ Вт/м^2.$$

2. При работе одновременно двух электродвигателей уровень шума определится из следующих соображений:

$$I_2 = 10\lg\frac{I_1 + I_1}{I_0} = 10\lg\frac{2\cdot 10^{-6}}{10^{-12}} = 63\,дБ.$$

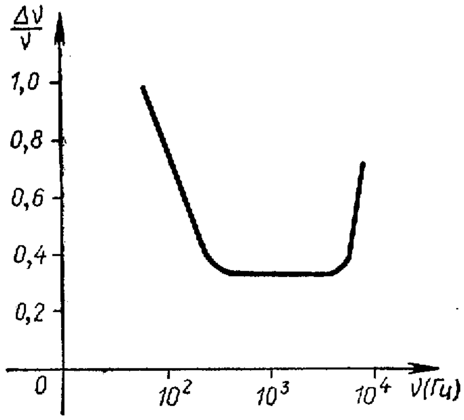
3. Если одновременно будут работать десять электродвигателей, то уровень создаваемого ими шума будет составлять:

$$I_{10} = 10\lg\frac{10 I_1}{I_0} = 10\lg\frac{10^{-5}}{10^{-12}} = 70\ дБ.$$

---

274. Три источника акустических волн с частотами ν_1 = 50 Гц, ν_2 = 200 Гц и ν_3 = 1 кГц в некоторой точке поля создают одинаковый уровень интенсивности $L_{P(1)} = L_{P(2)} = L_{P(3)}$ = 40 дБ. Найти уровни громкости этих источников.

Решение



1. Звуковые волны, наряду с объективными параметрами принято характеризовать субъективными параметрами.

2. Высота тона – это субъективная оценка частоты звука. Чем больше частота, тем выше тон воспринимаемого звука. Однако способность уха различать звуки по их тональности зависит от частоты. На рисунке представлена полученная из опыта кривая зависимости относительного изменения частоты звука $\Delta\nu/\nu$, при котором человек отмечает изменение высоты тона от частоты. При малых и больших частотах изменение частоты звука должно быть значительным, чтобы ухо могло заметить изменение тона. Для частот от 1000 до 600 Гц (область наибольшей остроты уха) это относительное изменение частоты наименьшее ($\Delta\nu/\nu$ =0,3).

3. Громкость является субъективной оценкой интенсивности звука. Восприятие интенсивности зависит от частоты звука, потому что наш акустический тракт имеет вполне определённую частотную характеристику, и она отнюдь не является линейной. Может оказаться, что звук большей интенсивности одной частоты воспринимаются нами как менее громкий, чем звук малой интенсивности другой частоты.

4. Опыт показывает, что для каждой частоты в области слышимых звуков (20 – 20·10^3 Гц) имеется так называемый порог слышимости. Это минимальная

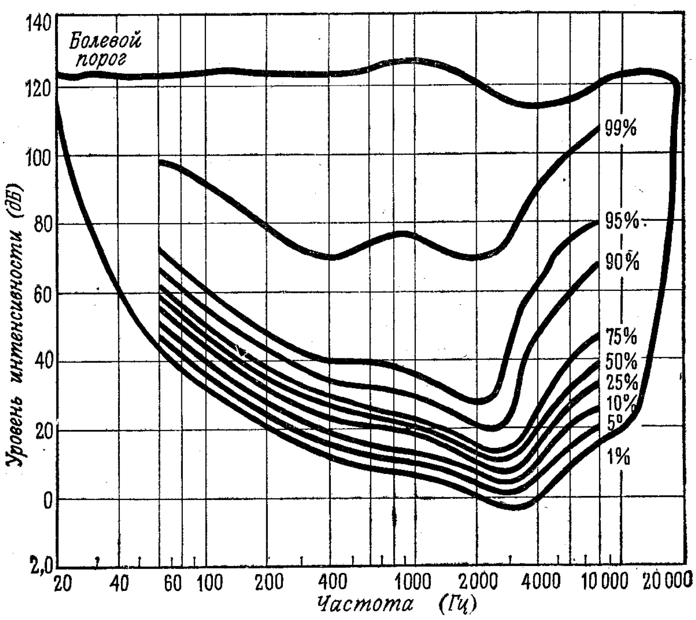
интенсивность, меньше которой ухо не реагирует на звук. Кроме того, опытом установлено, что для каждой частоты имеется так называемый порог болевых ощущений*,* т. е. то значение интенсивности звука, которое вызывает боль в ушах. Повышение интенсивности звука выше порога болевых ощущений опасно для уха.

5. Интенсивность волн акустического диапазона, встречающихся в природе, занимает несколько порядков, даже применительно к динамическому диапазону человеческого слуха. Операции с абсолютными величинами, в этой связи, представляются не очень удобными. Числа получаются либо очень большие, либо очень маленькие. Интенсивность акустических волн удобно оценивать относительными единицами, уровнем интенсивности, измеряемым обычно в децибелах

$$L = 10\lg\frac{I}{I_0} = 20\lg\frac{\Delta p}{\Delta p_0}, \qquad I_0 = 10^{-12}\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2};$$

6. Величина I_0 представляет собой интенсивность порога слышимости на частоте 1000 Гц. Громкость звука, соответствующая этой интенсивности, равна нулю (звук не воспринимается). Единица уровня громкости L называется белом. Обычно громкость звука выражают в децибелах (Дб); эту дольную единицу еще называют фоном (фон): 1 Бел = 10 Дб (фон). Всему диапазону интенсивностей звука, воспринимаемых ухом от порога слышимости до порога болевых ощущений, соответствуют значения громкости от нуля до 130 дБ.

7. Совокупность точек, отвечающих порогу слышимости, и точек, соответствующих порогу болевых ощущений, образуют на диаграмме уровень интенсивности – частота две кривые. Область, ограниченная этими кривыми, называется областью слышимости. Приведенные кривые иллюстрируют ту наименьшую величину интенсивности звука, которую воспринимает определённый процент обследованных на специальной аудио акустической аппаратуре людей. Кривая соответствующая 1% получена при обследовании слуха профессиональных «слухачей», определяющих на слух качество звуковоспроизводящей аппаратуры.



8. Такие же показатели слуха имеют гидроакустики на боевых надводных и подводных кораблях. Из диаграммы видно, что наше ухо может воспринимать звуки, различающиеся по интенсивности в 10^{13} раз! Ни один прибор, созданный руками человека, не имеет столь широкого диапазона изменения измеряемой величины. Опыт показывает, что субъективная оценка интенсивности звука – громкость возрастает гораздо медленнее, чем сама интенсивность звука: при возрастании интенсивности звука в геометрической прогрессии громкость возрастает приблизительно в арифметической прогрессии, т. е. линейно. Это обстоятельство тоже делает удобным использование уровня громкости.

9. Возвращаясь к заданным по условию задачи величинам, на основании анализа диаграммы можно видеть, что акустическая волна с частотой $\nu_1 = 50$ Гц будет иметь нулевой уровень громкости $L_{N(1)} = 0$, для волны с частотой колебаний $\nu_2 = 200$ Гц уровень громкости составит $L_{N(2)} = 20$ дБ, для волны с $\nu_3 =$ 1 кГц – $L_{N(3)} = 40$ дБ.

---

275. В фиксированной точке пространства две акустические волны отличаются по уровню громкости на четыре фона. Найти отношение интенсивностей этих волн.

Решение

1. Уровень громкости в G = 1 фон соответствует уровню интенсивности L_P = 1 дБ, другими словами, уровень интенсивности анализируемых волн $\Delta L_P = 4$ дБ.

2. Запишем уравнения интенсивностей волн:

$$L_{P(1)} = 10\lg\frac{I_1}{I_0}; \quad L_{P(2)} = 10\lg\frac{I_2}{I_0}.$$

3. Выразим величину ΔL_P:

$$\Delta L_P = L_{P(1)} - L_{P(2)} = 10\left(\lg\frac{I_1}{I_0} - \lg\frac{I_2}{I_0}\right) = 10\lg\frac{I_1}{I_2}.$$

4. Определим отношение интенсивностей

$$\frac{\Delta L_P}{10} = \lg\frac{I_1}{I_2}; \quad \Rightarrow \quad \frac{I_1}{I_2} = 10^{0,4} = 2,51.$$

---

276. Источник акустических волн в помещении, где он расположен, воспринимается с уровнем громкости $G_1 = 80$ фон, а в соседнем помещении за стеной – с уровнем $G_2 = 60$ фон. Определить отношение интенсивностей волн в смежных помещениях.

Решение

1. Воспользуемся уравнением:

$$\Delta L_P = L_{P(1)} - L_{P(2)} = 10\left(\lg\frac{I_1}{I_0} - \lg\frac{I_2}{I_0}\right) = 10\lg\frac{I_1}{I_2},$$

$$\Delta L_P = 20\text{дБ};$$

$$\frac{\Delta L_P}{10} = \lg\frac{I_1}{I_2}; \quad \Rightarrow \quad \frac{I_1}{I_2} = 10^2 = 100.$$

---

276. Доказать, что для любой бегущей акустической волны справедливо соотношение

$$\frac{dp}{p} = \frac{\dot{\xi}(t)}{c}\gamma,$$

где dp_m/p – относительное изменение давления в среде, $\dot{\xi}_m$ – амплитудное значение колебательной скорости частиц сред, c – скорость звука, $\gamma = c_p/c_V$ – показатель адиабаты.

Решение

1. При адиабатическом процессе в газе справедливо соотношение:

$$\frac{dp}{p} = \gamma\frac{d\rho}{\rho}.$$

2. Обозначив ξ смещение частиц среды в волне, выразим относительное сжатие следующим образом

$$-\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{d\rho}{\rho}.$$

3. Совместим уравнения:

$$\frac{dp}{p} = -\gamma\frac{\partial\xi}{\partial x}.$$

4. Запишем уравнение смещения частиц среды при прохождении акустической волны:

$$\xi(t) = \xi_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right),$$

из которого следует, что:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = -\frac{2\pi\xi_m}{\lambda}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right).$$

5. Колебательная скорость рассматриваемой частицы определится как:

$$\dot{\xi}(t) = \frac{\partial\xi(t)}{\partial t} = \xi_m\omega\cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right),$$

откуда:

$$\frac{\dot{\xi}(t)}{c} = \frac{\xi_m\omega}{c}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right),$$

но $\omega/c = k = 2\pi/\lambda$, что даёт основание переписать уравнение следующим образом:

$$\frac{\dot{\xi}(t)}{c} = \frac{2\pi\xi_m}{\lambda}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right).$$

6. Поскольку:

$$\frac{2\pi\xi_m}{\lambda}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = -\frac{\partial\xi}{\partial x},$$

то:

$$\frac{\dot{\xi}(t)}{c}\gamma = \frac{dp}{p}.$$

7. Электромагнитные колебания

277. Почему в электрических цепях, содержащих нелинейные элементы L,C (конденсаторы и индуктивности) возможно возникновение колебательных процессов?

Решение

1. Удивительной особенностью колебательных и волновых процессов является универсальность их свойств. Периодические события, протекающие в физике, химии, биологии, геологии и в других отраслях знаний, даже в социологии и политологии, несмотря на несопоставимые, на первый взгляд параметры, обладают общим свойством повторяемости.

2. Некоторые характеристики процессов неоднократно принимают прежние значения, или значения, уменьшающиеся или увеличивающиеся по определённому закону через определённые промежутки времени. Эта общность позволяет использовать единые физико-математические подходы при анализе колебательных и волновых процессов, казалось бы, совершенно не совместимых по своей сути.

3. Дело в том, что колебание скрипичной струны, математического маятника, крыла самолёта и процессы в электрическом колебательном контуре имеют единую «идеологическую» основу и могут быть описаны сходными по структуре уравнениями. Распространение упругих и электромагнитных колебаний имеют, несомненно, существенные отличия, но вместе с тем, структура и свойства волнового уравнения сохраняются.

4. Напомним, что в электрических цепях с постоянной силой тока распределение электрических величин во времени стационарно. Электромагнитное поле в этом случае состоит из электростатического поля неподвижных зарядов и магнитного поля постоянного тока, причём эти поля существуют автономно друг от друга.

5. При изменении одного из электрических параметров на некотором участке цепи, «сведения» об этом событии достигнут остальных элементов за достаточно малое время τ, которое определяется как

$$\tau = \frac{L}{c} << T,$$

где L − расстояния между наиболее удалённых точек цепи, $c \cong 3\cdot 10^8$ м/с скорость распространения электромагнитного сигнала, которая принимается равной скорости света, T − период колебаний.

6. При скорости процессов изменения состояния цепи меньшей скорости распространения электромагнитного возмущения c, каковым является свет, процессы называются **квазистационарными**. Поскольку скорость света несоизмеримо велика по сравнению со скоростью упругих волн, то изменение состояний в электрических цепях тоже будет протекать гораздо быстрее, нежели в системах с упругими элементами.

7. Так, например, для цепи с L = 3 м, запаздывание $\tau \cong 10^{-8}$ с, т.е. для колебательных процессов до $T \cong 10^{-6}$ с (что соответствует частоте $\nu \cong 10^6$ Гц) изменение токов можно считать квазистационарными. Для токов промышленной

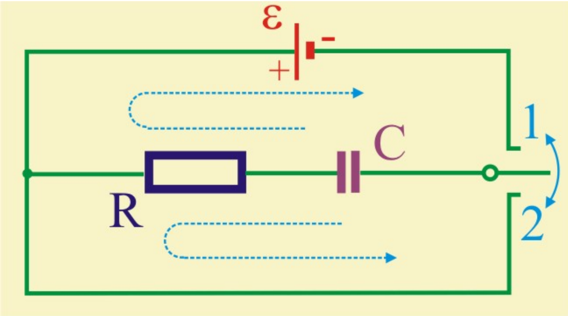


Рис. 277.1. Цепь для зарядки конденсатора

частоты ν = 50 Гц, сила тока квазистационарна до L ≅ 100 км. Для квазистационарных токов справедлив закон Ома и правила Кирхгофа.

8. Квазистационарные процессы протекают, например, в цепи постоянного тока, содержащей активное сопротивление R и электрическую ёмкость С (рис. 277.1), т.е. схема для зарядки конденсатора.

9. Если переключатель поставить в положение 1, то конденсатор С начнёт заряжаться от источника тока с ЭДС, равной ε через сопротивление цепи R, включающее и внутреннее сопротивление источника.

10. Начиная с момента времени, соответствующего замыканию переключателя в цепи возникнет электрический ток, зависящий от времени i(t), переносящий положительный заряд на левую пластину конденсатора q(t). Падение напряжения на конденсаторе, с одной стороны, можно представить как разность между ЭДС источника и напряжением на нагрузке, с другой стороны, как отношение доставленного заряда к величине ёмкости конденсатора

$$\varepsilon - iR = \frac{q}{C},$$

где $q/C = u_C$ – падение напряжения на конденсаторе.

11. Рассматривая процесс зарядки конденсатора с позиций закона сохранения заряда, изменение заряда на конденсаторе может протекать только при наличии тока i, поэтому:

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

12.Совместим два последних уравнения

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon,$$

но

$$\frac{dq}{dt} = i, \quad \frac{q}{C} = u_C,$$

тогда

$$u_C = \varepsilon - Ri,$$

где i – мгновенное значение силы тока, u_C – падение напряжения на конденсаторе. С другой стороны,

$$\frac{q}{C} = \varepsilon - \frac{dq}{dt}R, \Rightarrow \quad R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon.$$

13. Преобразуем последнее уравнение к виду более удобному для интегрирования

$$\frac{RCdq}{dt} = \varepsilon C - q, \qquad \frac{dq}{q - C\varepsilon} = -\frac{dt}{RC},$$

$$\int\frac{dq}{q - C\varepsilon} = -\int\frac{dt}{RC}, \quad \ln(q - C\varepsilon) = -\frac{t}{RC} + K,$$

где K – произвольная постоянная интегрирования.

14. Определим K по начальным условиям, т.е. при $t = 0, q = 0$

$$\ln(-C\varepsilon) = K,$$

и подставим значение K

$$\ln(q - C\varepsilon) - \ln(-C\varepsilon) = -\frac{t}{RC},$$

или, после преобразования

$$\ln\left(1 - \frac{q}{C\varepsilon}\right) = -\frac{t}{RC}.$$

15. Избавимся далее от логарифма в левой части

$$1 - \frac{q}{C\varepsilon} = \exp\left(-\frac{t}{RC}\right),$$

и решим полученное уравнение относительно искомой величины – заряда конденсатора

$$q(t) = C\varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

16. Получим зависимость зарядного тока в функции времени, для чего достаточно продифференцировать по времени уравнение q(t)

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

17. Изменение напряжения на конденсаторе будет протекать в соответствии с уравнением

$$U(t) = \frac{q(t)}{C} = \varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

18. Величина $RC = \tau[\text{Ом} \cdot \text{Ф} \equiv (\text{В}/\text{А}) \cdot (\text{Кл}/\text{В}) \equiv \text{Кл}/(\text{Кл}/\text{с}) \equiv \text{с}]$ – называется постоянной времени. Постоянная времени характеризует промежуток времени, за который заряд на конденсаторе достигает $(1 - e^{-1})$ или 63% своего максимального значения, т.е. $0{,}63C\varepsilon$. Значение τ, таким образом, характеризует скорость зарядки конденсатора.

19. Из уравнения q(t) следует, что заряд может достичь своего максимального значения $Q = C\varepsilon$,только через бесконечно большое время. Рассмотрим динамические особенности процесса на конкретном примере.

20. Пусть цепь составлена из последовательного соединения конденсатора ёмкостью C = 2 мкФ, резистора сопротивлением $R = 1{,}5$ кОм, и источника тока с ЭДС ε = 12 В. Определим постоянную времени и установим зависимость заряда и напряжения на конденсаторе от времени.

- Определим постоянную времени заданной цепи

$$\tau = RC = 1{,}5 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 3 \cdot 10^{-3}\,\text{с}.$$

- Максимальная величина заряда конденсатора определится из соотношения

$$Q_{max} = C\varepsilon = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 12 = 2{,}4 \cdot 10^{-5}\,\text{Кл} \equiv 25\text{мкКл}.$$

- Определим зависимость заряда, напряжения и зарядного тока от времени, воспользовавшись, записанными выше уравнениями

$$Q(t) = 2{,}4 \cdot 10^{-5}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}),$$

$$i(t) = 8 \cdot 10^{-3}\left(e^{-\frac{t}{\tau}}\right),$$

$$U(t) = 12\left(1 - e^{\frac{t}{\tau}}\right),$$

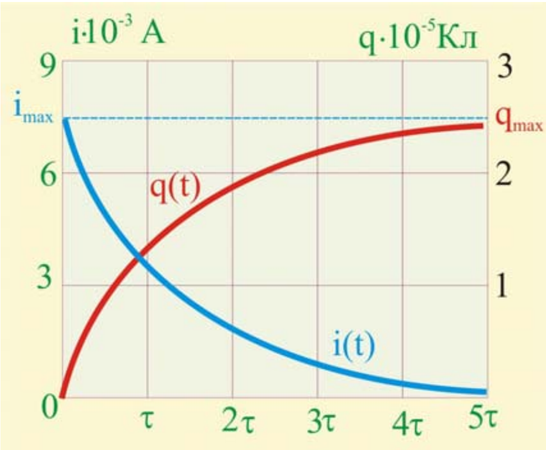


Рис. 277.2. Зависимость от времени заряда конденсатора

21. Представим расчетные данные для заряда конденсатора и протекающего по нему тока в виде соответствующих графиков (рис. 277.2). **Как и следовало ожидать, кривые имеют экспоненциальный вид, т.е. заряд конденсатора и сила тока асимптотически приближаются к своим экстремальным значениям.**

22. Если заряженный конденсатор отсоединить от источника, т.е. перевести переключатель в положение 2 и замкнуть на сопротивление, то, описанные выше процессы, начнут протекать в обратной последовательности.

23. Уравнение изменения заряда перепишется при условии $\varepsilon = 0$

$$\frac{dq}{dt}R + \frac{Q}{C} = 0.$$

24. Решение этого уравнения для заряда и силы тока будут иметь вид:

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{RC}}.$$

$$q(t) = q_{max}e^{-\frac{t}{RC}},$$

т.е. сила тока в цепи и заряд конденсатора убывают во времени по экспоненциальному закону, с той же постоянной времени.

Рис. 277.3. Токи замыкания и размыкания

25. При подаче питания на схему, изображённую на рис 277.3 в цепи величина тока будет увеличиваться от нулевого значения до номинала в течение некоторого промежутка времени вследствие явления самоиндукции. Возникающие экстратоки в соответствие с правилом Ленца всегда направлены противоположно, т.е. они препятствуют вызывающей их причине. Они препятствуют увеличению тока в цепи.

26. При подключении коммутатора в положение 1 экстратоки станут препятствовать увеличению тока в цепи, а в положении 2, наоборот, экстратоки будут замедлять уменьшение основного тока. Будем считать для простоты анализа, что включённое в цепь сопротивление R характеризует сопротивление цепи, внутреннее сопротивление источника и активное сопротивление катушки L. Закон Ома в этом случае примет вид

$$\varepsilon + \varepsilon_{si} = iR,$$

где ε – ЭДС источника, ε_{si} – ЭДС самоиндукции, i – мгновенное значение величины тока, который является функцией времени. Подставим в закон Ома уравнение ЭДС самоиндукции

$$L\frac{di}{dt} + iR = \varepsilon .$$

27. Разделим в уравнении переменные

$$Ldi = (\varepsilon - iR)dt, \quad \frac{Li}{(\varepsilon - iR)} = dt ,$$

и проинтегрируем, считая L постоянной величиной

$$L\int \frac{di}{\varepsilon - iR} = \int dt ,$$

$$\frac{L}{R}\ln(\varepsilon - iR) = t + const .$$

28. Таким образом, общее решение дифференциального уравнения силы тока можно представить в виде:

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} - cons \cdot te^{-\frac{R}{L}t} .$$

29. Постоянную интегрирования определим из начальных условий. При t =0 в момент подачи питания ток в цепи равен нулю i(t) = 0. Подставляя нулевое значение тока в уравнение i(t), получим:

$$const = \frac{\varepsilon}{R} .$$

30. Решение уравнения i(t) примет вид:

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{L}{R}t}\right).$$

31. Отметим, что между механическими и электрическими колебаниями существует глубокая взаимосвязь, хотя бы по представлению энергетики колебательных процессов. Так, например, кинетическая энергия массы m, движущейся прямолинейно со скоростью v, определяется известным уравнением, следующим из второго закона Ньютона:

$$K = \frac{mv^2}{2} ,$$

а электростатическая энергия конденсатора и энергия магнитного поля, концентрирующего в индуктивности, определяются как

$$W_E = \frac{Cu^2}{2} ,$$

$$W_B = \frac{Li^2}{2} .$$

---

278. Каковы особенности вынужденных электромагнитных колебаний в нелинейных электрических цепях, содержащих конденсаторы и катушки индуктивности?

Решение

1. Рассмотрим последовательное соединение R L C с источником переменной ЭДС (рис. 278.1), которая обеспечивает периодическое поступление в кон-

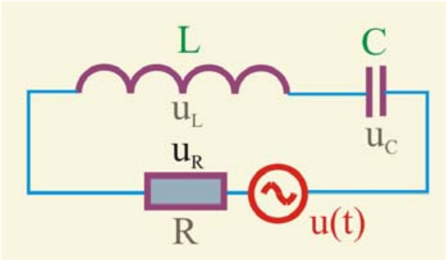


Рис. 278.1. Последовательный RLC- колебательный контур

тур энергии. Пусть переменное напряжение питания контура описывается уравнением

$$u = u_m \cos\Omega t\,.$$

2. Запишем далее закон Ома для этой цепи

$$iR = -\frac{q}{C} - L\frac{di}{dt} + u_m \cos\Omega t\,.$$

3. Отметим, что

$$i = \frac{dq}{dt};\quad \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2},$$

что позволяет закон Ома переписать следующим образом:

$$\frac{dq}{dt}R + \frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} = u_m \cos\Omega t\,.$$

4. Поделим последнее уравнение на величину индуктивности L

$$\dot{q}\frac{R}{L} + \frac{q}{LC} + \ddot{q} = \frac{u_m}{L}\cos\Omega t\,,$$

и введём следующие обозначения

$$\frac{R}{L} = 2\beta;\quad \sqrt{\frac{1}{LC}} = \omega_0\,,$$

и подставим их в дифференциальное уравнение:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = U\cos\Omega t\,.$$

5. Как нетрудно видеть мы пришли к дифференциальному уравнению, аналогичному уравнению для вынужденных затухающих механических колебаний:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\Omega t\,,$$

по аналогии, с которым решение уравнения для заряда можно представить следующим образом:

$$q = q_m \cos(\Omega t - \psi),$$

где

$$q_m = \frac{U}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2}},$$

$$\psi = \operatorname{arctg}\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\,.$$

6. Силу тока в рассматриваемой цепи определим, продифференцировав уравнение заряда по времени:

$$i = \frac{dq}{dt} = -\Omega q_m \sin(\Omega t - \psi) = i_m \cos\left(\Omega t - \psi + \frac{\pi}{2}\right),$$

где

$$i_m = \Omega q_m = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left[\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right]^2}}\,.$$

7. Перепишем исходное уравнение закона Ома в виде суммы падений напряжений на отдельных элементах рассматриваемой схемы

$$u_R + u_L + u_C = u_m \cos\Omega t\,,$$

т.е. сумма падений напряжений на активном сопротивлении, индуктивности и ёмкости в каждый момент времени равна внешнему напряжению. Определим далее величины напряжения на каждом их элементов

$$u_R = Ri_m \cos(\Omega t - \varphi).$$

8. Разделив уравнение напряжения на величину ёмкости C получим падение напряжения на конденсаторе

$$u_c = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C}\cos(\Omega t - \psi) = u_{Cm}\cos\left(\Omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

9. Амплитудное значение падения напряжения на конденсаторе определится следующим соотношением:

$$u_{Cm} = \frac{q_m}{C} = \frac{U}{\Omega C\sqrt{R^2 + \left[\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right]^2}} = \frac{i_m}{\Omega C}.$$

10. Напряжение на индуктивности определится как:

$$u_L = L\frac{di}{dt} = -\Omega L i_m \sin(\Omega t - \varphi) = u_{Lm}\cos\left(\Omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

при этом:

$$u_{Lm} = i_m \Omega L.$$

11. Из полученных уравнений видно, что напряжение на ёмкости отстаёт от тока по фазе на $\pi/2$, в то время как напряжение на индуктивности опережает тока на $\pi/2$. Напряжение на активном сопротивлении находится в фазе с током, что подчёркивает линейность этого элемента цепи. Если колебания изобразить в виде вращающихся векторов, то в некоторый момент времени получится диаграмма, приведенная на рис. 278.2.

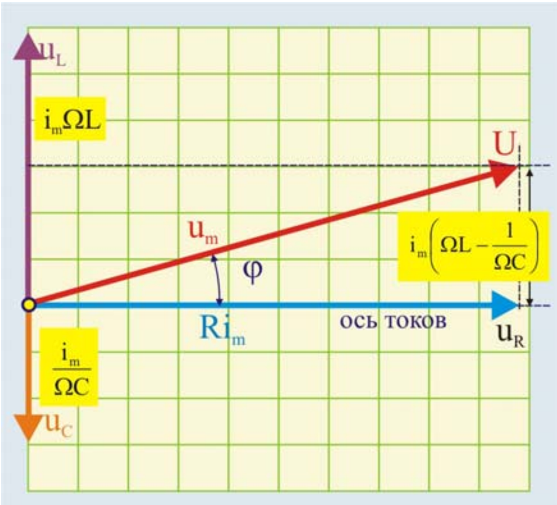


Рис. 278.2. Векторная диаграмма

12. Сумма падений напряжения на активном сопротивлении, индуктивности и ёмкости должна быть равна приложенному напряжению u.

13. Явление резонанса напряжения, так же как и в механических колебаниях сопровождается максимальным значением, например заряда и напряжения на конденсаторе

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \le \omega_0.$$

14. Явление резонанса характеризуется превышением напряжения на конденсаторе амплитудного значения напряжения, подводимого к контуру от внешнего переменного источника. Характерной величиной в этом случае является величина добротности контура, определяемая уравнением

$$Q = \frac{u_{Cr}}{U} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{\sqrt{LC}}{CR} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

15. Добротность контура помимо прочего определяет остроту резонансных кривых.

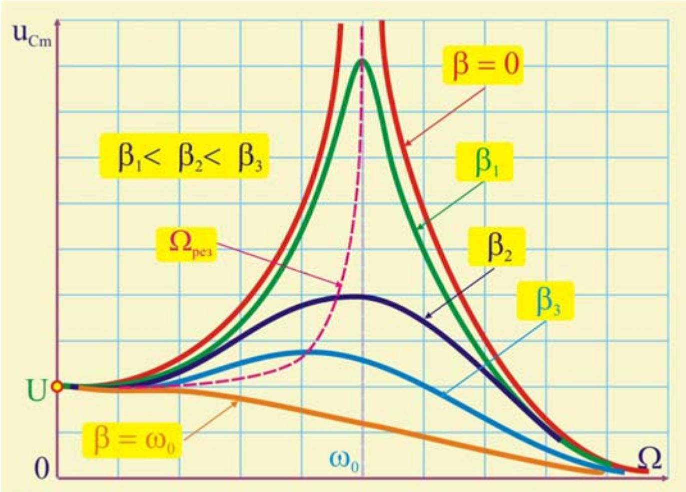


Рис.278.3. Резонансные кривые

16. На рис. 278.3 приведена зависимость амплитудного значения напряжения на конденсаторе u_{Cm} в зависимости от частоты Ω возбуждающего напряжения. В случае наличия потерь на активном сопротивлении и на собственном омическом сопротивлении индуктивности резонансная частота определится уравнением:

$$\Omega_{Рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\,.$$

17. Уравнению резонансной частоты возбуждения контура можно придать иной вид:

$$\Omega_{Рез} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}\,.$$

18. Как видно, резонансные кривые имеют общую точку, когда $u_{Cm} = U$, что соответствует напряжению, появляющемуся на обкладках конденсатора при его подключении к источнику постоянного напряжения величины U. Максимум u_{Cm} получается острее и тем большим, чем меньше отношение

$$\beta = \frac{R}{2L},$$

19. Чтобы добиться наилучших резонансных свойств контура, необходимо уменьшать активное сопротивление и увеличивать ёмкость.

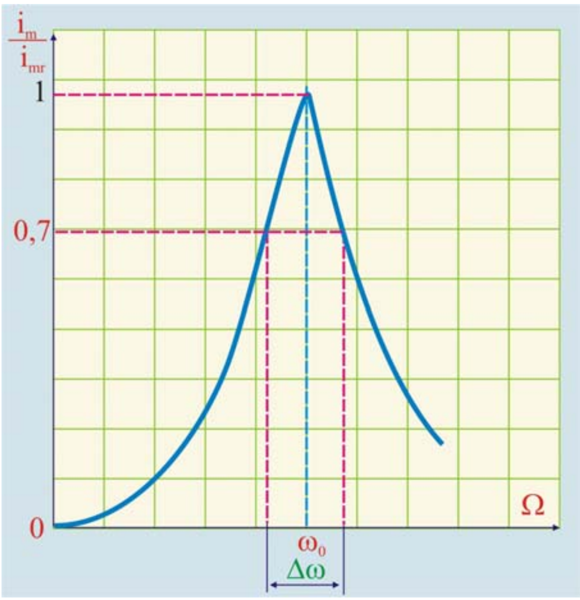


Рис. 278.4. Резонансная кривая тока

20. Нормированные резонансные кривые для силы тока приведены на рис. 278.4. Эта зависимость аналогична кривой зависимости скорости от частоты механической возбуждающей силы при упругих колебаниях. Амплитудное значение силы тока имеет место при условии:

$$\Omega L - \frac{1}{\Omega C} = 0\,,$$

21. Резонансная частота для силы тока совпадает с частотой собственных колебаний, определяемая уравнением:

$$\Omega_i = \omega_0 \frac{1}{\sqrt{LC}}\,.$$

Прохождение резонансной кривой тока через нуль свидетельствует о том, что при $\Omega = 0$, т.е. случай постоянного тока, цепь разрывается конденсатором.

279. Ёмкость переменного конденсатора в контуре радиоприемника изменяется от C_1 = 50 пФ до C_2 = 450 пФ. Индуктивность катушки контура L = 0,6 мГн. На какие длины волн может настраиваться этот контур?

Решение

$$T = 2\pi\sqrt{LC};\quad \nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}};\quad \lambda = \frac{c}{\nu} = 2\pi c\sqrt{LC};$$

$$\lambda_1 = 2\pi c\sqrt{LC_1} = 6{,}28\cdot 3\cdot 10^8\sqrt{6\cdot 10^{-4}\cdot 5\cdot 10^{-11}} \approx 326{,}4\text{м};$$

$$\lambda_2 = 2\pi c\sqrt{LC_2} = 6{,}28\cdot 3\cdot 10^8\sqrt{6\cdot 10^{-4}\cdot 4{,}5\cdot 10^{-10}} \approx 979\text{м};$$

---

280. Электроёмкость переменного конденсатора приёмного контура может изменяться в пределах от С до 25 С. Определить диапазон длин волн, на которые может настраиваться контур, если минимальной емкости соответствует частота колебаний $\nu_1 = 10^8$ Гц.

Решение

1. Определим величину $\sqrt{LC}$:

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}};\quad \sqrt{LC} = \frac{1}{2\pi\nu_1};$$

2. Минимальная длина волны, на которую может настраиваться контур:

$$\lambda_{min} = 2\pi c\sqrt{LC} = \frac{2\pi c}{2\pi\nu} = \frac{c}{\nu_1} = 3\text{м};$$

3. Максимальное значение длины волны:

$$\sqrt{L25C} = \frac{1}{2\pi\nu_2};\quad \Rightarrow\quad \lambda_{max} = 5\lambda_{min} = 15\text{м};$$

---

281. В колебательном контуре два конденсатора включены параллельно: один конденсатор постоянной ёмкости $C_1 = 10^{-9}$ Ф, другой конденсатор, построечный, имеет переменную ёмкость от C_2 = 100 пФ до C_2 = 1000 пФ. Индуктивность контура L = 1 мГн. Определить диапазон собственных частот колебательного контура.

Решение

1. Минимальное и максимальное значение ёмкости контура:

$$C_{min} = C_1 + C_2;\quad C_{max} = C_1 + C_3;$$

2. Диапазон собственных частот контура:

$$\nu_{max} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C_1 + C_2)}} = \frac{1}{6{,}28\sqrt{10^{-3}\cdot 1{,}1\cdot 10^{-9}}} \approx 1{,}52\cdot 10^5\,\text{Гц} \equiv 152\text{кГц};$$

$$\nu_{min} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C_1 + C_3)}} = \frac{1}{6{,}28\sqrt{10^{-3}\cdot 2\cdot 10^{-9}}} \approx 1{,}12\cdot 10^5\,\text{Гц} \equiv 112\text{кГц};$$

---

282. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности и двух одинаковых конденсаторов, включенных параллельно. Период собственных колебаний контура T_1 = 20 мкс. Чему станет равен период собственных колебаний контура, если конденсаторы включить последовательно?

Решение

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= 2\pi\sqrt{L2C}; \\ T_2 &= 2\pi\sqrt{\frac{LC}{2}}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{4} = 2; \quad T_2 = 10\text{мкс};$$

---

283. При некотором значении ёмкости конденсатора частота собственных колебаний контура ν_1 = 30 кГц, а при замене его на другой конденсатор частота стала равной ν_2 = 40 кГц. Какой станет частота при параллельном и последовательном соединении этих конденсаторов?

Решение

1. Ёмкости конденсаторов:

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}; \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{1}{4\pi^2\nu_1^2 L}; \quad C_2 = \frac{1}{4\pi^2\nu_2^2 L};$$

2. При параллельном соединении конденсаторов $C_3 = C_1 + C_2$, поэтому:

$$\nu_3 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C_1 + C_2)}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{L}{4\pi^2 L}\left(\frac{1}{\nu_1^2} + \frac{1}{\nu_2^2}\right)}} = \sqrt{\frac{\nu_1^2\nu_2^2}{\nu_1^2 + \nu_2^2}} = 24\text{кГц};$$

3. При последовательном соединении конденсаторов:

$$C_4 = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\frac{1}{4\pi^2\nu_1^2 L}\cdot\frac{1}{4\pi\nu_2^2 L}}{\frac{1}{4\pi^2\nu_1^2 L} + \frac{1}{4\pi^2\nu_2^2}} = \frac{\frac{1}{4\pi^2 L}\frac{1}{\nu_1^2\nu_2^2}}{\frac{1}{4\pi^2 L}\left(\frac{1}{\nu_1^2} + \frac{1}{\nu_2^2}\right)} = \frac{1}{4\pi^2 L}\left(\nu_1^2 + \nu_2^2\right);$$

$$\nu_4 = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2} = \sqrt{25\cdot 10^8} = 50\text{кГц};$$

---

284. Период электромагнитных колебаний в контуре равен $T = 10^{-5}$ с. При подключении параллельно конденсатору контура дополнительного конденсатора $C_2 = 3\cdot 10^{-8}$ Ф период колебаний увеличился, $T_2 = 2\,T_1$. Определить индуктивность контура и начальную ёмкость C_1.

Решение

1. Начальная ёмкость конденсатора контура:

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= 2\pi\sqrt{LC_1}; \\ 2T_1 &= 2\pi\sqrt{L(C_1 + C_2)}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{1}{4} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}; \quad 3C_1 = C_2; \quad C_1 = 1\cdot 10^{-8}\,\text{Ф};$$

2. Индуктивность контура:

$$L = \frac{T_1^2}{4\pi^2 C_1} \approx \frac{10^{-10}}{40\cdot 10^{-8}} \approx 2{,}5\cdot 10^{-4}\,\text{Гн};$$

---

285. Как изменится частота колебаний в контуре, если последовательно с конденсатором контура включить ещё три таких же конденсатора?

Решение

$$\left.\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}; \\ \nu_2 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C+3C)}}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{4}; \quad \nu_2 = 2\nu_1;$$

---

286. Как изменится период и частота собственных колебаний в контуре, если его индуктивность увеличить в два раза, а ёмкость уменьшить в 8 раз?

Решение

1. Величина LC изменяется в 4 раза, поэтому период:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{LC}; \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{LC}{4}};$$

уменьшится в 2 раза, а собственная частота колебаний:

$$\left.\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}; \\ \nu_2 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{LC}{4}}}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \nu_2 = 2\nu_1;$$

наоборот, увеличится в 2 раза.

---

287. Резонансная частота колебаний LC – контура ν_1 = 30 кГц. Какой станет частота при увеличении расстояния между пластинами плоского конденсатора контура в ζ = 1,44 раза?

Решение

$$\left.\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{L\frac{\varepsilon_0 S}{d}}}; \\ \nu_2 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{L\frac{\varepsilon_0 S}{\zeta d}}}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \nu_2 = \sqrt{1{,}44}\nu_1 = 36\text{кГц};$$

---

288. На какую длину волны настроен колебательный контур, состоящий из катушки индуктивности L = 2 мГн и плоского конденсатора? Пространство между пластинами заполнено диэлектриком с проницаемостью ε = 11, площадь пластин S = 800 см^2, расстояние между пластинами d = 1 см.

Решение

1. Ёмкость конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} \approx \frac{11 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 8 \cdot 10^{-2}}{10^{-2}} \approx 7{,}8 \cdot 10^{-10}\text{Ф};$$

2. Длина волны, на которую настроен контур

$$\lambda = 2\pi c\sqrt{LC} = 6{,}28 \cdot 3 \cdot 10^8\sqrt{2 \cdot 10^{-3} \cdot 7{,}8 \cdot 10^{-10}} \approx 2351\text{м};$$

---

289. Электрический заряд на обкладках конденсатора в колебательном контуре изменяется по закону:

$$q(t) = 10^{-8}\cos(2\pi t + \pi);$$

Определить круговую частоту, частоту и период колебаний заряда; записать закон изменения напряжения и силы тока на конденсаторе. Ёмкость контура C = 500 пФ.

Решение

1. Циклическая частота, частота и период колебаний заряда:

$$\omega = 2\pi\frac{\text{рад}}{\text{с}} = 6{,}28\text{с}^{-1}; \quad \omega = 2\pi\nu; \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = 1\,\text{Гц}; \quad T = \frac{1}{\nu} = 1\text{с};$$

2. Реактивное сопротивление конденсатора:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{6{,}28\cdot 5\cdot 1^{-10}} \approx 3{,}2\cdot 10^{8}\,\text{Ом};$$

3. Уравнение изменения силы тока через конденсатор:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -2\pi\cdot 10^{-8}\sin(2\pi t + \pi);$$

4. Уравнение изменения напряжения на конденсаторе:

$$u(t) = i(t)X_C \approx -20\sin(2\pi t + \pi);$$

---

290. Конденсатор ёмкостью C = 50 пФ подключили к источнику тока с ЭДС ε = 3 В, а затем к катушке с индуктивностью L = 5,1 мкГн. Записать зависимость от времени заряда, силы тока и напряжения.

Решение

1. Циклическая частота собственных колебаний LC – контура:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{5{,}1\cdot 10^{-6}\cdot 5\cdot 10^{-11}}} \approx 6{,}26\cdot 10^{7}\,\text{c}^{-1};$$

2. Амплитудное значение заряда на конденсаторе:

$$q_m = C\varepsilon = 5\cdot 10^{-11}\cdot 3 = 1{,}5\cdot 10^{-10}\,\text{Кл};$$

3. Уравнение изменения во времени заряда на конденсаторе:

$$q(t) = q_m\cos\omega t = 1{,}5\cdot 10^{-10}\cos(6{,}26\cdot 10^{7}t);$$

4. Изменение силы тока:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \approx -9{,}4\cdot 10^{-3}\sin(6{,}26\cdot 10^{7}t);$$

5. Реактивное сопротивление конденсатора:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{6{,}26\cdot 10^{7}\cdot 5\cdot 10^{-11}} \approx 319\ \text{Ом};$$

6. Изменение напряжения на конденсаторе:

$$u(t) = i(t)X_C = -3\sin(6{,}27\cdot 10^{7}t);$$

---

291. Заряд конденсатора LC – контура меняется по закону:

$$q(t) = 2\cdot 10^{-7}\cos(2\cdot 10^{4}t);$$

Чему равна ёмкость конденсатора, если L = 6,25 мГн. Чему равна амплитуда силы тока в контуре и полная энергия?

Решение

1. Ёмкость конденсатора:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \omega = 2 \cdot 10^4 c^{-1}; \quad C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{4 \cdot 10^8 \cdot 6{,}25 \cdot 10^{-3}} \approx 4 \cdot 10^{-7} \Phi;$$

2. Амплитуда силы тока:

$$i_m = q_m \omega = 2 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^4 = 4 \cdot 10^{-3} A;$$

3. Полная энергия электромагнитного поля:

$$W = \frac{Cu_m^2}{2} = \frac{Li_m^2}{2} = \frac{6{,}25 \cdot 10^{-3} \cdot 16 \cdot 10^{-6}}{2} \approx 5 \cdot 10^{-8}\,\text{Дж};$$

---

292. Изменение силы тока в контуре протекают в соответствии с уравнением:

$$i(t) = 0{,}01\cos(1000t);$$

Определить индуктивность LC – контура, если ёмкость конденсатора C = 10 мкФ.

Решение

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \omega = 1 \cdot 10^3 c^{-1}; \quad L = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{1 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^{-5}} = 0{,}1\,\text{Гн};$$

---

293. В LC – контуре сила тока изменяется по закону:

$$i(t) = 0{,}02\sin(400\pi t);$$

Индуктивность контура L = 1 Гн. Определить ёмкость конденсатора и максимальное значение энергии его электрического поля.

Решение

1. Ёмкость конденсатора:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \omega = 4 \cdot 10^2 c^{-1}; \quad C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{16 \cdot 10^4} \approx 6{,}25 \cdot 10^{-6} \Phi;$$

2. Максимальное значение энергии электрического поля:

$$W_{E(m)} = W_{B(m)} = \frac{Cu_m^2}{2} = \frac{Li_m^2}{2} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{2} \approx 2 \cdot 10^{-4}\,\text{Дж};$$

---

294. Напряжение на обкладках конденсатора в LC – контуре изменяется по закону:

$$u(t) = 50\cos(10^4 \pi t);$$

Электроёмкость конденсатора C = 0,9 мкФ. Найти индуктивность контура и максимальную энергию магнитного поля катушки.

Решение

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \omega = 1 \cdot 10^4 c^{-1}; \quad L = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{1 \cdot 10^8 \cdot 9 \cdot 10^{-7}} \approx 0{,}011\,\text{Гн};$$

$$W_{E(m)} = W_{B(m)} = \frac{Cu_m^2}{2} = \frac{Li_m^2}{2} = \frac{9 \cdot 10^{-7} \cdot 50^2}{2} \approx 1{,}125 \cdot 10^{-3}\,\text{Дж};$$

---

295. Конденсатор ёмкостью C = 2 мкФ зарядили от источника тока с напряжением U = 100 В, а затем замкнули на катушку с индуктивностью L = 5 мГн. Определить заряд и напряжение на конденсаторе через τ = (0,025 π) секунд после замыкания цепи.

Решение

1. Максимальное значение заряда на конденсаторе:

$$q_m = CU = 2\cdot 10^{-4}\,\text{Кл};$$

2. Собственная циклическая частота электромагнитных колебаний:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-3}\cdot 2\cdot 10^{-6}}} \approx 2{,}24\cdot 10^4\,\text{c}^{-1};$$

2. Уравнение изменения силы тока:

$$q(t) = q_m\cos\left(2{,}24\cdot 10^4\,t\right);$$

3. Значение заряда в заданный момент времени:

$$q(\tau) = q_m\cos(\omega\tau) = 2\cdot 10^{-4}\cos(560\pi) = 2\cdot 10^{-4}\,\text{Кл};$$

4. Значение напряжения в заданный момент времени:

$$u(\tau) = \frac{q_m}{C}\cos(\omega\tau) = \frac{2\cdot 10^{-4}}{2\cdot 10^{-6}}\cos(560\pi) = 100\text{В};$$

---

296. В колебательном контуре известен максимальный заряд q_m и амплитудное значение силы тока i_m. Определить период колебаний в этом идеальном LC – контуре.

Решение

$$\frac{q_m^2}{2C} = \frac{Li_m^2}{2};\quad LC = \frac{q_m^2}{i_m^2};\quad T = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi\frac{q_m}{i_m};$$

---

297. Колебательный контур приёмника состоит из катушки индуктивности и слюдяного конденсатора с площадью пластин S = 800 см^2 и расстоянием между ними d = 1 мм. На какую волну настроен контур, если максимальное напряжение на пластинах u_m = 100 В, а величина максимальной силы тока в цепи контура i_m = 1 А. Активное сопротивление контура мало.

Решение

1. Ёмкость слюдяного (ε = 7) конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} = \frac{7\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 8\cdot 10^{-2}}{10^{-3}} \approx 5\cdot 10^{-9}\,\Phi;$$

2. Индуктивность контура:

$$\frac{Cu_m^2}{2} = \frac{Li_m^2}{2};\quad \Rightarrow\quad L = \frac{Cu_m^2}{i_m^2} = \frac{5\cdot 10^{-9}\cdot 10^4}{1} = 5\cdot 10^{-5}\,\text{Гн};$$

3. Длина волны, на которую настроен контур:

$$c = \lambda\nu = \frac{\lambda}{T};\quad \Rightarrow\quad \lambda = 2\pi c\sqrt{LC} = 6{,}28\cdot 3\cdot 10^8\sqrt{5\cdot 10^{-9}\cdot 5\cdot 10^{-5}} \approx 942\text{м};$$

---

298. В колебательном контуре с индуктивностью L и ёмкостью C конденсатор заряжается до максимального напряжения u_m. Каким станет сила тока, когда напряжение на конденсаторе уменьшится в 2 раза? Каково значение i_m?

Решение

1. Амплитудное значение силы тока:

$$\frac{Cu_m^2}{2}=\frac{Li_m^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad i_m = u_m\sqrt{\frac{C}{L}};$$

2. Циклическая частота собственных колебаний контура:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}};$$

3. Время, когда напряжение на конденсаторе станет равным $u_m/2$:

$$u(t) = u_m\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right); \quad \frac{u_m}{2u_m} = \cos\left(\frac{\tau}{\sqrt{LC}}\right); \quad \frac{\tau}{\sqrt{LC}} = \arccos\frac{1}{2}; \quad \tau = \frac{\pi\sqrt{LC}}{3};$$

4. Сила тока в заданный момент времени:

$$i(t) = -u_m\sqrt{\frac{C}{L}}\sin\omega t; \quad i(\tau) = -u_2\sqrt{\frac{C}{L}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\frac{\pi\sqrt{LC}}{3}\right);$$

$$i(\tau) \approx -0{,}87u_m\sqrt{\frac{C}{L}} = -\frac{u_m}{2}\sqrt{\frac{3C}{L}};$$

---

299. В колебательном контуре с индуктивностью L = 0,4 Гн и ёмкостью C = 20 мкФ амплитудное значение силы тока i_m = 100 мА. Каким будет напряжение на конденсаторе в тот момент времени, когда энергия электрического поля будет равна энергии магнитного поля?

Решение

$$\frac{Li_m^2}{4} = \frac{Cu_m^2}{2}; \quad u_m = i_m\sqrt{\frac{L}{2C}} = 0{,}1\sqrt{\frac{0{,}4}{4\cdot 10^{-5}}} = 10\text{В};$$

---

300. В колебательном контуре ёмкость конденсатора C = 2 мкФ, а максимальное напряжение на рём u_m = 5 В. Найти энергию магнитного поля катушки в момент времени, когда напряжение на конденсаторе u = 3 В.

Решение

1. Максимальное значение энергии электрического поля:

$$W_{E(max)} = \frac{Cu_m^2}{2} = 2{,}5\cdot 10^{-5}\text{Дж};$$

2. Значение энергии магнитного поля при напряжении на конденсаторе u:

$$W_E = \frac{Cu^2}{2} = 9\cdot 10^{-6}\text{Дж};$$

3. Энергия магнитного поля в заданный момент времени:

$$W_B = W_{E(max)} - W_E = 1{,}6\cdot 10^{-5}\text{Дж};$$

---

301. LC – контур состоит из индуктивности L = 0,2 Гн и конденсатора C = 10 мкФ. В момент, когда напряжение на конденсаторе равно u_1 =1 В, сила тока i_1 = 10 мА. Определить заряд конденсатора в момент времени τ, когда сила тока через катушку составит величину i_2 = 5 мА.

Решение

1. Энергия электрического и магнитного поля при u_1 и i_1:

$$W_{E1} = \frac{Cu_1^2}{2} = \frac{10^{-5} \cdot 1}{2} = 5 \cdot 10^{-6}\,Дж; \quad W_{B1} = \frac{Li_1^2}{2} = \frac{0,2 \cdot 1 \cdot 10^{-4}}{2} = 1 \cdot 10^{-5}\,Дж;$$

2. Максимальное значение энергии контура:

$$W_{max} = W_{E1} + W_{B1} = 1,5 \cdot 10^{-5}\,Дж;$$

3. Энергия электрического поля в заданный момент времени τ:

$$W_{E2} = W_{max} - \frac{Li_2^2}{2} = 1,5 \cdot 10^{-5} - \frac{0,2 \cdot 25 \cdot 10^{-6}}{2} = 1,25 \cdot 10^{-5}\,Дж;$$

4. Заряд на конденсаторе в момент времени τ:

$$W_{E2} = \frac{q_2^2}{2C}; \quad q_2 = \sqrt{2W_{E2}C} = \sqrt{2 \cdot 1,25 \cdot 10^{-5} \cdot 1 \cdot 10^{-5}} \approx 1,58 \cdot 10^{-5}\,Кл;$$

---

302. Колебательный контур состоит из катушки индуктивности L = 1,015 Гн и конденсатора ёмкостью C = $2,5 \cdot 10^{-8}$ Ф. Пластинам конденсатора сообщается заряд $q_m = 2,5 \cdot 10^{-6}$ Кл. Найти значение силы тока в контуре в момент времени τ, когда напряжение на пластинах конденсатора u_1 = 70,7 В.

Решение

1. Максимальное значение энергии, запасаемой в контуре:

$$W_{max} = \frac{q_m^2}{2C} = \frac{6,25 \cdot 10^{-12}}{2 \cdot 2,5 \cdot 10^{-8}} = 1,25 \cdot 10^{-4}\,Дж;$$

2. Значение энергии электрического поля в момент времени τ:

$$W_{E1} = \frac{Cu_1^2}{2} \approx \frac{2,5 \cdot 10^{-8} \cdot 5 \cdot 10^{3}}{2} \approx 6,25 \cdot 10^{-5}\,Дж;$$

3. Энергия магнитного поля в момент времени τ:

$$W_{B1} = W_{max} - W_{E1} = 6,25 \cdot 10^{-5}\,Дж;$$

4. Сила тока в момент времени τ:

$$W_{B1} = \frac{Li_1^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad i_1 = \sqrt{\frac{2W_{B1}}{L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,25 \cdot 10^{-5}}{1,015}} \approx 11,2\,мА;$$

---

303. Колебательный контур представляет собой катушку с индуктивностью L = 0,2 Гн и конденсатор ёмкостью C = 20 мкФ, который заряжен до напряжения u_1 = 4 В. Каким будет значение силы тока i_2, напряжение u_2 и заряд q_2 в момент времени τ, когда энергия магнитного поля внутри катушки будет в два раза больше энергии электрического поля внутри конденсатора?

Решение

1. Максимальное значение энергии запасаемой в контуре:

$$W_{max} = \frac{Cu_1^2}{2} = \frac{2 \cdot 10^{-5} \cdot 16}{2} = 1,6 \cdot 10^{-4}\,Дж;$$

2. Энергия магнитного поля в момент времени τ:

$$W_{B2} = \frac{2W_{max}}{3} = \frac{3,2 \cdot 10^{-4}}{3} \approx 1,067 \cdot 10^{-4}\,Дж;$$

3. Сила тока в момент времени τ:

$$W_{B2}=\frac{Li_2^2}{2};\quad\Leftarrow\quad i_2=\sqrt{\frac{2W_{B2}}{L}}=\sqrt{\frac{2\cdot 1{,}067\cdot 10^{-4}}{0{,}2}}\approx 0{,}0327\,\text{А};$$

4. Энергия электрического поля конденсатора в момент времени τ:

$$W_{E2}=\frac{W_{max}}{3}=\frac{1{,}6\cdot 10^{-4}}{3}\approx 5{,}33\cdot 10^{-5}\,\text{Дж};$$

5. Напряжение на конденсаторе в момент времени τ:

$$W_{E2}=\frac{Cu_2^2}{2};\quad\Rightarrow\quad u_2=\sqrt{\frac{2W_{E2}}{C}}\approx\sqrt{\frac{2\cdot 5{,}33\cdot 10^{-5}}{2\cdot 10^{-5}}}\approx 2{,}31\,\text{В};$$

6. Заряд конденсатора в момент времени τ:

$$W_{E2}=\frac{q_2^2}{2C};\quad\Rightarrow\quad q_2=\sqrt{2W_{E2}C}=\sqrt{2\cdot 5{,}33\cdot 10^{-5}\cdot 2\cdot 10^{-5}}\approx 4{,}6\cdot 10^{-5}\,\text{Кл};$$

---

304. Конденсатору колебательного контура был сообщён заряд $q = 10^{-4}$ Кл. В контуре возникли колебания, которые через некоторое время затухли. Ёмкость конденсатора $C = 10^{-8}$ Ф. Определить количество теплоты выделившейся в контуре к моменту полного прекращения колебаний, считая, что вся электромагнитная энергия трансформировалась в тепло.

Решение

$$Q\approx W_{max}=\frac{q^2}{2C}=\frac{10^{-8}}{2\cdot 10^{-8}}=0{,}5\,\text{Дж};$$

---

305. Записать дифференциальное уравнение, описывающее процесс гармонических колебаний в контуре, содержащем параллельно соединённые конденсатор $C = 500$ пФ и катушку индуктивности $L = 8$ мГн.

Решение

1. Общий вид дифференциального уравнения, описывающего изменение заряда конденсатора во времени:

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\omega^2q=0;\quad \ddot{q}+\omega^2q=0;$$

2. Циклическая частота колебаний:

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}};\quad \omega^2=\frac{1}{LC}=\frac{1}{8\cdot 10^{-3}\cdot 5\cdot 10^{-10}}=2{,}5\cdot 10^{11}\,\text{c}^{-2};$$

3. Уравнение колебаний:

$$\ddot{q}+2{,}5\cdot 10^{11}q=0;$$

---

306. Записать дифференциальное уравнение, описывающее гармонические колебания в LC – контуре, если при напряжении на конденсаторе $u = 5$ В в нём накапливается заряд $q = 400$ нКл, а при изменении силы тока на $\Delta i = 0{,}5$ А за время $\Delta t = 0{,}02$ с в контуре возникает ЭДС самоиндукции $\varepsilon_{si} = 4$ В.

Решение

1. Индуктивность контура:

$$|\varepsilon_{si}| = L\frac{\Delta i}{\Delta t}; \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\varepsilon_{si}\Delta t}{\Delta i} = \frac{4\cdot 0{,}02}{0{,}5} = 0{,}16\ \text{Гн};$$

2. Ёмкость контура:

$$C = \frac{q}{u} = \frac{4\cdot 10^{-7}}{5} = 8\cdot 10^{-8}\,\Phi;$$

3. Циклическая частота собственных колебаний контура:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \omega^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{0{,}16\cdot 8\cdot 10^{-8}} = 7{,}8\cdot 10^7\,c^{-2};$$

4. Дифференциальное уравнение:

$$\ddot{q} + 7{,}8\cdot 10^7 q = 0;$$

---

307. Заряд на пластинах конденсатора в LC – контуре изменяется по закону:

$$q(t) = 10^{-7}\cos\left(1{,}6\cdot 10^4 t\right);$$

Записать соответствующее дифференциальное уравнение.

Решение

1. Квадрат циклической частоты колебаний:

$$\omega^2 = 2{,}56\cdot 10^8\,c^{-2};$$

2. Дифференциальное уравнение колебаний, соответствующее заданному гармоническому изменению заряда конденсатора:

$$\ddot{q} + 2{,}56\cdot 10^8 q = 0;$$

---

308. В колебательном контуре заряд на обкладках достигает максимального значения $q_m = 5\cdot 10^{-7}$ Кл, а максимальная сила тока i_m = 10 мА. Записать дифференциальное уравнение колебаний в этом контуре.

Решение

1. Квадрат циклической частоты собственных колебаний в контуре:

$$\frac{q_m^2}{2C} = \frac{Li_m^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad LC = \frac{q_m^2}{i_m^2}; \quad \frac{1}{LC} = \omega^2 = \frac{i_m^2}{q_m^2} = \frac{10^{-4}}{25\cdot 10^{-14}} = 4\cdot 10^8\,c^{-2};$$

2. Дифференциальное уравнение колебаний:

$$\ddot{q} + 4\cdot 10^8 q = 0;$$

---

309. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний в LC – контуре имеет вид:

$$\ddot{q} + 6{,}25\cdot 10^8 q = 0;$$

Определить период электромагнитных колебаний в контуре. Записать закон изменения заряда q(t), напряжения на конденсаторе u(t) и силы тока через катушку индуктивности i(t), если известно, что полная энергия в контуре $W_m = 4\cdot 10^{-6}$ Дж, а ёмкость C = 800 пФ.

Решение

1. Циклическая частота и период собственных электромагнитных колебаний в заданном LC – контуре:

$$\omega = \sqrt{6{,}25 \cdot 10^8} = 2{,}5 \cdot 10^4 c^{-1}; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2{,}512 \cdot 10^{-4} c;$$

2. Амплитудное значение напряжения:

$$W_m = \frac{Cu_m^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad u_m = \sqrt{\frac{2W_m}{C}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{-6}}{8 \cdot 10^{-10}}} = 100 \text{ В};$$

3. Амплитудное значение заряда:

$$W_m = \frac{q_m^2}{2C}; \quad \Rightarrow \quad q_m = \sqrt{2W_mC} = \sqrt{8 \cdot 10^{-6} \cdot 8 \cdot 10^{-10}} = 8 \cdot 10^{-8} \text{Кл};$$

4. Зависимость напряжения на конденсаторе от времени:

$$u(t) = 100\cos(2{,}5 \cdot 10^4 t);$$

5. Зависимость заряда конденсатора от времени:

$$q(t) = 8 \cdot 10^{-8} \cos(2{,}5 \cdot 10^4 t);$$

6. Зависимость силы тока от времени:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -8 \cdot 10^{-8} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-4} \sin(2{,}5 \cdot 10^4 t) = -2 \cdot 10^{-3} \sin(2{,}5 \cdot 10^4 t);$$

---

310. Дифференциальное уравнение колебаний в LC – контуре имеет вид:

$$\ddot{q} + 10^{10} q = 0;$$

Индуктивность катушки L = 0,5 Гн, полная энергия электромагнитных колебаний W_m = 5·10 $^{-3}$ Дж. Найти период колебаний и записать зависимости изменения во времени заряда конденсатора q(t) и напряжения на конденсаторе u(t).

Решение

1. Циклическая частота и период собственных электромагнитных колебаний в заданном LC – контуре:

$$\omega = \sqrt{1 \cdot 10^{10}} = 10^5 c^{-1}; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 6{,}28 \cdot 10^{-5} c;$$

2. Амплитудное значение силы тока:

$$W_m = \frac{Li_m^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad i_m = \sqrt{\frac{2W_m}{L}} = \sqrt{\frac{10^{-2}}{0{,}5}} = 0{,}02\text{А};$$

3. Ёмкость конденсатора:

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}; \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{10^{10} \cdot 0{,}5} = 2 \cdot 10^{-10} \text{Ф};$$

4. Амплитудное значение заряда:

$$W_m = \frac{q_m^2}{2C}; \quad \Rightarrow \quad q_m = \sqrt{2W_mC} = \sqrt{10 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-10}} \approx 4{,}47 \cdot 10^{-8} \text{Кл};$$

5. Зависимость заряда конденсатора от времени:

$$q(t) = 4{,}47 \cdot 10^{-8} \cos(10^5 t);$$

6. Амплитудное значение напряжения:

$$W_m = \frac{Cu_m^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad u_m = \sqrt{\frac{2W_m}{C}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-10}}} = 158 \text{ В};$$

7. Зависимость напряжения на конденсаторе от времени:

$$u(t) = 158\cos(10^5 t);$$

---

8. Переменный ток

311. По заданным графикам записать уравнения изменения во времени соответствующих величин.

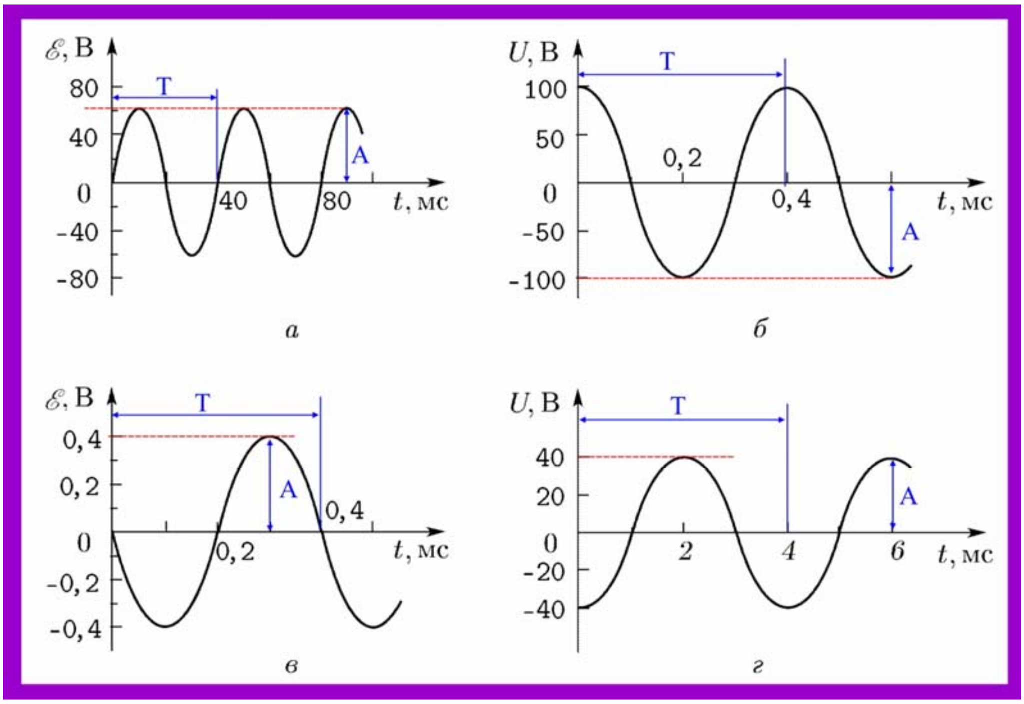


Рис. 311. Графики колебательных процессов

Решение

а) $T = 4 \cdot 10^{-2}\text{с}; \quad \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{6{,}28}{4 \cdot 10^{-2}} = 157\text{с}^{-1}; \quad \varepsilon_{max} = 60\text{В};$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{max} \sin \omega t = 60 \sin 157t = 60 \sin(50\pi t);$$

б) $T = 4 \cdot 10^{-2}\text{с}; \quad \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{6{,}28}{4 \cdot 10^{-4}} = 1{,}57 \cdot 10^{4}\text{с}^{-1}; \quad u_{max} = 100\text{В};$

$$u(t) = u_{max} \cos \omega t = 100 \cos(1{,}57 \cdot 10^{4} t) \approx 100 \cos(10^{3} \pi t);$$

в) $T = 4 \cdot 10^{-4}\text{с}; \quad \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{6{,}28}{4 \cdot 10^{-4}} = 1{,}57 \cdot 10^{4}\text{с}^{-1}; \quad \varepsilon_{max} = 0{,}4\text{В};$

$$\varepsilon(t) = -\varepsilon_{max} \sin \omega t = 0{,}4 \sin(1{,}57 \cdot 10^{4} t) = -0{,}4 \sin(10^{3} \pi t);$$

г) $T = 4 \cdot 10^{-3}\text{с}; \quad \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{6{,}28}{4 \cdot 10^{-4}} = 1{,}57 \cdot 10^{3}\text{с}^{-1}; \quad u_{max} = 40\text{В};$

$$u(t) = -u_{max} \cos \omega t = -40 \cos(1{,}57 \cdot 10^{3} t) = -100 \cos(500\pi t);$$

312. По заданным графикам записать уравнения изменения во времени силы тока.

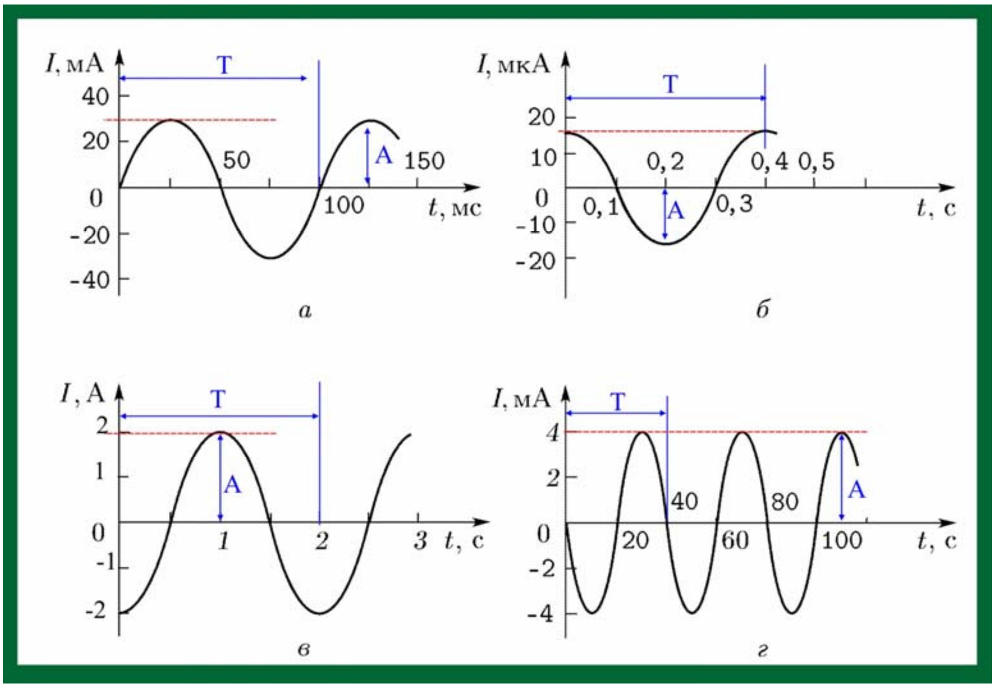


Рис. 312. Изменение во времени силы тока

Решение

а) $T = 0{,}1c; \quad \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{6{,}28}{0{,}1} = 62{,}8c^{-1}; \quad i_{max} = 2\cdot 10^{-2}A;$

$$i(t) = i_{max}\sin\omega t = 2\cdot 10^{-2}\sin 62{,}8t = 2\cdot 10^{-2}\sin(20\pi t);$$

б) $T = 0{,}4c; \quad \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{6{,}28}{0{,}4} = 15{,}7c^{-1}; \quad i_{max} = 1{,}5\cdot 10^{-5}A;$

$$i(t) = i_{max}\cos\omega t = 1{,}5\cdot 10^{-5}\cos(15{,}7t) = 1{,}5\cdot 10^{-5}\sin(5\pi t);$$

в) $T = 2c; \quad \omega = \dfrac{2\pi}{T} = 3{,}14c^{-1}; \quad i_{max} = 2A;$

$$i(t) = -i_{max}\cos\omega t = -2\cos(3{,}14t) = 2\sin(\pi t);$$

г) $T = 40c; \quad \omega = \dfrac{2\pi}{T} = 0{,}157c^{-1}; \quad i_{max} = 4A;$

$$i(t) = -i_{max}\sin\omega t = -4\sin(0{,}157t) = -4\sin(0{,}05\pi t);$$

---

313. Проволочная рамка площадью S равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией B вокруг оси, перпендикулярной направлению поля. Период вращения рамки T. Записать уравнение изменения в функции времени магнитного, потока, пронизывающего рамку и ЭДС индукции

Решение

$$\Phi_B = BS\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right); \quad |\varepsilon_i| = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{2\pi}{T}BS\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right);$$

---

314. Рамка площадью S = 400 см^2 имеет N = 100 витков м вращается в магнитном поле с индукцией B = 10 мТл, период вращения рамки T = 0,1 с. Определить максимальное значение ЭДС, возникающей в рамке, если ось вращения перпендикулярна к силовым линиям.

Решение

1. При вращении рамки периодически изменяется магнитный поток, пронизывающий её поверхность:

$$|\varepsilon_i| = \frac{d\Phi_B}{dt} = NB\omega\frac{dS}{dt} = NBS\frac{2\pi}{T}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right); \quad \left|\varepsilon_{1(max)}\right| = \frac{2\pi NBS}{T};$$

$$\left|\varepsilon_{i(max)}\right| = \frac{6{,}28\cdot 10^{2}\cdot 10^{-2}\cdot 4\cdot 10^{-2}}{0{,}1} = 2{,}48В;$$

---

315. Рамка площадью S = 300 см^2 имеет N = 200 витков и вращается в магнитном поле с индукцией B = 15 мТл. Определить период вращения рамки, если ЭДС индукции имеет амплитудное значение $\varepsilon_{i(max)}$ = 14,4 В.

Решение

$$|\varepsilon_i| = \frac{d\Phi_B}{dt} = NB\omega\frac{dS}{dt} = NBS\frac{2\pi}{T}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right); \quad \left|\varepsilon_{1(max)}\right| = \frac{2\pi NBS}{T};$$

$$T = \frac{2\pi NBS}{\varepsilon_{1(max)}} = \frac{6{,}28\cdot 200\cdot 1{,}5\cdot 10^{-2}\cdot 3\cdot 10^{-2}}{14{,}4} \approx 0{,}0393с;$$

---

316. Переменный ток возбуждается в рамке состоящей из N = 200 витков провода, рамка вращается в магнитном поле с индукцией B = 0,15 мТл. Площадь витка S = 300 см^2. Определить ЭДС индукции ε_i через время τ = 0,01 с после начала движения рамки, когда её плоскость параллельна линиям индукции. Амплитуда ЭДС индукции ε_i = 7,2 В.

Решение

1. Период вращения рамки:

$$T = \frac{2\pi NBS}{\varepsilon_{i(max)}} = \frac{6{,}28\cdot 200\cdot 1{,}5\cdot 10^{-4}\cdot 3\cdot 10^{-2}}{7{,}2} = 7{,}85\cdot 10^{-4}с;$$

2. ЭДС индукции в заданный момент времени:

$$\varepsilon_{i(\tau)} = \varepsilon_{i(max)}\sin\left(\frac{2\pi}{T}\tau\right) = 7{,}2\sin\left(\frac{6{,}28\cdot 0{,}01}{7{,}85\cdot 10^{-4}}\right) \approx 7\ В;$$

---

317. В магнитном поле с индукцией B = 0,5 Тл с циклической частотой ν = 5 с$^{-1}$ вращается прямоугольная рамка площадью S = 400 см^2. Определить период, циклическую частоту и максимальное значение ЭДС в раке, если её ось вращения перпендикулярна линиям магнитной индукции магнитного поля.

Решение

1. Период и циклическая частота вращения рамки:

$$2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}; \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{\nu} = 0{,}2с; \quad \omega = 31{,}4\frac{рад}{с};$$

2. Амплитудное значение ЭДС индукции

$$\left|\varepsilon_{1(max)}\right| = \frac{2\pi BS}{T} = \frac{6{,}28\cdot 0{,}5\cdot 4\cdot 10^{-2}}{0{,}2} \approx 0{,}628\ В;$$

---

318. Ротор генератора переменного тока вращается с частой ν = 60 Гц в магнитном поле с индукцией B = 0,15 Тл. Сколько витков должно быть в обмотке площадью S = 0,02 м^2, чтобы амплитуда напряжения была u_m = 170 В.

Решение

$$u_m = 2\pi\nu BSN; \quad \Rightarrow \quad N = \frac{u_m}{2\pi\nu BS} = \frac{170}{6{,}28 \cdot 60 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}02} \approx 150;$$

---

319. Написать уравнение для мгновенных значений ЭДС индукции, возникающих при равномерном вращении витка в однородном магнитном поле, если через время τ = 1/600 с после прохождения витком нейтрального положения мгновенное значение ЭДС ε = 5 В. Период вращения витка T = 0,02 с.

Решение

1. Амплитудное значение ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i(\tau) = \varepsilon_{i(max)} \sin\left(\frac{2\pi}{T}\tau\right); \quad \varepsilon_{i(max)} = \frac{\varepsilon_i(\tau)}{\sin\left(\frac{2\pi}{T}\tau\right)} = \frac{5}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} \approx 10\ \text{В};$$

2. Циклическая частота вращения витка:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{6{,}28}{0{,}02} = 314\,\frac{\text{рад}}{\text{с}} \equiv 100\pi t;$$

3. Уравнение изменения во времени ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i(t) = 10\sin(100\pi t);$$

---

320. ЭДС переменного тока задана уравнением:

$$\varepsilon(t) = 100\sin(20\pi t);$$

Определить наибольшее эффективное значение ЭДС ε_m, а так же её значение для фазы φ = π/6. Найти частоту и период тока.

Решение

1. Максимальное эффективное значение ЭДС:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{2}} = 70{,}7\ \text{В};$$

2. Эффективное значение ЭДС при заданном значении фазы:

$$\varepsilon(\varphi) = 100\sin\frac{\pi}{6} = 50\text{В};$$

3. Период и частота изменения тока:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{20\pi} = 0{,}1\text{с}; \quad \nu = \frac{1}{T} = 10\ \text{Гц};$$

---

321. Электродвижущая сила индукции, возникающая в рамке при её вращении в однородном магнитном поле, изменяется по закону:

$$\varepsilon(t) = 12\sin(100\pi t);$$

Определить мгновенное значение ЭДС в момент времени τ = 0,01 с после начала колебаний, а так же период и частоту переменного тока.

Решение

1. Период и частота переменного тока:

$$\omega = 100\pi; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{100\pi} = 0{,}02\text{с}; \quad \nu = \frac{1}{T} = 50\ \text{Гц};$$

2. Значение ЭДС в заданный момент времени τ:

$$\varepsilon(\tau) = 12\sin(100\pi \cdot 0{,}01) = 12\sin\pi = 0;$$

---

322. По цепи течёт переменный ток с частотой ν = 2 МГц. Через какое время τ после прохождения нулевого значения сила тока будет равна $i(\tau)$ = 25 мА, если его амплитудное значение i_m = 100 мА?

Решение

1. Циклическая частота колебаний:

$$\omega = 4\pi \cdot 10^6 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

2. искомое время τ:

$$i(\tau) = i_m \sin(\omega\tau); \quad \sin\omega\tau = 0{,}25; \quad \omega\tau = \arcsin 0{,}25; \quad \tau\frac{4{,}61\pi}{4\pi}10^{-6} \approx 1{,}15\,\text{мкс};$$

---

323. Электродвижущая сила в цепи переменного тока описывается уравнением:

$$\varepsilon(t) = 120\sin(628t);$$

Определить действующее значение ЭДС и её период. Какой станет зависимость ЭДС от времени, если увеличить частоту вращения рамки в два раза?

Решение

1. Действующее значение ЭДС:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{2}} = \frac{120}{\sqrt{2}} \approx 84{,}85\ \text{В};$$

2. Период изменения ЭДС:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6{,}28}{628} = 0{,}01\text{с};$$

3. Уравнение ЭДС при увеличении в два раза частоты вращения:

$$|\varepsilon_i| = \frac{d\Phi_B}{dt} = NB\omega\frac{dS}{dt} = NBS\frac{2\pi}{T}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right); \quad \left|\varepsilon_{1(max)}\right| = 2\pi\nu NDS; \quad 2\pi NBS = const;$$

$$\varepsilon_1(t) = 2\varepsilon_m\sin(2\omega t) = 240\sin(1256t);$$

---

324. Амплитуда ЭДС переменного тока с частотой ν = 50 Гц составляет ε_m = 100 В. Каково значение ЭДС через τ_1 = 0,0025 с и τ_2 = 0,005 с, считая от начала периода?

Решение

1. Циклическая частота изменения ЭДС:

$$\omega = 2\pi\nu = 314\text{с}^{-1};$$

2. Уравнение изменения ЭДС во времени:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_m \sin\omega t;$$

3. ЭДС в момент времени τ_1:

$$\varepsilon(\tau_1) = \varepsilon_m \sin\omega\tau_1 = 100\sin(100\pi \cdot 0{,}0025) = 100\sin\frac{\pi}{4} \approx 71 \text{ В};$$

4. ЭДС в момент времени τ_2:

$$\varepsilon(\tau_1) = \varepsilon_m \sin\omega\tau_1 = 100\sin(100\pi \cdot 0{,}005) = 100\sin\frac{\pi}{2} = 100 \text{ В};$$

---

325. Мгновенное значение переменного напряжения для фазы $\varphi_1 = 60^0$ равно ε_1 = 120 В. Какова амплитуда напряжения? Чему равно мгновенное значение ЭДС через время τ_2 = 0,25 с, считая от начала периода. Частота переменного тока составляет ν = 50 Гц.

Решение

1. Амплитудное значение ЭДС:

$$\varepsilon(\tau_1) = \varepsilon_m \sin\varphi_1; \quad \varepsilon_m = \frac{\varepsilon_1(\tau)}{\sin 60^0} \approx 138{,}56 \text{ В};$$

2. Циклическая частота колебаний:

$$\omega = 2\pi\nu = 314\text{с}^{-1};$$

3. Значение ЭДС для времени τ_2:

$$\varepsilon(\tau_2) = \varepsilon_m \sin(\omega\tau_1) = 138{,}56\sin(100\pi \cdot 0{,}25) = 0;$$

---

326. Напряжение на концах участка цепи, по которому течёт переменный ток, изменяется в соответствии с уравнением:

$$u(t) = u_m \sin(\omega t + \pi/6);$$

В момент времени τ = T/2 мгновенное значение напряжения $u(\tau)$ = 10 В. Определить значение амплитуды напряжения.

Решение

$$u(\tau) = u_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = u_m \sin\frac{7}{6}\pi = -0{,}5u_m; \quad u_m = -\frac{10}{0{,}5} = \pm 20\text{В};$$

---

327. Мгновенное значение силы тока для фазы $\varphi_1 = \pi/6$ равно i_1 = 6А. Определить амплитудное и действующее значение силы тока i_m.

Решение

1. Амплитудное значение силы тока:

$$i_1 = i_m \sin\varphi_1; \quad i_m = \frac{i_1}{\sin\varphi_1} = \frac{6}{0{,}5} = 12\text{А};$$

2. Действующее значение силы тока:

$$i = \frac{i_m}{\sqrt{2}} = \frac{12}{1{,}41} \approx 8{,}51\text{А};$$

---

328. Действующее значение в электросети u = 220 В. На какое напряжение должна быть рассчитана изоляция проводов?

Решение

$$u_m = u\sqrt{2} = 310{,}2 \text{ В};$$

---

329. Напряжение пробоя конденсатора u_1 = 450 В. Можно ли включить этот конденсатор в цепь переменного тока, в которой вольтметр показывает напряжение u_2 = 380 В?

Решение

1. Вольтметр регистрирует действующее значение напряжения, амплитудное значение напряжения будет равно:

$$u_m = u_2\sqrt{2} = 535{,}8\ \text{В}; \quad \Rightarrow \quad u_m > u_1; \quad \text{Включать конденсатор опасно!}$$

---

330. Потенциал зажигания неоновой лампы $\Delta\varphi_1$ = 130 В, а потенциал гашения φ_2 = 30 В. Будет ли гореть лампа, если её включить в цепь переменного тока с напряжением u_1 = 127 В?

Решение

1. Амплитудное значение напряжения в сети:

$$u_m = u_1\sqrt{2} \approx 179{,}1\ \text{В} > \Delta\varphi_1;$$

Другими словами, лампа гореть будет.

---

331. Напряжение зажигания неоновой лампы u_1 = 150 В. Почему эта лампа горит в сети переменного тока с напряжением u = 127 В?

Решение

1. Лампа горит при заданных условиях, потому что амплитудное значение напряжение в сети превосходит напряжение зажигания:

$$u_m = u\sqrt{2} = 179{,}07\text{В} > u_1;$$

---

332. Неоновая лампа включена в сеть переменного тока с действующим напряжением u_1 = 71 В и периодом T = 0,02 с. Найти значение промежутка времени, в течение которого будет длиться вспышка лампы и частоту этих вспышек. Напряжение зажигания лампы u_2 = 86,7 В, рано напряжению её гашения.

Решение

1. Амплитудное значение напряжения в сети:

$$u_m = u_1\sqrt{2} \approx 100\text{В};$$

2. Закономерность изменения напряжения в функции времени:

$$u(t) = u_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right); \quad u_2 = u_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}\Delta t\right); \quad \frac{2\pi}{T}\Delta t = \arcsin\frac{u_2}{u_m};$$

$$\frac{2\pi}{T}\Delta t = \frac{\pi}{3}; \quad \Delta t = \frac{T}{6} \approx 3{,}3\cdot 10^{-3}\,\text{с}.$$

3. Лампа будет вспыхивать как в течение положительного, так и в течение отрицательного полупериода колебаний напряжения, поэтому:

$$T_x = \frac{T}{2}; \quad \nu_x = 2\nu = 100\ \text{Гц};$$

---

9. Цепи переменного тока

333. Записать уравнения зависимости напряжения u(t) и силы тока i(t) в цепи с электроплитки с сопротивлением R = 50 Ом, включённой в цепь переменного тока стандартной частоты с действующим значением напряжения в сети u_1 = 220 В. Реактивными сопротивлениями нагревателя пренебречь.

Решение

1. Амплитудное значение напряжения в сети:

$$u_m = u_1\sqrt{2} = 310{,}2В;$$

2. Зависимость напряжения от времени:

$$u(t) = u_m \sin(2\pi\nu t) = 310{,}2\sin(100\pi t);$$

3. Амплитудное значение силы тока в цепи:

$$i_m = \frac{u_m}{R} \approx 6{,}2А;$$

4. Зависимость силы тока в цепи от времени:

$$i(t) = i_m \sin(2\pi\nu t) = 6{,}2\sin(100\pi t);$$

---

334. Конденсатор ёмкостью C = 36 мкФ включён в сеть переменного тока стандартной частоты с напряжением u_1 = 220 В. Записать уравнения напряжения и силы тока в функции времени. Активным сопротивлением цепи можно пренебречь.

Решение

1. Амплитудное значение напряжения в сети:

$$u_m = u_1\sqrt{2} = 310{,}2В;$$

2. Зависимость напряжения от времени:

$$u(t) = u_m \sin(2\pi\nu t) = 310{,}2\sin(100\pi t);$$

3. Реактивное сопротивление конденсатора:

$$X_C = \frac{1}{2\pi\nu C} = \frac{1}{2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 3{,}6\cdot 10^{-5}} \approx 88{,}46 \text{ Ом};$$

5. Амплитудное значение силы тока в цепи:

$$i_m = \frac{u_m}{R} = \frac{310{,}2}{88{,}46} \approx 3{,}5А;$$

6. Зависимость силы тока в цепи от времени:

$$i(t) = i_m \cos(2\pi\nu t) = 3{,}5\cos(100\pi t);$$

---

335. Катушка с незначительным активным сопротивлением и индуктивностью L = 160 мГн включенная в цепь переменного тока стандартной частоты. Амперметр, включённый в цепь, показал силу тока i = 2,5 А. Пренебрегая активным сопротивлением амперметра, и соединительных проводов, записать уравнения изменения во времени напряжения и силы тока.

Решение

1. Амплитудное значение силы тока:

$$i_m = i\sqrt{2} = 3{,}525\ \text{А};$$

2. Зависимость силы тока в цепи от времени:

$$i(t) = i_m \sin\left(2\pi\nu t - \frac{\pi}{2}\right) = 3{,}525 \sin\pi\left(100t - \frac{1}{2}\right);$$

3. Реактивное сопротивление катушки индуктивности:

$$X_L = 2\pi\nu L = 6{,}28\cdot 50\cdot 0{,}16 \approx 50\ \text{Ом};$$

4. Зависимость напряжения от времени:

$$u(t) = i_m X_L \sin(2\pi\nu t) = 177{,}1\sin(100\pi t);$$

---

356. Конденсатор ёмкостью C = 250 мкФ включается в сеть переменного тока. Определить реактивное сопротивление конденсатора на частотах ν_1 = 50 Гц, ν_2 = 200 Гц, ν_3 = 400 Гц.

Решение

$$X_{C1} = \frac{1}{2\pi\nu_1 C} = \frac{1}{100\cdot 2{,}5\cdot 10^{-4}} = 40\ \text{Ом};$$

$$X_{C2} = \frac{1}{2\pi\nu_2 C} = \frac{1}{400\cdot 2{,}5\cdot 10^{-4}} = 10\ \text{Ом};$$

$$X_{C3} = \frac{1}{2\pi\nu_3 C} = \frac{1}{800\cdot 2{,}5\cdot 10^{-4}} = 5\ \text{Ом};$$

---

357. Конденсатор, включённый в бытовую сеть переменного тока, обладает реактивным сопротивлением X_C = 800 Ом. Чему равна ёмкость конденсатора?

Решение

$$X_{C1} = \frac{1}{2\pi\nu C};\quad C = \frac{1}{2\pi\nu X_C} = \frac{1}{100\cdot 800} = 1{,}25\cdot 10^{-5}\,\text{Ф} \equiv 12\text{мкФ};$$

---

358. В цепи технического переменного тока конденсатор имеет сопротивление X_{C1} = 100 Ом. Определить сопротивление конденсатора при включении его в сеть с частотой ν_2 = 5 кГц. Какова ёмкость конденсатора?

Решение

1. Ёмкость конденсатора:

$$X_{C1} = \frac{1}{2\pi\nu C};\quad C = \frac{1}{2\pi\nu X_C} = \frac{1}{100\cdot 100} = 1\cdot 10^{-4}\,\text{Ф} \equiv 100\ \text{мкФ};$$

2. Сопротивление конденсатора в сети с частотой ν_2:

$$X_{C2} = \frac{1}{2\pi\nu_2 C} = \frac{1}{2\cdot 5\cdot 10^3\cdot 10^2} = 1\cdot 10^{-5}\,\text{Ом};$$

---

359. Найти период переменного тока, если конденсатор ёмкостью C = 1 мкФ представляет для него сопротивление X_C = 16 Ом.

Решение

$$X_C = \frac{1}{2\pi\nu C};\quad \nu = \frac{1}{2\pi X_C};\quad T = \frac{1}{\nu} = 2\pi X_C C = 6{,}28\cdot 16\cdot 10^{-6} = 1\cdot 10^{-4}\,\text{с} \equiv 0{,}1\text{мс};$$

---

360. Определить ёмкость конденсатора, если амплитуда напряжения u_m = 200 В, амплитуда силы тока i_m = 0,5 А, циклическая частота переменного тока ω = 500 рад/с.

Решение

1. На основании закона Ома:

$$i_m = \frac{u_m}{X_C}; \quad \Rightarrow \quad X_C = \frac{u_m}{i_m}; \quad \frac{1}{\omega C} = \frac{u_m}{i_m}; \quad C = \frac{i_m}{u_m\omega} = \frac{0,5}{200 \cdot 500} = 5\text{мкФ};$$

---

361. Сила тока в цепи изменяется в соответствии с уравнением:

$$i(t) = 0,2\sin(314t);$$

Определить падение напряжение на конденсаторе ёмкостью С = 2 мкФ. Записать закон изменения напряжения.

Решение

1. Реактивное сопротивление конденсатора:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} \approx 1592,35 \text{ Ом};$$

2. Падение напряжения на конденсаторе:

$$u_C = i_m X_C = 0,2 \cdot 1592,35 \approx 318,47 \text{ В};$$

3. Закон изменения напряжения на конденсаторе:

$$u(t) = u_C \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -u_C \cos\omega t = u_C \sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right) = 318,47\pi\sin\left(100 - \frac{1}{2}\right);$$

---

362. Напряжение на конденсаторе изменяется по закону:

$$u(t) = 220\sin(314t);$$

Записать уравнение для мгновенных значений силы тока в цепи с конденсатором ёмкостью С = 20 мкФ. По какому закону изменяется заряд конденсатора?

Решение

1. Реактивное сопротивление конденсатора:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 2 \cdot 10^{-5}} \approx 159,24 \text{ Ом};$$

2. Амплитудное значение силы тока, протекающего через конденсатор:

$$i_m = \frac{u_m}{X_C} = \frac{220}{159,24} \approx 1,38 \text{ А};$$

3. Уравнение изменения тока:

$$i(t) = 1,38\sin\left(314t + \frac{\pi}{2}\right);$$

4. Амплитудное значение заряда конденсатора:

$$q_m = Cu_m = 2 \cdot 10^{-5} \cdot 220 \approx 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ Кл};$$

5. Уравнение изменения заряда конденсатора:

$$q(t) = q_m \sin\omega t = 4,4 \cdot 10^{-3} \sin(314t);$$

---

363. К переменному напряжению величиной u = 127 В подключена цепь, состоящая из последовательно соединённых резистора сопротивлением R = 100 Ом и конденсатора ёмкостью C = 40 мкФ. Определить амплитуду силы тока в цепи при частоте ν = 50 Гц.

Решение

1. Реактивное сопротивление конденсатора:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{6{,}28 \cdot 50 \cdot 4 \cdot 10^{-5}} \approx 79{,}62\ \text{Ом};$$

2. Полное сопротивление цепи:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{10^4 + 6339} \approx 127{,}8\ \text{Ом};$$

3. Амплитудное значение силы тока:

$$i_m = \frac{u\sqrt{2}}{Z} = \frac{127 \cdot 1{,}41}{127{,}8} \approx 1{,}4\text{А};$$

---

364. К бытовой сети подключена цепь, состоящая из последовательно включённого активного сопротивления R = 150 Ом и конденсатора C = 50 мкФ. Определить амплитудное значение силы тока в цепи, если действующее напряжение в сети u = 120 В.

Решение

1. Реактивное сопротивление конденсатора:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{6{,}28 \cdot 50 \cdot 5 \cdot 10^{-5}} \approx 63{,}7\ \text{Ом};$$

2. Полное сопротивление цепи:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{2{,}25 \cdot 10^4 + 4057{,}7} \approx 163\ \text{Ом};$$

3. Амплитудное значение силы тока:

$$i_m = \frac{u\sqrt{2}}{Z} = \frac{120 \cdot 1{,}41}{163} \approx 1{,}038\ \text{А};$$

---

365. Цепь состоит из последовательно соединённых активного сопротивления R = 10 Ом и конденсатора C = 50 мкФ. Определить сдвиг фазы между силой тока и напряжением в цепи при циклической частоте тока $\omega = 10^3\ \text{с}^{-1}$.

Решение

1. Реактивное сопротивление конденсатора:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-5}} \approx 20\ \text{Ом};$$

2. Сдвиг фаз между током и напряжением:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_C}{R}; \quad \Rightarrow \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{X_C}{R} = \operatorname{arctg}2 \approx 63{,}43^0;$$

---

366. В сеть переменного тока стандартной частоты и напряжением u = 127 В включены последовательно соединённые активное сопротивление R = 100 Ом и конденсатор C = 40 мкФ. Определить амплитуду силы тока и сдвиг фаз между током и напряжением при напряжении в сети u = 127 В.

Решение

1. Реактивное сопротивление конденсатора:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{6{,}28 \cdot 50 \cdot 40 \cdot 10^{-6}} \approx 79{,}6\text{Ом};$$

2. Сдвиг фаз между током и напряжением:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{X_C}{R}; \quad \Rightarrow \quad \varphi = \mathrm{arctg}\frac{X_C}{R} = \frac{79{,}6}{100} = \mathrm{arctg}(-0{,}796) \approx -40^0;$$

3. Полное сопротивление цепи:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{10^4 + 6336{,}2} \approx \ 127{,}8\ \text{Ом};$$

4. Амплитудное значение силы тока:

$$i_m = \frac{u\sqrt{2}}{Z} = \frac{127 \cdot 1{,}41}{127{,}8} \approx 1{,}4\text{А};$$

---

367. Конденсатор ёмкостью C = 5 мкФ и проводник сопротивлением R = 150 Ом включены последовательно в цепь переменного тока с напряжением u = 120 В и частотой ν = 50 Гц. Определить амплитудное и действующее значение силы тока, сдвиг фаз между током и напряжением, а так же выделяющуюся в цепи мощность.

Решение

1. Реактивное сопротивление конденсатора:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} \approx 637\ \text{Ом};$$

2. Сдвиг фаз между током и напряжением:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{X_C}{R}; \quad \Rightarrow \quad \varphi = \mathrm{arctg}\frac{X_C}{R} = \frac{637}{150} = \mathrm{arctg}(4{,}25) \approx 76{,}76^0;$$

3. Полное сопротивление цепи:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{2{,}25 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^5} \approx \ 654{,}4\ \text{Ом};$$

4. Амплитудное и действующее значение силы тока:

$$i_m = \frac{u\sqrt{2}}{Z} = \frac{120 \cdot 1{,}41}{654{,}4} \approx 0{,}258\text{А}; \quad i = \frac{i_m}{\sqrt{2}} \approx 0{,}183\text{А};$$

5. Мощность, выделяемая в цепи:

$$P = iu\cos\varphi = 0{,}183 \cdot 120 \cdot \cos 76{,}76^0 \approx 5{,}1\ \text{Вт};$$

---

368. В сеть переменного тока с действующим напряжением u = 200 В последовательно включены резистор с сопротивление R = 150 Ом и конденсатор ёмкостью C = 16 мкФ. Частота переменного тока ν = 50 Гц. Записать закон изменения силы тока и напряжения в цепи.

Решение

1. Реактивное сопротивление конденсатора:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 16 \cdot 10^{-6}} \approx 199\ \text{Ом};$$

2. Полное сопротивление цепи:

$$Z=\sqrt{R^2+X_C^2}=\sqrt{2{,}25\cdot 10^4+39601}\approx\ 249{,}2\ \text{Ом};$$

3. Амплитудное значение силы тока и напряжения:

$$u_m=u\sqrt{2}\approx 282\ \text{В};\quad i_m=\frac{u\sqrt{2}}{Z}=\frac{200\cdot 1{,}41}{249{,}2}\approx 1{,}13\ \text{А};$$

4. Сдвиг фаз между током и напряжением:

$$\text{tg}\varphi=\frac{X_C}{R};\quad\Rightarrow\quad \varphi=\text{arctg}\frac{X_C}{R}=\frac{199}{150}=\text{arctg}(4{,}25)\approx 53^0;$$

5. Закон изменения напряжения в цепи:

$$u(t)=282\sin(100\pi t);$$

6. Закон изменения силы тока в цепи

$$i(t)=1{,}13\sin(100\pi t+0{,}3\pi)=1{,}13\sin\pi(100+0{,}3)=1{,}13\sin(314t+0{,}9);$$

---

369. Напряжение и сила тока в цепи с последовательно включённым активным сопротивлением конденсатором изменяются в соответствии с уравнениями:

$$\left.\begin{array}{l} u(t)=150\sin(324t);\\ i(t)=0{,}3\sin\left(314t+\dfrac{\pi}{3}\right); \end{array}\right\}$$

Определить разность фаз между напряжением и силой тока; полное сопротивление цепи и выделяющуюся мощность.

Решение

1. Разность фаз между напряжением и силой тока:

$$\varphi=\frac{\pi}{3}\text{рад}\equiv 60^0;$$

2. Полное сопротивление цепи:

$$Z=\frac{u_m}{i_m}=\frac{150}{0{,}3}=500\ \text{Ом};$$

3. Мощность, выделяющаяся в цепи:

$$P=i_m\sqrt{2}u_m\sqrt{2}\cos\varphi=2\cdot 150\cdot 0{,}3\cdot\cos 60^0\approx 45\ \text{Вт};$$

---

370. Определить индуктивность катушки, если её индуктивное сопротивление в цепи переменного тока промышленной частоты равно X_L =11 Ом.

Решение

$$X_L=\omega L=2\pi\nu L;\quad\Rightarrow\quad L=\frac{X_L}{2\pi\nu}=\frac{11}{314}\approx 3{,}5\cdot 10^{-2}\text{Тл};$$

---

371. Определить период переменного тока, если катушка с L = 0,5 Гн представляет для него сопротивление X_L = 62,8 Ом.

Решение

$$X_L=\omega L=\frac{2\pi}{T}L;\quad\Rightarrow\quad T=\frac{2\pi L}{X_L}-\frac{6{,}28\cdot 0{,}5}{62{,}8}\approx 0{,}05\text{с};$$

---

372. Действующее значение напряжения u = 127 В, действующее значение силы тока i = 0,5 А. Определить индуктивность катушки, если частота переменного тока ν = 50 Гц.

Решение

$$X_L = \frac{u}{i} = \omega L = 2\pi\nu L; \quad \Rightarrow \quad L = \frac{u}{2\pi\nu i} = \frac{127}{314 \cdot 0{,}5} \approx 0{,}81\ \text{Гн};$$

---

373. Сила тока в катушке и индуктивностью L = 0,5. Гн изменяется по закону:

$$i(t) = 0{,}1\sin(628t);$$

Найти индуктивное сопротивление катушки и записать зависимость напряжения на катушке в функции времени.

Решение

1. Реактивное сопротивление катушки:

$$X_L = \omega L = 628 \cdot 0{,}5 = 314\ \text{Ом};$$

2. Зависимость от времени напряжения на катушке:

$$u(t) = i_m X_L \sin\left(628t + \frac{\pi}{2}\right) = 31{,}4\sin\left(628t + \frac{\pi}{2}\right);$$

---

374. Катушка с индуктивностью L = 6 мГн и активным сопротивлением R = 10 Ом подключена к источнику переменного напряжения с циклической частотой ω = 1000 рад/с. Определить полное сопротивление катушки и сдвиг фазы между силой тока и напряжением.

Решение

1. Реактивное сопротивление катушки:

$$X_L = \omega L = 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-3} = 6\ \text{Ом};$$

2. Полное сопротивление катушки:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{100 + 36} \approx 11{,}66\ \text{Ом};$$

3. Сдвиг фазы между силой тока и напряжением:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_L}{R}; \quad \Rightarrow \quad \varphi = \operatorname{arctg}0{,}6 \approx 31^0 \cong 0{,}172\pi;$$

---

375. В цепь последовательно включены резистор, катушка индуктивности и конденсатор. Определить полное сопротивление цепи, коэффициент мощности и активную мощность, если активное сопротивление цепи R = 100 Ом. Сила тока i = 1 А, напряжение на всём участке цепи U = 200 В, частота переменного тока ν = 50 Гц.

Решение

1. Полное сопротивление цепи:

$$Z = \frac{U}{i} = 200\ \text{Ом};$$

2. Падение напряжения на активном сопротивлении:

$$u_R = iR = 100\ \text{В};$$

3. Коэффициент мощности:

$$k = \frac{u_R}{U} = 0{,}5;$$

4. Активная мощность:

$$P = iu_R = 100 \text{ Вт};$$

---

376. Определить сдвиг фаз φ между напряжением и силой тока в цепи, состоящей из последовательно соединённых сопротивления R = 1 кОм, катушки индуктивности L = 50 Гн и конденсатора C = 1 мкФ. Найти среднюю мощность тока в этой цепи, если амплитуда напряжения u_m = 100 В, а частота колебаний тока ν = 50 Гц.

Решение

1. Сдвиг фаз между током и напряжением:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\pi\nu L - \dfrac{1}{2\pi\nu C}}{R}\right);$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{314 \cdot 50 - \dfrac{1}{314 \cdot 10^{-6}}}{1000}\right) \approx 85{,}4^0$$

2. Амплитудное значение силы тока:

$$i_m = \frac{u_m}{Z} = \frac{u_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}};$$

3. Действующее значение силы тока

$$i = \frac{i_m}{\sqrt{2}} = \frac{u_m}{\sqrt{2}\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}};$$

4. Мощность переменного тока:

$$P = ui\cos\varphi = \frac{u_m^2 \cos\varphi}{2\sqrt{R^2 + \left(2\pi\nu L - \dfrac{1}{2\pi\nu C}\right)^2}} \approx 0{,}4\text{Вт};$$

---

10. Трансформатор. Передача электрической энергии

377. Сила тока в первичной обмотке трансформатора i_1 = 0,5 А. Напряжение на клеммах первичной обмотки u_1 = 220 В. Коэффициент трансформации k = 22. Определить напряжение во вторичной цепи.

Решение

$$u_1 = ku_2; \quad u_2 = \frac{u_1}{k} = 10\ \text{В};$$

---

378. Понижающий трансформатор с коэффициентом трансформации k = 20 включён в сеть с напряжением u_1 = 220 В. Сопротивление вторичной обмотки R_2 = 2 Ом, сила тока i_2 = 3 А. Определить напряжение на клеммах вторичной обмотки.

Решение

1. Цепь вторичной обмотки замкнута, причём:

$$u_R = i_2 R_2 = 6\ \text{В};$$

2. Напряжение на клеммах вторичной обмотки:

$$u_2 = \frac{u_1}{k} - u_R = \frac{220}{20} - 6 = 5\ \text{В};$$

---

379. Первичная обмотка трансформатора включена в сеть с напряжением u_1 = 220 В. Активное сопротивление вторичной обмотки R_2 =2 Ом, сила тока в ней i_2 = 3 А. Найти напряжение на зажимах вторичной обмотки, если коэффициент трансформации k = 0,125.

Решение

$$u_2 = \frac{u_1}{k} - u_R = \frac{u_1}{k} - i_2 R_2 = \frac{220}{0{,}125} - 6 = 1754\ \text{В};$$

---

380. Понижающий трансформатор, в обмотках которого содержится n_1 = 1000 витков и n_2 = 100 витков, включён в сеть с напряжением u_1 = 220 В и питает нагрузку сопротивлением R_1 = 2 Ом. Активное сопротивление вторичной обмотки R_2 = 0,2 Ом. Каково напряжение на вторичной обмотке?

Решение

1. Коэффициент трансформации:

$$k = \frac{n_1}{n_2} = 10;$$

2. Напряжение в цепи вторичной обмотки:

$$u_2 = \frac{u_1}{k} = 22\ \text{В};$$

3. Сила тока в цепи вторичной обмотки:

$$i = \frac{u_2}{R_1 + R_2} = 10A;$$

4. Падение напряжение на вторичной обметке:

$$u_2 = \frac{u_1}{k} - u_R = \frac{u_1}{k} - i_2 R_2 = \frac{220}{10} - 20 = 2\ В;$$

---

381. Мощность, потребляемая конденсатором, P = 90 Вт. Ток какой силы получили во вторичной обмотке при напряжении u_2 = 12 В, если КПД трансформатора η = 0,75?

Решение

$$\eta P = i_2 u_2; \quad i_2 = \frac{\eta P}{u_2} \approx 5{,}62A;$$

---

382. Повышающий трансформатор работает от сети с напряжением u_1 = 120 В. Число витков первичной обмотки n_1 = 90. Определить коэффициент трансформации и число витков во вторичной обмотке, если в режиме холостого хода трансформатора напряжение на её зажимах u_2 = 3000 В.

Решение

1. Коэффициент трансформации:

$$k = \frac{u_1}{u_2} = 0{,}04;$$

2. Количество витков во вторичной обмотке:

$$k = \frac{n_1}{n_2}; \quad \Rightarrow \quad n_2 = \frac{n_1}{k} = 2250;$$

---

383. Сила тока в первичной обмотке трансформатора i_1 = 4,8 А, напряжение на её зажимах u_1 = 127 В. Сила тока во вторичной обмотке i_2 = 2,5 А при напряжении на её зажимах u_2 = 220 В. Найти КПД трансформатора.

Решение

$$\eta = \frac{i_1 u_1}{i_2 u_2} = \frac{2{,}5 \cdot 220}{4{,}8 \cdot 127} \approx 0{,}9;$$

---

384. Первичная обмотка трансформатора, включённого в сеть переменного тока напряжением u_1 = 250 В, имеет n_1 = 1250 витков. Определить количество витков во вторичной обмотке трансформатора, если она должна питать цепь с напряжением u_2^* = 6,3 В при токе i_2 = 0,5 А. Активное сопротивление вторичной обмотки R_2 = 0,2 Ом

Решение

1. Напряжение на зажимах вторичной обмотки:

$$u_2 = u_2^* + i_2 R_2 = 6{,}3 + 0{,}1 = 6{,}4В;$$

2. Коэффициент трансформации:

$$k = \frac{u_1}{u_2} = \frac{250}{6{,}4} \approx 39{,}1;$$

3. Количество витков во вторичной обмотке:

$$n_2 = \frac{n_1}{k} = \frac{1250}{39{,}1} = 32;$$

---

385. В повышающем трансформаторе с коэффициентом трансформации k = 0,5 напряжение на нагрузке, включённой в цепь вторичной обмотки u_2^* = 216 В. Нагрузка активная, с сопротивлением R = 10,8 Ом. Определить напряжение в первичной обмотке трансформатора u_1 и силу тока в ней i_1. Потерями энергии при трансформации пренебречь.

Решение

1. Напряжение, подводимое к первичной обмотке трансформатора:

$$u_1 = \frac{u_2^*}{k} = 108 \text{ В};$$

2. Сила тока во вторичной обмотке трансформатора:

$$i_2 = \frac{u_2^*}{R_2} = 20\text{А};$$

3. Сила тока в первичной обмотке:

$$i_1 = \frac{i_2}{k} = 40\text{А};$$

---

386. Трансформатор, содержащий в первичной обмотке n_1 = 300 витков, включён в сеть переменного тока с действующим напряжением u_1 = 220 В. Вторичная цепь трансформатора питает цепь с активным сопротивлением R = 50 Ом. Найти силу тока во вторичной обмотке, если падение напряжения во вторичной обмотке с n_2 = 165 витков, составляет u_R = 50 В. Индуктивным сопротивлением обмоток и активным сопротивлением первичной обмотки пренебречь.

Решение

1. Коэффициент трансформации:

$$k = \frac{n_1}{n_2} = \frac{300}{165} \approx 1{,}82;$$

2. Напряжение на вторичной обмотке:

$$u_2 = \frac{u_1}{k} = \frac{220}{1{,}82} \approx 121 \text{ В};$$

3. Падение напряжения на вторичной обмотке:

$$u_2^* = u_2 - u_R = 71 \text{ В};$$

4. Сила тока во вторичной обмотке:

$$i_2 = \frac{u_2^*}{u_R} \approx 1{,}42\text{А};$$

---

387. В первичной обмотке трансформатора, включённой в сеть с напряжением u_1 = 380 В, содержится n_1 = 1320 витков. Во вторичную цепь включена активная нагрузка мощностью P = 360 Вт. Считая сопротивление нагрузки R_1 = 3,6 Ом, а сопротивление вторичной обмотки R_2 = 0,2 Ом определить: ЭДС индукции во вторичной обмотке; число витков во вторичной обмотке; КПД трансформатора.

Решение

1. Сила тока в цепи вторичной обмотки:

$$i_2 = \sqrt{\frac{P}{R_1 + R_2}} = \sqrt{\frac{360}{3,8}} \approx 9,73A;$$

2. ЭДС индукции вторичной обмотки:

$$\varepsilon_2 = i_2\left(R_1 + R_2\right) = 38B;$$

3. Коэффициент трансформации:

$$k = \frac{u_1}{\varepsilon_2} = 10;$$

4. Количество витков во вторичной обмотке:

$$n_2 = \frac{n_1}{k} = 132;$$

5. Мощность на активной нагрузке:

$$P_R = i_2^2 R_1 = 341\ Вт;$$

6. Коэффициент полезного действия трансформатора:

$$\eta = \frac{P_R}{P} = \frac{341}{360} \approx 0,946;$$

---

388. Повышающий трансформатор состоит из двух обмоток, навитых на железное кольцо. Напряжение на первичной обмотке u_1 = 120 В, коэффициент трансформации k = 0,05. Определить напряжение на вторичной обмотке и число витков в каждой обмотке, если вольтметр, присоединённый к проводу, продетому через кольцо, показывает u_v = 0,6 В.

Решение

1. Напряжение на вторичной обмотке:

$$u_2 = \frac{u_1}{k} = 2400\ В;$$

2. Количество витков в обмотках:

$$n_1 = \frac{u_1}{u_v} = \frac{120}{0,6} = 200; \quad n_2 = \frac{u_2}{u_v} = \frac{2400}{0,6} = 4000;$$

---

389. Трансформатор, повышающий напряжение от u_1 = 100 В до u_2 = 3300 В, имеет замкнутый сердечник в виде кольца. Через кольцо пропущен провод, концы которого присоединены к вольтметру. Вольтметр показывает u_v = 0,5 В. Определить количество витков в обмотках трансформатора.

Решение

$$n_1 = \frac{u_1}{u_v} = \frac{100}{0,5} = 200; \quad n_2 = \frac{u_2}{u_v} = \frac{3300}{0,5} = 6600;$$

---

390. Первичная обмотка трансформатора имеет n_1 = 2400 витков. Сколько витков должна иметь вторичная обмотка, чтобы напряжение на её зажимах u_2 = 11 В она могла передавать во внешнюю цепь мощность P_2 = 22 Вт. Сопротивление вторичной обмотки R_2 = 0,2 Ом. Напряжение сети u_1 = 380 В.

Решение

1. Общее сопротивление вторичной цепи:

$$P_2 = \frac{u_2^2}{R_\Sigma}; \quad R_\Sigma = \frac{u_2^2}{P_2} = \frac{121}{11} = 11\,\text{Ом};$$

2. Сила тока во вторичной обмотке:

$$i_2 = \frac{u_2}{R_\Sigma} = 1\text{А};$$

3. Падение напряжения на вторичной обмотке:

$$u_R = i_2 R_2 = 0{,}2\text{В};$$

4. ЭДС индукции вторичной обмотки:

$$\varepsilon_2 = u_2 + u_R = 11{,}2\text{В};$$

5. Падение напряжения на одном витке трансформатора:

$$\zeta = \frac{u_1}{n_1} = \frac{380}{2400} \approx 0{,}158\frac{\text{В}}{\text{виток}};$$

6. Число витков во вторичной обмотке:

$$n_2 = \frac{\varepsilon_2}{\zeta} \approx 71;$$

---

391. Первичная обмотка трансформатора имеет n_1 = 12000 витков и включена в сеть с напряжением u_1 = 120 В. Какое количество витков должна иметь вторичная обмотка, если активное сопротивление равно R_1 = 0,5 Ом, а напряжение для накала лампы u_R = 3,5 В при силе тока i_2 = 1 А. Потери в первичной обмотке отсутствуют.

Решение

1. Падение напряжения на одном витке трансформатора:

$$\zeta = \frac{u_1}{n_1} = \frac{120}{1200} \approx 0{,}01\frac{\text{В}}{\text{виток}};$$

2. Падение напряжения на нагрузке:

$$u_R = R_1 i = 0{,}5\text{В};$$

3. ЭДС индукции вторичной обмотки:

$$\varepsilon_2 = u_2 + u_R = 4\text{В};$$

4. Число витков во вторичной обмотке:

$$n_2 = \frac{\varepsilon_2}{\zeta} \approx 400;$$

---

392. Первичная обмотка трансформатора включена в сеть напряжением u_1 = 220 В. Напряжение на зажимах вторичной обмотки u_2 = 20 В, её сопротивление R_2 = 1 Ом. Определить коэффициент трансформации и КПД трансформатора. Потерями в первичной обмотке пренебречь.

Решение

1. Сила тока во вторичной цепи:

$$i_2 = \frac{u_2}{R_2} = 2\text{А};$$

2. Падение напряжения на вторичной обмотке:

$$u_2^* = i_2 R_2 = 2В;$$

3. ЭДС индукции во вторичной обмотке:

$$\varepsilon_2 = u_2 + u_2^* = 22В;$$

4. Коэффициент трансформации:

$$k = \frac{u_1}{\varepsilon_2} = 0{,}1;$$

5. Коэффициент полезного действия трансформатора:

$$\eta = \frac{u_2}{\varepsilon_2} = 0{,}909;$$

---

393. Первичная обмотка повышающего трансформатора включена в сеть с напряжением u_1 = 120 В. Напряжение на зажимах вторичной обмотки u_2 = 24000 В, сила тока через вторичную обмотку i_2 = 2 А. Найти силу тока в первичной цепи, а так же входную P_1 и выходную P_2 мощности трансформатора.

Решение

1. Коэффициент трансформации:

$$k = \frac{u_2}{u_1} = 20;$$

2. Сила тока в первичной цепи без учёта потерь:

$$i_1 = k i_2 = 40А;$$

3. Мощности в цепях трансформатора:

$$P_1 = u_1 i_1 = 120 \cdot 40 = 4{,}8кВт; \quad P_2 = u_2 i_2 = 2400 \cdot 2 = 4{,}8кВт;$$

---

394. Напряжение на зажимах вторичной обмотки понижающего трансформатора u_2 = 60 В, сила тока во вторичной цепи i_2 = 40 А. Первичная обмотка включена в сеть напряжением u_1 = 240 В. Найти силу тока в первичной обмотке трансформатора, а так же входную и выходную мощности, если КПД трансформатора η = 0,9.

Решение

1. Коэффициент трансформации:

$$k = \frac{u_2}{u_1} = 0{,}25;$$

2. Сила тока в первичной обмотке трансформатора:

$$i_1 = \frac{i_2}{\eta} k = 11{,}1\ В;$$

3. Мощности цепей трансформатора:

$$P_1 = i_1 u_1 = 2664Вт; \quad P_2 = i_2 u_2 = 2400Вт;$$

---

395. От генератора к потребителю передаётся мощность P_1 = 62 кВт. Сопротивление линии передачи R_L = 5 Ом. Какую часть мощности получит потребитель, если напряжение на зажимах генератора: u_1 = 620 или u_2 = 6200 В? Определить напряжение на потребителе в обоих случаях.

Решение

1. Сопротивление вторичной цепи при u_1:

$$P = \frac{u_1^2}{R_2 + R_L}; \quad R_2 + R_L = \frac{u_1^2}{P} = 6{,}2\,\text{Ом}; \quad R_2 = 1{,}2\ \text{Ом};$$

2. Сила тока во вторичной цепи при u_1:

$$i_2 = \frac{u_1}{R_2 + R_L} = 100\text{А};$$

3. Мощность, потребляемая нагрузкой при u_1:

$$P_2 = i_2^2 R_2 = 1{,}2 \cdot 10^4\,\text{Вт};$$

4. Относительная передаваемая мощность при u_1

$$\zeta = \frac{P_2}{P} = \frac{1{,}2 \cdot 10^4}{6{,}2 \cdot 10^4} = 0{,}19;$$

5. Напряжение на потребителе при u_1:

$$u_n = i_2 R_2 = 120\ \text{В};$$

6. Сопротивление вторичной цепи при u_2:

$$P = \frac{u_2^2}{R_2 + R_L}; \quad R_2 + R_L = \frac{u_2^2}{P} = 620\ \text{Ом}; \quad R_2 = 615\ \text{кОм};$$

7. Сила тока во вторичной цепи при u_2:

$$i_2 = \frac{u_2}{R_2 + R_L} = 10\text{А};$$

8. Мощность, потребляемая нагрузкой при u_2:

$$P_2 = i_2^2 R_2 = 100 \cdot 615 \approx 61500\text{Вт};$$

9. Относительная передаваемая мощность при u_2

$$\zeta = \frac{P_2}{P} = \frac{61{,}5 \cdot 10^4}{6{,}2 \cdot 10^4} \approx 0{,}992;$$

10. Напряжение на потребителе при u_2:

$$u_n = i_2 R_2 = 6{,}5\ \text{кВ};$$

---

396. Требуется передавать электрическую энергию на расстояние L посредствам медных проводов с удельным сопротивлением ξ и плотностью ρ так, чтобы потери энергии в проводах не превышали ζ = 0,1 передаваемой мощности P при напряжении сети U. Определить массу меди.

Решение

1. Сила тока в линии передачи электроэнергии:

$$i = \frac{P}{U};$$

2. Падение напряжения на проводниках:

$$\zeta P = i u_L = R_L i^2; \quad \Rightarrow \quad R_L = \frac{\zeta P}{i^2} = \frac{\zeta P U^2}{P^2} = \frac{\zeta U^2}{P};$$

3. Сопротивление и масса проводов:

$$R_L = \frac{\xi L}{S}; \quad S = \frac{m}{\rho L}; \quad R_L = \frac{\xi \rho L^2}{m} = \frac{\zeta U^2}{P}; \quad m = \frac{\xi \rho L^2 P}{\zeta U^2};$$

---

397. Напряжение городской сети U = 220 В. Длина проводящей линии составляет L = 50 м. Определить сечение проводов, если известно, что нагрузкой являются n_1 = 100 ламп мощностью P_1 = 75 Вт и n_2 =50 ламп мощностью P_2 = 25 Вт. Напряжение на лампах U_N = 210 В. Проводка изготовлена из медного провода с удельным сопротивлением ξ и плотностью ρ.

Решение

1. Суммарная потребляемая мощность:

$$P_\Sigma = n_1P_1 + n_2P_2 = 8750\ \text{Вт};$$

2. Сила тока в цепи питания ламп:

$$i = \frac{P_\Sigma}{U} = 39{,}77\text{A};$$

3. Падение напряжения на проводах:

$$U_L = U - U_N = 10\text{B};$$

4. Сопротивление проводящей линии:

$$R_L = \frac{U_L}{i} = 0{,}251\ \text{Ом};\quad R_L = \frac{\xi 2L}{S};$$

5. Необходимое сечение проводов:

$$\frac{\xi 2L}{S} = \frac{U_L}{i};\quad S = \frac{\xi 2Li}{U_L} \approx \frac{1{,}6\cdot 10^{-8}\cdot 100\cdot 39{,}77}{10} \approx 6{,}36\cdot 10^{-6}\text{м}^2;$$

---

398. На какое расстояние можно передать электроэнергию от источника ЭДС ε посредствам медного провода, площадью поперечного сечения S, чтобы на нагрузке сопротивлением R_n выделилась мощность P?

Решение

1. Сила тока в цепи:

$$i = \frac{P}{\varepsilon};$$

2. Падение напряжения на нагрузке:

$$u_n = iR_n;$$

3. Падение напряжения на линии электропередачи:

$$u_L = \varepsilon - u_n;$$

4. Сопротивление линии электропередачи:

$$R_x = \frac{\xi\ell}{S} = \frac{u_L}{i} = \frac{(\varepsilon - \frac{P}{\varepsilon}R_n)\varepsilon}{P} = \frac{\varepsilon^2 - P\varepsilon}{P};$$

5. Длина линии:

$$\ell = \frac{Su_L}{\xi i} = \frac{S\varepsilon\left(\varepsilon - \frac{P}{\varepsilon}R_n\right)}{\xi P} = \frac{S\left(\varepsilon^2 - PR_n\right)}{\xi P};$$

---

399. На первичную обмотку трансформатора подаётся напряжение u_1 = 3500 В. Его вторичная обмотка соединена с нагрузкой напряжение на которой u_n = 220 В, а потребляемая мощность P = 25 кВт. Определить сопротивление линии, если коэффициент трансформации k = 15. Чему равна сила тока в первичной обмотке? Сопротивление вторичной обмотки пренебрежительно мало.

Решение

1. ЭДС, возникающая во вторичной обмотке:

$$\varepsilon = \frac{u_1}{k} \approx 233{,}3\text{В};$$

2. Падение напряжения на передающей линии:

$$u_L = \varepsilon - u_n \approx 13{,}3\text{В};$$

3. Сопротивление нагрузки:

$$P = \frac{u_n^2}{R_n}; \quad \Rightarrow \quad R_n = \frac{u_n^2}{P} \approx 1{,}936 \text{ Ом};$$

4. Сила тока через нагрузку:

$$P = i_2 u_n; \quad i_2 = \frac{P}{u_n} \approx 113{,}6\text{А};$$

5. Сопротивление линии электропередачи:

$$R_x = \frac{u_L}{i_2} = 0{,}117 \text{ Ом};$$

6. Сила тока в первичной обмотке:

$$i_1 = \frac{i_2}{k} \approx 7{,}55\text{А};$$

---

400. Двухпроводная линия длиной L = 800 м от понижающего трансформатора к потребителю выполнена медным проводом сечением S = 20 мм^2. Нагрузка потребляет мощность P = 2,58 кВт при напряжении u_2 = 215 В. Определить напряжение на зажимах вторичной обмотки трансформатора и потерю мощности в проводах линии.

Решение

1. Сила тока в цепи вторичной обмотки трансформатора:

$$P = i_2 u_2; \quad \Rightarrow \quad i_2 = \frac{P}{u_2} = 12\text{А};$$

2. Сопротивление линии электропередачи:

$$R_L = \frac{\xi 2L}{S} \approx \frac{1{,}6 \cdot 10^{-8} \cdot 1600}{20 \cdot 10^{-6}} \approx 1{,}28 \text{ Ом};$$

3. Падение напряжения на линии электропередачи:

$$u_L = i_2 R_L \approx 15{,}36 \text{ В};$$

4. Напряжение на зажимах вторичной обмотки (ЭДС индукции):

$$\varepsilon_2 = u_2 + u_L \approx 230{,}36\text{В};$$

5. Потеря мощности на линии электропередачи:

$$P_L = i_2 u_L = \frac{u_L^2}{R_L} \approx 184{,}32 \text{ Вт};$$

---

401. Линия электропередачи длиной L = 100 км находится под напряжением U = 200 кВ. Линия выполнена медным кабелем площадью сечения S = 150 мм^2. Передаваемая мощность составляет P = 300 МВт. Какая часть мощности передаётся на нагрузку?

Решение

1. Сопротивление линии электропередачи:

$$R_L = \frac{\xi L}{S} \approx \frac{\cdot 1{,}6 \cdot 10^{-8} \cdot 10^5}{1{,}5 \cdot 10^{-4}} \approx 10{,}67 \text{ Ом};$$

2. Сила тока в линии электропередачи:

$$i_L = \frac{P}{U} = 1500\text{А};$$

3. Мощность, потребляемая линией электропередачи:

$$P_L = i_L^2 R_L \approx 2{,}4 \cdot 10^7 \text{ Вт};$$

4. Часть мощности передаваемой в нагрузку:

$$\zeta = \frac{P - P_L}{P} = 1 - \frac{P_L}{P} \approx 0{,}92;$$

---

402. Какую максимальную мощность можно передавать нагрузке по двухпроводной линии электропередачи длиной L = 1,5 км, выполненной из медного провода сечением S = 18 мм^2. Напряжение в сети U = 230 В, допустимая потеря напряжения на линии ζ = 0,1

Решение

1. Сопротивление линии:

$$R_L = \frac{2\xi L}{S} \approx \frac{3{,}2 \cdot 10^{-8} \cdot 1{,}5 \cdot 10^3}{18 \cdot 10^{-6}} \approx 2{,}66 \text{ Ом};$$

2. Допустимое падение напряжение на линии:

$$u_L = \zeta U = 23 \text{ В};$$

3. Сила тока в линии:

$$i_L = \frac{u_L}{R_L} \approx 8{,}65\text{А};$$

4. Мощность, передаваемая потребителю:

$$P_m = i_L\left(U - u_L\right) \approx 1790 \text{ Вт};$$

---

403. Какая масса меди плотностью ρ и удельным сопротивлением ξ потребуется для устройства линии электропередачи длиной L, если напряжение на генераторе U, а нагрузке необходимо передать мощность P при допустимой потере напряжения ζ?

Решение

1. Сечение медного провода:

$$m = \rho L S; \quad \Rightarrow \quad S = \frac{m}{\rho L};$$

2. Сопротивление линии электропередачи:

$$R_L = \frac{U(1-\zeta)}{i_L} = \frac{\xi L}{S};$$

3. Сила тока в линии:

$$i_L = \frac{P}{U(1-\zeta)};$$

4. Масса медного провода:

$$\frac{U^2(1-\zeta)^2}{P} = \frac{\xi\rho L^2}{m}; \quad \Rightarrow \quad m = \frac{P\xi\rho L^2}{U^2(1-\zeta)^2};$$

---

404. От генератора с электродвижущей силой ε и внутренним сопротивлением r необходимо протянуть двухпроводную линию общей длиной L. Какая масса алюминия плотностью ρ и удельным сопротивлением ξ потребуется для изготовления линии, если максимальная мощность нагрузки P и рассчитана она на напряжение U?

Решение

1. Сечение медного провода:

$$m = \rho LS; \quad \Rightarrow \quad S = \frac{m}{\rho L};$$

2. Сопротивление линии электропередачи:

$$R_L = \frac{U}{i_L} = \frac{\xi L}{S};$$

3. Сила тока в линии:

$$i_L = \frac{P}{U};$$

4. Масса медного провода:

$$\frac{U^2}{P} = \frac{\xi\rho L^2}{m}; \quad \Rightarrow \quad m = \frac{P\xi\rho L^2}{U^2};$$

---

405. От генератора с ЭДС ε и внутренним сопротивлением r ток поступает по медному кабелю с удельным электрическим сопротивлением ξ сечением S к сварочному аппарату, удалённому от генератора на расстояние L. Определить напряжение на сварочном аппарате линии передачи энергии, если сила тока в цепи i.

Решение

1. Сопротивление линии:

$$R_L = \frac{2\xi L}{S};$$

2. Сопротивление нагрузки (сварочного аппарата)

$$i = \frac{\varepsilon}{R_n + R_L}; \quad R_n = \frac{\varepsilon - iR_L}{i} = \frac{\varepsilon - i\dfrac{2\xi L}{S}}{i} = \frac{\varepsilon}{i} - \frac{2\xi L}{S};$$

3. Падение напряжения на сварочном аппарате:

$$u_n = iR_n = \varepsilon - i\frac{2\xi L}{S};$$

4. Падение напряжения на линии передачи электроэнергии:

$$u_L = iR_L = i\frac{2\xi L}{S};$$

---

11. Распространение электромагнитных волн

406. Каков механизм излучения в пространство электромагнитных волн?

Решение

1. Прежде чем приступить к обсуждению особенностей излучения электромагнитных волн, следует сказать несколько слов о проблеме передачи взаимодействий в природе и теории мирового эфира.

2. Проблема пустоты с давних времён занимала умы учёных, вызывая постоянно оживлённые дискуссии. Повседневный опыт на уровне наших ощущений говорит о том, что взаимодействия происходят при непосредственном контакте взаимодействующих объектов. Обобщил житейские наблюдения Аристотель, введя понятия силы тяги, силы давления и силы удара. Аристотель полагал, что брошенное тело «ведёт» среда. В пустоте взаимодействие а, следовательно, и движение не возможно, значит – пустота, тоже невозможна. Довольно логично.

3. Идея Аристотеля о невозможности пустоты была поставлена под сомнение только в XVII веке после изобретения ртутного барометра учеником великого Галилея, Эванжелистой Торричелли (1608 – 1647). Торричелли, по сути, открыл вакуум, свойства которого потом исследовали французский математик, физик, философ и писатель Блез Паскаль (1623 – 1662) и бургомистр Магденбурга Отто фон Герике. Эксперименты показали, помимо прочего, что вакуум не проводит звук, но проводит свет.

4. Следующим, кто всерьёз занялся свойствами пустоты, был неутомимый Рене Декарт. Принципиально отвергая существование пустоты, он ввёл понятие эфира. Мир, по Декарту, заполнен эфиром – тонкой материей, в которой возникают вихри, способные обеспечивать взаимодействие, опять же исключительно механическим путём.

5. В следующем, XVIII веке тория великого Ньютона своим блеском и величием затмила все прочие теории, показав несостоятельность по многим позициям учения Аристотеля. Ньютон был настолько популярен в Европе, что существовали даже курсы «Ньютонизм для дам». Всё что происходило в науке, оценивалось с позиций теории механического движения Ньютона. Но механика Ньютона была не всесильна.

6. Трудности возникли при объяснении взаимодействия на расстоянии, например гравитационного. И со светом, тоже было не совсем всё понятно. Ньютоновские корпускулы стали на долгие времена причиной переноса различных действий на расстояние. Каждое конкретное действие требовало своих корпускул. В науку пришло туманное, но романтическое понятие эфира. Так появился флогистон – некое невесомое, летучее, невидимое вещество, определяющее тепловое состояние тел. А потом стали в моде разного рода флюиды в виде теплорода, электрических флюидов Кулона и т.д. Одним словом, появление нового явления, где взаимодействие происходило без непосредственного контакта, сопровождалось введением нового сорта флюида, который помещался между взаимодействующими объектами.

7. Постепенно, по мере установления аналогий между явлениями, количество флюидов уменьшилось, и все их заменили одним, ещё более туманным все проникающим универсальным эфиром. Но все попытки обращения к эфиру для трактовки передачи действия на расстоянии оказались бесплодными, потому что автоматически на него переносились свойства обычной материи.

Рис. 406.1. Генрих Герц

8. К окончанию XIX века уже было установлена непрерывность пространства, было ясно, что в каждой точке любая физическая величина имеет вполне определённое значение, причём переход от точки к точке носит непрерывный и плавный характер. Эфир постепенно вытеснялся более прагматичным понятием поля. Образом поля в различных отделах физики, в принципе, начали пользоваться со второй половины XIX века. Например, при объяснении явлений электрического и магнитного свойства.

9. Генрих Рудольф Герц является настолько неординарной личностью в современной и классической физике, что о нём следует сказать особо и более подробно. Родился Герц в г. Гамбурге в семье адвоката. Образование Герц получил совершенно стандартное для того времени: реальное училище, городская гимназия, высшее Дрезденское техническое училище, мюнхенский университет, берлинский университет.

10. На всех этапах учёбы Генрих блистал и был замечен одним из самых знаменитых немецких физиков Германом Гельмгольцем (1821 – 1894), это решило дальнейшую научную судьбу способного молодого человека. Этот волевой и целенаправленный учёный с широчайшими научными интересами, что вполне типично для того времени, имел на Герца огромное влияние. Гельмгольц, не подозревая о работах Ломоносова и Майера – Джоуля, в довольно юном возрасте обосновал закон сохранения и превращения энергии, затем он не без успехов занимался физиологией (одно из образований было медицинским), но научная зрелость была посвящена теории электричества, последняя, так сказать, любовь.

11. Гельмгольц, пожалуй, первый обратил достойное внимание на работы Максвелла. Они производили на него неоднозначное впечатление. С одной стороны он понимал роль промежуточной среды в теории электромагнитных волн, с другой стороны, смириться с тем, что этой средой может быть «ничто» он не мог. Будучи приверженцем идей Канта, о невозможности познания мира, он исповедовал в электричестве учение о дальнодействии, несмотря на его очевидные несоответствия с реалиями. Генрих Герц всю свою короткую, но яркую жизнь старался подтвердить научные взгляды своего учителя, но никогда не прогибался и всегда был предельно честен.

12. День 14 ноября 1886 г. можно считать днём открытия (вопреки себе и учителю) электромагнитных волн. Именно в этот день, по-немецки пунктуальный, Герц записал в своём дневнике: «Посчастливилось установить индукционное действие друг на друга двух незамкнутых цепей с током. Длина цепей 3м, расстояние между ними 1,5м. »

Экспериментальная установка герца была до удивления проста и не содержала ни одного нового элемента. Всё что использовал юный гений, можно бы-

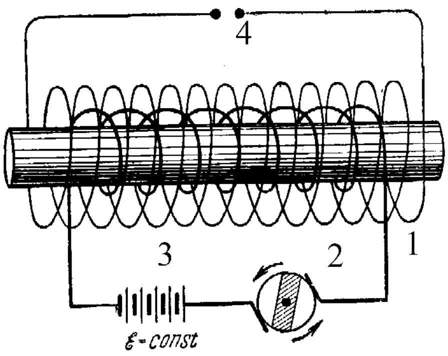


Рис.406.2. Установка Герца

ло отыскать в любой даже самой захудалой физической лаборатории того времени (рис. 406.2).

13. Установка состояла из индуктора Румкорфа 1, представляющего собой в современном понимании, повышающий трансформатор, у которого обе обмотки расположены на одном незамкнутом цилиндрическом сердечнике. В цепи первичной обмотки включался источник ЭДС 3 и механический прерыватель 2, в виде диэлектрического вращающегося диска с проводящей вставкой и двумя радиальными контактами. Вторичная обмотка соединялась с разрядниками 4, между которыми проскакивала искра во время размыкания контактов в цепи первичной обмотки. Идея использования механического прерывателя для получения импульсов напряжения довольно значительной величины (несколько киловольт) используется в некоторых карбюраторных двигателях внутреннего сгорания.

14. Недалеко от разрядников 4 Герц разместил ещё пару разрядников, соединённых с проволочным контуром. Проводя эксперимент в тёмной комнате, Герц обнаружил искрение между разрядниками. Это означало, что электрический импульс был передан на расстояние около полутора метров совершенно без проводов. Вопреки первоначальным установкам Гельмгольца, всё шло к тому, что англичанин прав – волны существуют.

15. В ходе дальнейших захватывающих экспериментов Герцу удалось установить, что предсказанные Максвеллом волны экранируются стальным листом, а фанерные и деревянные препятствия для них не являются преградой.

16. Обнаруженные Герцем искровые волны в явном виде демонстрировали свойства аналогичные свету. Посчитав приближённо скорость распространение исследуемых волн, Герц убедился, что и тут Максвелл прав - волны распространялись со скоростью очень близкой к скорости света. Чтобы окончательно убедить себя, а особенно, своего учителя, в том что он имеет дело именно с волнами, Герц ставит эксперимент с преломлением на асфальтовой призме весом около двух тонн. Поместив призму между излучателем и приёмником, он обнаруживает отклонение от прямолинейного распространения.

17. Как пишет по этому поводу В. Карцев: « Трудно сейчас представить себе бурю, вызванную открытиями Герца. Для физиков, они, прежде всего, означали полный триумф уравнений Максвелла и забвение всех других электродинамических теорий. Все неисчислимое бумажное многопудье курсов электродинамики Неймана, Вебера, Гельмгольца и множества других авторов нашло свою гавань в пыльных архивах науки, уступив место нескольким строкам максвелловских уравнений». Следует, однако, отметить, что появление теории стало возможным благодаря предшественникам, заложивших основы знаний об электромагнетизме.

18. Рассмотрим физические особенности процесса генерирования электромагнитных волн на примере двух проводящих стержней, подключенных к источнику постоянного тока (Рис.406.3). При замыкании ключа верхний стержень быстро приобретает положительный заряд, а нижний - отрицательный. Структура электрического поля показана в виде концентрических окружностей. Во время перемещения зарядов по стержням текут токи, стрелками пока-

зано направление движения положительных зарядов. Электрический ток создаёт магнитное поле

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r};$$

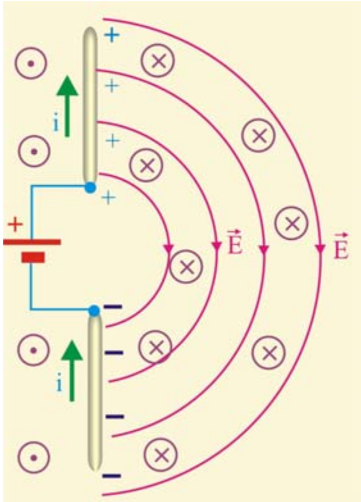


Рис.406.3.3. Образование электромагнитных волн

19. Линии магнитной индукции этого поля представляют собой концентрические окружности, охватывающие стержни. Представим далее более сложную ситуацию, когда вместо источника постоянного тока в цепи стержней включен генератор переменного тока

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t).$$

20. Такая конструкция называется электрическим дипольным вибратором. В любой момент времени существует разделение зарядов, что обеспечивает наличие дипольного момента. Так как знак заряда на стержнях будет периодически меняться, то дипольный момент антенны осциллирует.

21. В этом случае ток в стержнях будет менять своё направление, следовательно, будет меняться и направления полей, причём ввиду невозможности исчезать мгновенно, линии замыкаются. При замыкании силовых линий образуются контуры, которые продолжают распространяться в окружающем пространстве.

22. В любой точке пространства, таким образом, векторы $\vec{B}$ и $\vec{E}$ перпендикулярны друг другу и вектору скорости распространения волны. Модули напряжённости и индукции будут меняться по синусоидальному закону, в соответствии с изменением ЭДС.

$$E = E_y = E_0 \sin \omega t;$$

$$B = B_z = B_0 \sin \omega t;$$

23. Электромагнитные волны являются поперечными, потому что векторы E и B лежат в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения.

24. Интересным является и тот факт, что электромагнитные волны образуются колеблющимися зарядами, т.е. зарядами, движущимися с ускорением. В этой связи естественно предположить, что всякий движущийся с ускорением заряд излучает электромагнитные волны.

25. Таким образом, по Максвеллу, электрические и магнитные поля не могут существовать обособленно. Невозможно создать переменное магнитное поле в пространстве, чтобы не возникло при этом электрическое поле и наоборот.

26. Рассмотрим подробнее «антенну», схема которой приведена на рис. 406.4, источник постоянного тока заменим генератором, обеспечивающим изменение тока по синусоидальному закону. До настоящего времени законченной теории ближнего поля излучателей не сущест-

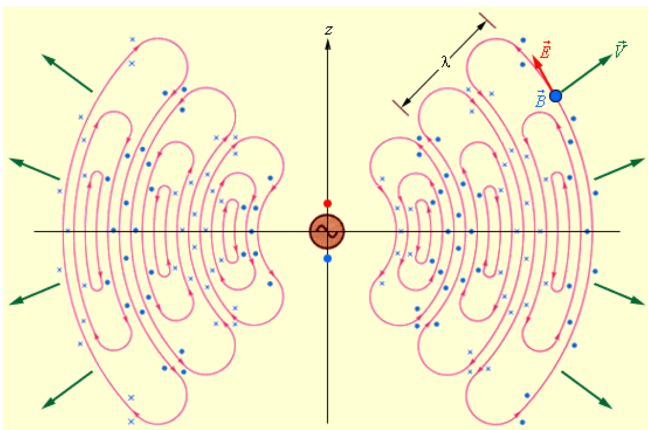


Рис.406.4. Излучение диполя

вует. Поле существенно упрощается на расстояниях $r \gg \lambda$.

27. Если генерирование электромагнитных волн происходит в однородной изотропной среде, то волновой фронт будет сферическим Векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ в каждой точке волнового фронта будут взаимно перпендикулярны и перпендикулярны радиус – вектору, проведенному из центра диполя. Диполь обладает направленными свойствами. Для диполя диаграмма направленности имеет вид восьмёрки.

28. Диаграмма направленности характеризует свойство антенны концентрировать электромагнитную энергию в определённом направлении. Чем уже диаграмма направленности, тем больше дальность действия излучателя. Ширина диаграммы направленности определяется конструктивными параметрами антенны и несущей частотой. Для относительно высокочастотных антенн формирование направленности не представляет труда, но высокочастотные волны распространяются на меньшие расстояния, чем низкочастотные вследствие большего их поглощения. Особую значимость направленные свойства излучающих устройств имеют в радиолокации, где передающие и приёмные антенны должны удовлетворять определённым требованиям, исходя из условий пеленга объектов на выбранной несущей частоте.

29. Следует обратить внимание на то, что максимальный поток электромагнитной энергии излучается в плоскости, перпендикулярной оси диполя. Вдоль своей оси диполь не излучает энергии. Герц использовал элементарный диполь в качестве излучающей и приемной антенн при экспериментальном доказательстве существования электромагнитных волн.

30. Когда обнаружилось, что электромагнитные волны могут распространяться в пустоте, являясь одновременно и переносчиком световой энергии, то стало предельно очевидным, каким образом Солнце снабжает энергией нашу планету. Солнечный свет представляет собой, по сути сложный набор электромагнитных волн инфракрасного, оптического и ультрафиолетового диапазона. Дальнейшие исследования обнаружили, что электромагнитное излучение проявляется в чрезвычайно широком диапазоне длин волн, в зависимости от величины длины волны излучение имеет разнообразные энергетические проявления. В таб. 406.1 приведены, обнаруженные к настоящему времени электромагнитные волны. Обращает на себя внимание диапазон длин электромагнитных волн от более чем 100 км, до 10^{-12}м, что составляет 17 порядков. Представить себе образно 10^{17} достаточно сложно, но, тем не менее, мы живём в Мире, сама сущность жизни в котором имеет электромагнитную основу, включая рыб, млекопитающих и даже – «венец природы».

Таблица 406.1

Длина	Наименование	Частота
100 км и более	Низкочастотные электрические колебания	0 – 3 кГц
100 км – 1 мм	Радиоволны:	3 кГц – 3ТГц
100 –10 км	мириаметровые (очень низкие частоты)	3 – 30 кГц
10 – 1км	километровые (низкие частоты)	30 – 300 кГц
1 км – 100 м	гектометровые (средние частоты)	300 кГц – 3МГц
100 – 10 м	декаметровые (высокие частоты)	3 – 30 МГц
10 – 1 м	метровые (очень высокие частоты)	30 – 300 МГц

1 м – 10 см	дециметровые (ультравысокие частоты)	300 – 3ГГц
10 – 1 см	сантиметровые (сверхвысокие частоты)	3 – 30 ГГц
1 – 1 мм	миллиметровые	30 – 300ГГц
1 – 0,1 мм	децимиллиметровые (гипервысокие частоты)	300 – 3ТГц
2 мм – 760 нм	Инфракрасное излучение	150 ГГц – 400ТГц
760 – 380 нм	Видимое излучение	400 ТГц – 800 ТГц
380 – 3 нм	Ультрафиолетовое излучение	800 ТГц – 100 ПГц
10 нм – 1 пм	Рентгеновское излучение	300ПГц – 300ЭГц
до 10 пм	Гамма-излучение	до 30 ЭГц

15.78. Обладают ли электромагнитные волны энергией?

Решение

1. Электромагнитные волны способны распространять в пространстве энергию, свидетельством тому, в частности, является факт существования всего живого на нашей планете исключительно за счёт энергии, излучаемой Солнцем в виде света и тепла каковые, по сути, являются электромагнитными волнами соответствующих диапазонов. Кто в детстве не развлекался в солнечный день увеличительным стеклом (линзой), поднимая локально температуру подвернувшихся под руку предметов? Ведро холодной воды, выставленное на солнце, со временем увеличивает свою температуру. Эти факты свидетельствуют о том, что солнечное электромагнитное излучение обладает энергией, способной, в частности, перейти в тепло.

2. Получим энергетические соотношения, характеризующие электромагнитное поле. Для электрической составляющей поля можно использовать энергетические соотношения конденсатора

$$W_E = \frac{CU^2}{2};\qquad C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 s}{d};\qquad E = \frac{U}{d}.$$

3. Заменяя в уравнении для W_E C и U, получим

$$W_E = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 s E^2 d^2}{2d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} sd = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V.$$

4. Плотность энергии электрического поля, при этом, определится как

$$\varpi_E = \frac{W_E}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2, \left[\frac{Дж}{м^3}\right];$$

5. Магнитное поле рассмотрим на примере соленоида, длиной ℓ, площадью поперечного сечения s, содержащего N витков. Такой соленоид обладает индуктивностью

$$L = \frac{\mu\mu_0 N^2 s}{\ell};$$

6. Величина магнитной индукции внутри соленоида зависит от силы тока, текущего по обмотке и магнитной проницаемости сердечника, если таковой имеется

$$B = \frac{\mu\mu_0 NI}{\ell} \Rightarrow I^2 = \frac{B^2\ell^2}{(\mu\mu_0)^2 N^2};$$

7. Энергия поля, заключенного внутри соленоида, равна

$$W_B = \frac{LI^2}{2}.$$

8. Подставим в уравнение для W_B значения L и I^2

$$W_B = \frac{1}{2}\frac{\mu\mu_0 N^2 s}{\ell}\frac{B^2\ell^2}{(\mu\mu_0)^2 N^2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}\ell s = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu\mu_0}V;$$

9. Объёмная плотность энергии магнитного поля запишется так:

$$\varpi_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu\mu_0}.$$

10. Объёмная плотность электромагнитного поля в вакууме определится в виде суммы уравнений

$$\varpi = \varpi_E + \varpi_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0};$$

$$\varpi = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu_0 B^2;$$

11. Для вакуума или воздуха скорость распространения электромагнитных волн определится как

$$\frac{B}{E} = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{E}{c} = E\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}; \quad \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2.$$

12. С учётом последних преобразований (18.52) возможно записать плотность энергии в окончательном виде

$$\varpi = 2\varpi_E = 2\varpi_B = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}EB.$$

13. Для электромагнитного поля в среде, обладающей диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ определится как

$$\varpi = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}EB = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}EH.$$

14. Таким образом, полная плотность энергии электромагнитного поля складывается из двух равных по величине вкладов, соответствующих плотностям электрического и магнитного полей.

15. Определим далее энергию, переносимую электромагнитной волной в единицу времени через единичную площадь. Эту векторную величину называют обычно вектором Умова - Пойтинга.

16. Умов Николай Алексеевич (1846 – 1915), выпускник московского университета. После получения магистерского и доценского званий преподавал в Новороссийском университете. После смерти Столетова был приглашён заведовать кафедрой физики московского университета. В 1911 г. в знак протеста против политики правительства в области образования, ушёл из университета, занялся научной деятельностью. В 1874 г. Умовым была защищена докторская

диссертация на тему «Уравнения движения энергии», где и была предложена новая векторная величина, так называемый – вектор Умова.

17. Пойтинг Джон Генри (1852 - 1914), выпускник Кембриджа, профессор Мезон – колледжа (г. Бирмингем), приятель знаменитого Дж. Дж. Томсона. В 1884 году (десятилетие спустя поле Умова) опубликовал работу «О переносе энергии в электромагнитном поле», где без всяких, подобающих такому случаю ссылок, ввёл вектор Умова, который в западных изданиях именуется как вектор Пойтинга.

18. Определим энергию электромагнитной волны

$$\varpi = \varepsilon\varepsilon_0 E^2; \Rightarrow W = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 \cdot V.$$

19. Запишем выражение для плотности потока энергии через единичную площадку s за время dt

$$\Re = \frac{1}{s}\frac{dW}{dt} = \frac{1}{s}\frac{d}{dt}\left(\varepsilon\varepsilon_0 E^2 s dx\right) = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 \frac{dx}{dt} = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 c\ ,$$

поскольку

$$E = cB; \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}; v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

то для вакуума

$$\Re = \varepsilon_0 c E^2 = \frac{cB^2}{\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0}.$$

20. Вектор $\vec{\Re}$ по направлению совпадает с направлением переноса энергии, т.е. с вектором $\vec{v}$, $\vec{\Re}$ перпендикулярен $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Такое взаимное расположение векторов описывается, как известно, векторным произведением

$$\vec{\Re} = \frac{1}{\mu_0}\left[\vec{E} \times \vec{B}\right] = \left[\vec{E} \times \vec{H}\right].$$

21. За один период колебаний величина $\left|\vec{\Re}\right|$ дважды достигает своего максимального значения и дважды обращается в ноль, среднее же значение модуля вектора Умова-Пойтинга равно

$$\left|\vec{\Re}\right| = \frac{EH}{2}.$$

22. Ещё одной важной характеристикой электромагнитных волн является интенсивность J – величина, численно равная энергии, переносимой волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны

$$J = < \vec{\Re} > .$$

23. Процесс поглощения электромагнитной волны веществом сопровождается сообщением структурным элементам среды импульса, т.е. электромагнитная волна оказывает на поглощающее тело давление. Давление возникает вследствие направленного движения заряженных частиц вещества и их взаимодействия с магнитным полем. Давление электромагнитных волн имеет весьма малое значение. Солнечное излучение на абсолютно поглощающей поверхности создаёт давление порядка 5 мкПа. Экспериментально давление света обнаружено Петром Николаевичем Лебедевым (1866 – 1912), который асестировал А.Г. Столетову в Московском университете. Импульс ЭМ - волны можно записать так

$$p = \frac{1}{c} W.$$

24. Полагая импульс равным $p = mc$, получим, что $W = mc^2$. Это уравнение впервые было записано Оливером Хевисайдом, за несколько лет до Эйнштейна.

25. Электромагнитные волны могут возбуждаться только ускоренно движущимися зарядами. Цепи постоянного тока, в которых носители заряда движутся с неизменной скоростью, не являются источником электромагнитных волн. В современной электронике излучение электромагнитных волн производится с помощью антенн различных конструкций, в которых возбуждаются, изменяющиеся по определённым законам электрические токи. Простейшим излучателем электромагнитных волн, является электрический диполь с изменяющимся во времени дипольным моментом. Такой элементарный диполь называется диполем Генриха Герца.

---

407. Сколько колебаний происходит в электромагнитной волне с длиной волны λ = 30 м в течение одного периода звуковых колебаний с частотой ν = 200 Гц?

Решение

1. Определим период колебаний в электромагнитной волне

$$c = \lambda_1\nu_1 = \frac{\lambda}{T_1}; \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\lambda_1}{c} \cong \frac{30}{3\cdot 10^8} \cong 1\cdot 10^{-7}\,\text{с};$$

2. Период звуковых колебаний

$$T_2 = \frac{1}{\nu} \cong 5\cdot 10^{-3}\,\text{с};$$

3. Отношение периодов

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{5\cdot 10^{-3}}{1\cdot 10^{-7}} = 5\cdot 10^4;$$

---

408. На какой частоте передаётся сигнал бедствия SOS, если по международным соглашениям длина электромагнитной волны должна быть λ = 600 м?

Решение

1. Частота передачи тревожного сигнала

$$c = \lambda\nu; \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{c}{\lambda} \cong \frac{3\cdot 10^8}{600} \cong 0{,}5\,\text{МГц};$$

---

409. Чему равна длина волн, посылаемых радиопередатчиком, работающим на частоте ν = 1,4 МГц?

Решение

1. Длина волны радиопередатчика

$$c = \lambda\nu; \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{c}{\nu} \cong \frac{3\cdot 10^8}{1{,}4\cdot 10^6} \cong 214\,\text{м};$$

---

410. В 1897 г. русский физик П.Н. Лебедев получил электромагнитное излучение с длиной волны λ = 6 мм. Определить период и частоту таких электромагнитных волн.

Решение

1. Частота и период полученной электромагнитной волны определятся следующим образом

$$c = \lambda\nu; \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{c}{\lambda} \cong \frac{3\cdot 10^8}{6\cdot 10^{-3}} \cong 5\cdot 10^{10}\ \text{Гц}; \quad T = \frac{1}{\nu} \cong 2\cdot 10^{-11}\,\text{с},$$

---

411. Определить длину волны, на которой работает передатчик искусственного спутника, если частота колебаний равна ν = 20 МГц.

Решение

1. Длина волны спутниковой радиостанции

$$c = \lambda\nu; \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{c}{\nu} \cong \frac{3\cdot 10^8}{2\cdot 10^7} \cong 15\ \text{м};$$

---

412. Электромагнитные волны распространяются в некоторой среде со скоростью $c_1 = 2\cdot 10^8$ м/с. Какую длину волны имеют электромагнитные колебания, если их частота в вакууме ν_0 = 1 МГц? Какова длина волн этих колебаний в вакууме?

Решение

1. Длина волн в вакууме

$$c_0 = \lambda\nu; \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{c_0}{\nu_0} \cong \frac{3\cdot 10^8}{1\cdot 10^6} \cong 300\ \text{м};$$

2. Свойства среды влияют на скорость распространения электромагнитных волн, но если отсутствует дисперсия, то на частоту колебаний влияния не оказывают

$$\nu_0 = \nu_1; \quad \Rightarrow \quad c_1 = \lambda_1\nu; \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{c_1}{\nu_0} \cong \frac{2\cdot 10^8}{1\cdot 10^6} \cong 200\ \text{м};$$

---

413. Колебательный контур состоит из конденсатора ёмкостью C = 0,4 мкФ и катушки индуктивности L = 1 мГн. Определить длину волны в вакууме, излучаемую этим контуром.

Решение

1. Определим частоту собственных колебаний контура, воспользовавшись формулой Томсона

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}};$$

2. Определить длину излучаемой волны

$$c = \nu\lambda; \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{c}{\nu} = 2\pi c\sqrt{LC} \cong 6{,}28\cdot 3\cdot 10^8\sqrt{4\cdot 10^{-7}\cdot 10^{-3}} \cong 37{,}75\ \text{км};$$

---

413. Определить индуктивность контура, ёмкость которого C = 700 пФ, если он излучает электромагнитные волны с длиной λ = 50 м.

Решение

1. Запишем уравнение длины волны, из которого определим индуктивность заданного контура

$$\lambda = 2\pi c\sqrt{LC}; \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 c^2 C} \cong \frac{2{,}5\cdot 10^3}{40\cdot 9\cdot 10^{16}\cdot 7\cdot 10^{-10}} \cong 1\cdot 10^{-6}\,Гн = 1\,мкГн\,;$$

---

414. В каком диапазоне длин волн работает передатчик, если ёмкость его колебательного контура может изменяться в пределах от C_1 = 60 пФ до C_2 = 240 пФ при индуктивности $L = 5\cdot 10^{-5}$ Гн.

Решение

1. Определим диапазон длин волн, излучаемых передатчиком

$$\lambda_1 = 2\pi c\sqrt{LC_1} \cong 6{,}28\cdot 3\cdot 10^8\sqrt{5\cdot 10^{-5}\cdot 6\cdot 10^{-11}} \cong 193{,}2\,м\,;$$

$$\lambda_2 = 2\pi c\sqrt{LC_2} \cong 6{,}28\cdot 3\cdot 10^8\sqrt{5\cdot 10^{-5}\cdot 2{,}4\cdot 10^{-10}} \cong 206{,}4\,м\,;$$

2. Радиопередатчик работает в средневолновом диапазоне радиоволн.

---

415. На какую длину волны настроено приёмное устройство, если его колебательный контур имеет ёмкость C – 0,1 пФ и в контуре возникает ЭДС самоиндукции ε_{is} = 0,2 В, при скорости изменения силы тока в контуре $\Delta i/\Delta t$ = 2 А/с?

Решение

1. Определим индуктивность контура

$$|\varepsilon_{si}| = L\frac{\Delta i}{\Delta t}; \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\varepsilon_1}{\Delta i/\Delta t} \cong \frac{0{,}2}{2} = 1\cdot 10^{-3}\ Гн\,;$$

2. Длина волны, излучаемая контуром

$$\lambda = 2\pi c\sqrt{LC} \cong 6{,}28\cdot 3\cdot 10^8\sqrt{1\cdot 10^{-3}\cdot 1\cdot 10^{-13}} \cong 188{,}4\,м\,;$$

---

416. Ёмкость переменного конденсатора колебательного контура изменяется в пределах от C_1 до $C_2 = 9C_1$. Найти диапазон длин волн, принимаемых контуром, если ёмкости C_1 соответствует длина волны λ_1 = 3 м.

Решение

1. Запишем систему уравнений, описывающих длины волн при заданных ёмкостях

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= 2\pi c\sqrt{LC_1}; \\ \lambda_2 &= 2\pi c\sqrt{LC_2}; \end{aligned}\right\}$$

2. Поделим второе уравнение на первое

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} = 3; \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = 9\,м\,;$$

---

417. Какую электроёмкость должен иметь конденсатор, чтобы колебательный контур радиоприёмника, состоящий из этого конденсатора и катушки индуктивности L = 10 мГн, был настроен на длину волны λ = 1000 м?

Решение

1. Величину ёмкости определим из уравнения длины излучаемой волны

$$\lambda = 2\pi c\sqrt{LC}; \quad \Rightarrow C = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 c^2 L} = \frac{10^6}{40\cdot 9\cdot 10^{16}\cdot 10^{-2}} \cong 28\ \text{пФ}\ .$$

---

418. Кто открыл принцип и возможности передачи информации посредствам электромагнитных волн?

Решение

1. Особое место в жизни и развитии современной цивилизации занимают электромагнитные волны, так называемого, радиодиапазона. Освоение этой электромагнитной энергетической ниши началось в 1845 г. стараниями Майкла Фарадея, который впервые ввёл понятие электромагнитного поля.

2. Это было одним из самых значимых научных открытий со времён Ньютона, как с теоретических позиций, так и в практическом плане. Фарадей впервые из всех осознал, что электромагнитное поле может существовать в пустоте, обладая при этом вполне определённой энергией, как и всякая волна в среде.

3. Далее на научном горизонте взошла звезда сразу трёх гениев, Максвелла, Герца и Хевисайда. В 1865 г. Максвелл предложил свою электродинамику, предсказавшую наличие электромагнитных волн. Главный вывод следовавший из уравнений Максвелла заключался в возможности распространения электромагнитной энергии в пространстве со скоростью света.

4. В 1887 – 1888 гг. Генрих Герц, ведомый опытным и маститым Гельмгольцем, пытаясь опровергнуть Максвелла, экспериментально подтвердил существование электромагнитных волн. Вскоре после экспериментов, доказавших, что излучение диполя является волной нового типа, Герц совместно с Хевисайдом двадцать уравнений Максвелла свели всего к четырём уравнениям, которые, в принципе описали многие физические, давно не дававшие покоя учёным явления, включая излучение Солнца и других космических объектов.

5. Дальше общественное мнение о приоритетах в развитии излучения и приёма электромагнитной энергии радиодиапазона резко поделилось.

6. Оспаривают лидерство наш соотечественник Александр Степанович Попов и итальянский инженер Гульельмо Маркони.

7. Попов 25 апреля (7 мая – по новому стилю) 1895 г., будучи преподавателем военно-морского высшего учебного заведения в Кронштадте на собрании научного общества впервые в мире сообщил об изобретении им метода и прибора для использования электромагнитных волн при беспроводной передаче информации.

Рис. 418.1. А.С. Попов и Г. Маркони

8. Менее чем через год Попов продемонстрировал устройство, посредством, которого он без проводов передал радиограмму, состоящую всего из двух слов: «Генрих Герц».

9. Подробное описание аппаратуры Попова было сделано в ряде журналов Русского физико-химического общества в феврале, ноябре 1895 г., там же автором был изложен принцип модуляции высокочастотных колебаний низкочастотными колебаниями звукового диапазона.

10. После пробной радиопередачи А.С. Попов интенсивно исследовал методы увеличения дальности передачи информации в виде электромагнитных волн. По решению командования Балтийского флота были изготовлены несколько комплектов аппаратуры, которую смонтировали на кораблях.

11. Для расширения внедрения конструкторская документация была передана иностранным изготовителям в Германии и Франции. Несколько образцов аппаратов Попова было выпущено в Англии военным ведомством.

12. Публикации Попова привлекли внимание известного физика Аугусто Риги из Болонского университета, который познакомил с научной новинкой молодого, но очень предприимчивого инженера Гульельмо Маркони. Повторив опыты Попова Маркони 2 марта 1987 г., узнав, что Попов заявку на изобретение не подавал, тут же в Англии оформил патент и 2 марта 1897 г. его получил за №12039.

13. Из текста патента следовало, что Маркони в своём патенте применил приёмник энергии электромагнитных волн А.С. Попова, добавив в схему отдельное питание от химического источника тока звонка.

14. Даже в таком варианте Маркони по времени отстал от Попова, практически, на 2 года. Далее Маркони создаёт фирму «Marconi Telegraph Company» и начинает снабжать аппаратами весь английский флот.

15. Повторилась история испанского компаса. Испания родина компаса и всё тут. Китайцы и Викинги – выходные. А Маркони для всей Европы изобретатель радио, Попов вроде и ни при делах. Очевидно в таком положении дел больше политики, чем здравого научно-технического смысла.

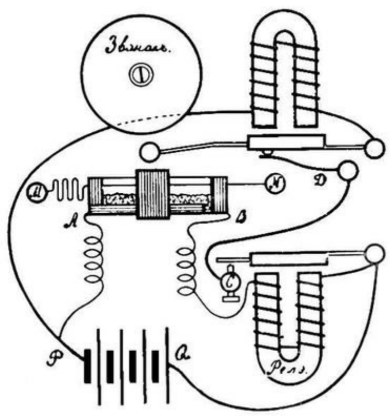


Рис. 418.2. Схема приёмника Попова

Рис. 418.3. Когерер Лоджа

16. Основным элементом в первом приёмнике А.С. Попова являлся когерер Лоджа (рис. 418.2). Когерер представлял собой активный элемент, изменяющий своё сопротивление при внешних воздействиях. Таким воздействием была энергия электромагнитной волны.

17. Когерер (рис. 418.3) представлял собой стеклянную трубку, заполненную железными опилками. В обычном состоянии трубка с опилками обладала вследствие плохого электрического контакта между отдельными частичками проводника большим омическим сопротивлением, порядка одного мегома.

18. При прохождении электромагнитной волны между частичками проводника проскакивают электрические разряды (искорки) и частички слипаются, уменьшая в 100 – 200

раз сопротивление когерера за счёт точечного разрушения окисных плёнок на поверхности металлических опилок.

18. Для приведения устройства в исходное состояние его необходимо встряхивать, чтобы разрушить установившиеся под действием энергии электромагнитной волны контакты.

19. Таким образом когерер, подобно современному электронному устройству триггеру Шмидта имеет два устойчивых состояния, причём в состояние малого сопротивления он переводится внешним электромагнитным воздействием, а в состояние высокого омического сопротивления – внешним механическим воздействием. По сути, когерер является своеобразным ключом с «защёлкой», фиксирующим прохождение электромагнитного импульса.

20. Когерер был изобретён Эдвардом Бранли в 1890 г. В 1894 г. устройство было усовершенствовано Оливером Лоджем, который для встряхивания когерера приспособил ударник с часовым механизмом, через заданные промежутки времени ударник сотрясал трубку с опилками, приводя её в состояние большого сопротивления.

21. Александр Степанович Попов использовал когерер Лоджа в своём первом приёмнике, который регистрировал электромагнитное излучение, сопровождающее грозовые разряды, т.е. им был построен первый в мире грозоотметчик.

22. Первые эксперименты Попов провёл в начале 1895 г., расположив рядом с приёмником вибратор Герца. Во время этих экспериментов впервые в мировой практике была использована антенна в виде длинного провода, подключаемого к одному из контактов когерера, второй контакт заземлялся.

23. Эти нововведения позволили фиксировать искровые разряды, генерируемые вибратором Герца на расстоянии 60 м. Во время экспериментов Попов заметил, что время от времени приёмник регистрировал не волны, излучаемые вибратором, а какое-то постороннее более мощное излучение. Наблюдения показали, что приёмник реагирует на грозовые разряды.

24. Обнаружив такое свойство своего прибора, Попов изготовил новый образец приёмника, снабдив его самописцем с бумажной лентой, размещённой на барабане (рис. 418.4).

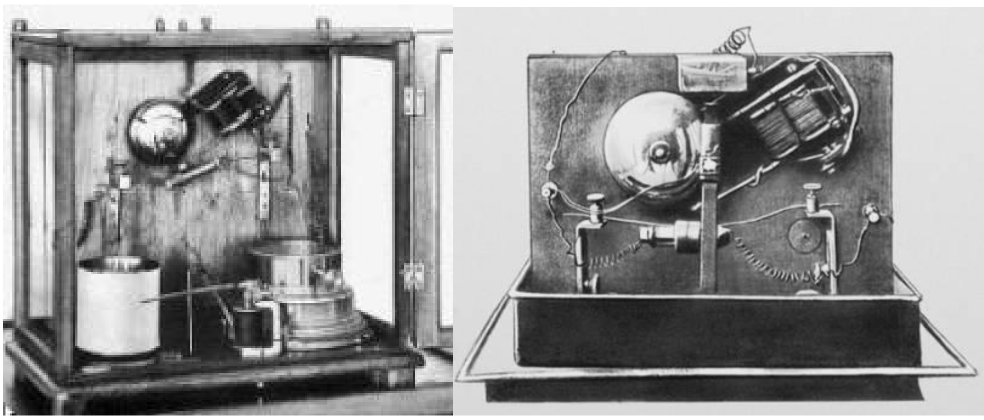


Рис. 418.4. Грозоотметчик и радиотелеграф А.С. Попова

25. Грозоотметчик Попова был установлен в лаборатории лесного института и мог фиксировать приближение грозы за 30 км

26. Но главной целью Александра Степановича было получение аппарата для телеграфной связи без проводов. В марте 1896 г. Попов продемонстрировал первую в мире передачу осмысленной информации из одного здания в дру-

гое, находящееся на расстоянии 250 м. В химическом корпусе Петербургского университета был расположен передатчик, а в физической лаборатории – приёмник.

27. В лаборатории помимо высоких военно-морских чинов присутствовали ведущие учёные – электрики: О. Д. Хвольсон, И. И. Боргман, А. И. Садовский, В. К. Лебединский, М. А. Шателен, А. Л. Гершун, Г. А. Любославский, П. Н. Георгиевский, Н. А. Смирнов, В. В. Скобельцын, Н. А. Булгаков, Н. Г. Егоров и Ф. Ф. Петрушевский.

28. Текст телеграммы был известен только Попову, который перед демонстрацией дал возможность всем присутствующим ознакомиться с устройством приёмника и передатчика с собственными подробными комментариями в виде вступительного доклада. В физической лаборатории перед демонстрацией устройств Попова, совмещённых с аппаратом Морзе, стояла напряжённая тишина.

29. Практически все собравшиеся осознавали, что присутствуют при рождении чего-то из ряда вон выходящего, изобретения, которое может стать в истории всего человечества величайшим. Процесс приёма первой в мире радиограммы описал в своих воспоминаниях профессор Хвольсон О.Д.

30. Хвольсон писал: «*Передача происходила таким образом, что буквы передавались по алфавиту Морзе и притом знаки были ясно слышны. У доски стоял председатель Физического общества проф. Ф. Ф. Петрушевский, имея в руках бумагу с ключом к алфавиту Морзе и кусок мела. После каждого передаваемого знака он смотрел в бумагу и затем записывал на доске соответствующую букву. Постепенно на доске получились слова Heinrich Hertz и притом латинскими буквами. Трудно описать восторг многочисленных присутствующих и овации А. С. Попову, когда эти два слова были написаны. Так начало свою жизнь одно из величайших изобретений человеческого гения. Великий изобретатель увековечил в первой радиограмме того, кто первым в мире наблюдал электромагнитные волны. А. С. Попов был первым человеком, заставившим эти волны служить человеку*».

31. Будучи на службе в морском ведомстве Попов А.С. получил инструкции о не разглашении широко своего изобретения, поэтому запись в протоколах заседания научного общества звучала так:

«А.С. Попов продемонстрировал приборы для лекционных демонстраций опытов Генриха Герца. Описание их уже помещено в ЖРФХО, 1896 г., т. XXVIII, стр. 124».

32. Внедрение разработок Попова проходило не без трудностей. По стародавней отечественной практике чиновники морского ведомства были склонны более доверять иностранным фирмам, которые в основном удовлетворяли потребности флота в морских приборах, хотя офицерское собрание поддерживало предложения Попова.

33. Однако, несмотря на финансовые ущемления, Попов и его сторонники продолжали испытания и совершенствования аппаратов беспроводной связи. При испытаниях на кораблях Балтийского флота был обнаружен эффект временного замирания связи в моменты прохождения между приёмником и излучателем третьего судна, который был классифицирован Поповым, как влияние отражения передаваемого сигнала от проходящего корабля. Это был первый шаг к освоению **методов радиолокации.**

34. В 1897 г. средства связи были установлены на крейсере «Африка» и транспортном судне «Европа», где испытывались аппараты с телефонной трубкой вместо аппарата Морзе. Это позволило увеличить дальность уверенного

приёма сообщений до 28 км. Попов получил привилегию на новый тип «….телефонного приемника депеш, посылаемых с помощью какого-либо источника электромагнитных волн по системе Морзе».

35. Патент на это открытие был зарегистрирован в Англии. По патентам приёмники Попова начала изготавливать французская фирма «Дюкрете» и Кронштадтская мастерская беспроволочного телеграфа.

36. Беспроводный радиотелеграф А.С. Попова в первые в мировой практике был использован при морской спасательной операции. Броненосец «Генерал-адмирал Апраксин» во время сильного шторма выбросило на камни вблизи пустынного острова Гогланд. Судно получило множественные пробоины. Его спасение теоретически было возможным при наличии постоянной связи между кораблём и Петербургом.

37. Прокладка кабеля протяжённостью 40 км до ближайшего городка в Финляндии стоила более 20 000 руб. По тем временам это были очень большие деньги. Именно тогда, специально созданная комиссия министерства вспомнила, что есть некто А.С. Попов, который несколько лет подряд обращается с просьбами финансирования разработок беспроводного телеграфа. Другими словами, предчувствие беды колыхнуло спокойную чиновничью гладь.

38. Организовали специальную экспедицию по установке аппаратуры А.С. Попова на корабле. Аппараты обеспечили надёжную связь в течение всего зимнего периода, когда корабль стоял скованный льдами, но на нём под руководством специалистов – корабелов шли восстановительные работы.

39. Всего за время спасательной операции было отправлено 400 радиограмм. В один из дней с броненосца заметили льдину с 50 мечущимися по ней рыбаками. Координаты льдины по радиотелеграфу были переданы в Петербург, и льдину удалось перехватить ледоколу «Ермак».

40. После этих событий в апреле 1900 г. был издан указ: « О введении беспроволочного телеграфа на боевых судах флота». В Кронштадте начало работу первое отечественное предприятие по производству радиостанций и подготовке специалистов из числа офицеров, но очень медленно.

41. Аппаратуры на все корабли не хватало и её стали закупать за рубежом, хотя изготовлена она была, в частности, и по патентам А.С. Попова. Это удручающее обстоятельство сослужило одной из многочисленных причин поражения Российского флота в войне с Японией.

42. История великих отечественных изобретений повторяется с досадным постоянством. Вспомним по этому случаю Ивана Ивановича Ползунова, который на 8 лет раньше Уатта разработал проект огневой машины. И что? Кто порадовался и выхватил идею для внедрения и последующего обогащения? Никто. Так примерно произошло и с изобретениями Попова.

43. Оборотистый Маркони, начав заниматься радиосвязью, по началу всех уверял, что он только модернизирует установки русского изобретателя. Но скоро этот пустячок в творческой биографии был забыт и Маркони стал выступать как самостоятельный изобретатель. А уж когда он, честь ему и хвала за такую ухватистость, развернул массовое производство, то из сознания зарубежных заинтересованных людей, да и не только, фамилия А.С. Попова выветрилась окончательно.

44. По поводу современного состояния комплекса радиотехнических наук много говорить не имеет смысла. Всё с чем общается в трудовой и повседневной жизни человек в большей или меньшей степени, связано с изобретением А.С. Поповым принципа и устройств беспроводной радиосвязи. Трудно себе

представить жизнь, хотя в принципе можно, без спутниковых систем связи, современного радио, телевидения, компьютерных технологий – всё огромное и стройное радиотехническое здание начиналось с первых краеугольных камней, которые заложил в фундамент А.С. Попов вместе с Фарадеем, Максвеллом, Герцем и Хэвисайдом.

---

419. Радиолокатор работает на волне длиной λ = 0,15 м и генерирует импульсы с частотой ν = 4 кГц. Длительность излучаемых импульсов τ_l = 2 мкс. Какова максимальная дальность обнаружения цели? Сколько колебаний содержится в одном импульсе?

Решение

1. Максимальная дальность обнаружения цели:

$$r_m = c\tau,$$

где $c \approx 3\cdot 10^8$ м/с – скорость распространения электромагнитной волны в воздухе, τ – время прохождения волной расстояния r_m.

2. Принцип радиолокации заключается в регистрации отражённого от цели сигнала:

$$\tau_\Sigma = 2\tau; \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{\tau_\Sigma}{2}; \quad \Rightarrow \quad r_m = c\frac{\tau_\Sigma}{2};$$

3. Время распространения импульса до цели и обратно, должно быть меньше или равно скважности излучаемых импульсов. Пусть за время τ генерируется n импульсов, тогда:

$$\tau_\Sigma = \frac{1}{n} = \frac{1}{(n/\tau)} = \frac{1}{\nu}; \quad \Rightarrow \quad r_m = \frac{c}{2\nu} \approx \frac{3\cdot 10^8}{8\cdot 10^3} \approx 37{,}5\ \text{км};$$

4. Число колебаний в одном импульсе радиолокатора:

$$\zeta = \frac{\tau_1}{T}; \quad T = \frac{c}{\lambda}; \quad \zeta = \frac{\tau_1 c}{\lambda} \approx \frac{3\cdot 10^8\cdot 2\cdot 10^{-6}}{0{,}15} \approx 4000;$$

---

420. Первая в мире радиограмма, была передана А.С. Поповым на расстояние r = 250 м. За какое время радиосигнал прошёл это расстояние?

Решение

$$\tau = \frac{r}{c} \approx \frac{250}{3\cdot 10^8} \approx 0{,}833\text{мкс};$$

---

421. На какой частоте морские суда передают сигнал SOS, если по международному соглашению длина волны должна быть λ = 600 м?

Решение

$$c = \lambda\nu; \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{c}{\lambda} \approx \frac{3\cdot 10^8}{600} \approx 0{,}5\text{мГц} \equiv 500\text{кГц};$$

---

422. На какой длине волны работает радиопередатчик, если его колебательный контур имеет конденсатор ёмкостью С = 2,6 пФ и катушку индуктивностью L = 0,012 Гн?

Решение

$$T = 2\pi\sqrt{LC}; \quad \nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}; \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2\pi c\sqrt{LC} \approx 332{,}78\text{м};$$

---

423. Можно ли приёмным колебательным контуром, состоящем из катушки индуктивностью L = 1 мГн и конденсатора C = 10 пФ, принимать передачи радиостанции, работающей на волне длиной λ = 100 м?

Решение

$$T_1 = 2\pi\sqrt{LC}; \quad \nu_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}; \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2\pi c\sqrt{LC} \approx 188\text{м}; \quad \lambda_1 \neq \lambda;$$

---

424. Электромагнитные колебания с частотой ν = 1 МГц возбуждают в некоторой однородной среде электромагнитные волны длиной λ = 200 м. Чему равна скорость волн в этой среде? Определить длину волны от этого источника в вакууме.

Решение

$$c_x = \lambda\nu = 1\cdot10^6\cdot200 = 2\cdot10^8\ \text{м/с};$$

$$\lambda_x = \frac{c_0}{\nu} \approx \frac{3\cdot10^8}{1\cdot10^6} \approx 300\text{м};$$

---

425. Станция работает на длине волны λ_n = 30 м. Сколько колебаний несущей частоты происходит в течение одного периода модулирующих звуковых колебаний с частотой ν_m = 5 кГц?

Решение

1. Частота и период несущего колебания при распространении волны в воздухе ($c \approx c_0$):

$$\nu_n \approx \frac{c}{\lambda_n} \approx 3\cdot10^7\,\text{Гц} \equiv 30\text{мГц}; \quad T_n = \frac{1}{\nu_n} \approx 3{,}33\cdot10^{-8}\text{с};$$

2. Период модулирующих колебаний звукового диапазона:

$$T_m = \frac{1}{\nu_m} = 2\cdot10^{-4}\text{с};$$

2. Кратность несущего сигнала и модулирующего сигнала:

$$\zeta = \frac{T_m}{T_n} \approx \frac{2\cdot10^{-4}}{3{,}3\cdot10^{-8}} \approx 6\cdot10^3;$$

---

12. Справочные данные

12.1 Характерные частоты колебательных процессов (ν), встречающихся в природе, Гц (c^{-1})

№	Наименование процесса	ν
1	Вековые возмущения планет	$1\cdot10^{-10}$
2	Обращение планет вокруг звёзд	10^{-8}
3	Частота приливов и отливов	10^{-5}
4	Колебательные процессы в машинах и механизмах	10^{1}
5	Усреднённая частота сокращений сердечной мышцы человека в спокойном состоянии	10^{0}
6	Акустические колебания инфразвукового диапазона	0,1-10
7	Акустические колебания звукового диапазона	20Гц – 20 кГц
8	Акустические колебания ультразвукового диапазона	20кГц –1 Мгц
9	Акустические колебания гиперзвукового диапазона	ν > 1 МГц
10	Радиотелеграфия	$10^{5} - 10^{8}$
11	Инфракрасное излучение	10^{12}
12	Видимое оптическое излучение	10^{15}
13	Рентгеновские лучи	10^{18}
14	γ - лучи	10^{20}
15	Космические лучи	10^{23}

12.2 Скорость звука (c), плотность (ρ) и акустическое сопротивление (ρc) в различных газах

Газ	t,^{0}C	c, м/с	ρ, кг/м^3	ρc, кг/м$^2\cdot$с
Водород	20	1310	0,084	110
Гелий	20	1005	0,167	168
Кислород	20	326	1,34	437
Азот	20	337	1,17	394
Неон	20	446	0,84	375
Аргон	20	323	1,60	517
Хлор	20	213	3,01	641
Окись углерода	20	350	1,17	410
Углекислый газ	20	268	1,85	496
Сероводород	20	300	1,44	432
Двуокись серы	20	224	2,75	616
Метан	20	445	0,66	294
Ацетилен	20	327	1,10	360
Этилен	20	330	1,18	389
Водяной пар	130	450	0,54	243
Воздух	20	344	1,21	41

12.3 Скорость звука (с), плотность (ρ) и акустическое сопротивление (ρс) в различных жидкостях

Жидкость	с, м/с	ρ, кг/м^3	ρс, кг/м^2·с
Ацетон	1190	790	$94 \cdot 10^4$
Этиловый спирт	1150	790	$91 \cdot 10^4$
Метиловый спирт	1120	790	$88 \cdot 10^4$
Этиловый эфир	1006	710	$72 \cdot 10^4$
Бензол	1326	870	$72 \cdot 10^4$
Бензин	1190	750	$246115 \cdot 10^4$
Глицерин	1950	1260	$115 \cdot 10^4$
Толуол	1325	866	$115 \cdot 10^4$
Соляная кислота	1500	908	$136 \cdot 10^4$
Вода дистиллированная	1492	1000	$149 \cdot 10^4$

12.4 Скорость звука (с) в твёрдых телах

Вещество	Темпе-ратура	Скорость звука, м/с		
		В стержне	Продольная	Поперечная
Алюминий	20	5080	6260	3080
	372	4342	-	-
Бериллий	-250	-	12660	8900
	27	-	12550	8830
Висмут	20	1790	2180	1100
Вольфрам	20	4310	5460	2620
Железо	20	5170	5850	3230
Золото	20	2030	3240	1200
Иридий	20	4790	-	-
Кадмий	20	2400	2780	1500
Константан	20	4300	5240	2640
Кремний	31,5	-	-	3770
Латунь	20	3490	4430	2123
Магний	-	4900	-	-
Манганин	20	3830	4660	2350
Марганец	-	3830	4660	-
Медь	20	3710	4700	2260
Никель	20	4785	5630	2960
Олово	20	2730	3320	1670
Платина	20	2800	3960	1670
Свинец	20	1200	2160	700
Серебро	-	2640	3600	1590
Сталь	-	5050	6110	-
Сурьма	20	3400	-	-
Тантал	20	3350	-	-
Цинк	20	3810	4170	2410
Чугун	-	3850	4500	2400
Стекло квар-цевое	-	5370	5570	3515
Плексиглас	-	-	2670	1112

Полистирол	-	-	2350	1120
Каучук	-	-	1479	-
Эбонит	-	1570	2405	-
Пробка	-	500	-	-
Лёд	-	3280	3980	1990
Фарфор	-	4884	5340	3120
Парафин	-	1460	-	-
Гранит	-	3950	-	-
Мрамор	-	3810	-	-
Сланец	-	4510	-	-
Слоновая кость	-	2200	-	-

12.5 Скорость звука (с) в дереве, м/с

Порода дерева	Скорость звука (с), м/с	
	Параллельно волокнам	Перпендикулярно волокнам
Бук	3400	4556
Дуб	3380	4597
Красная ель	4180	6270

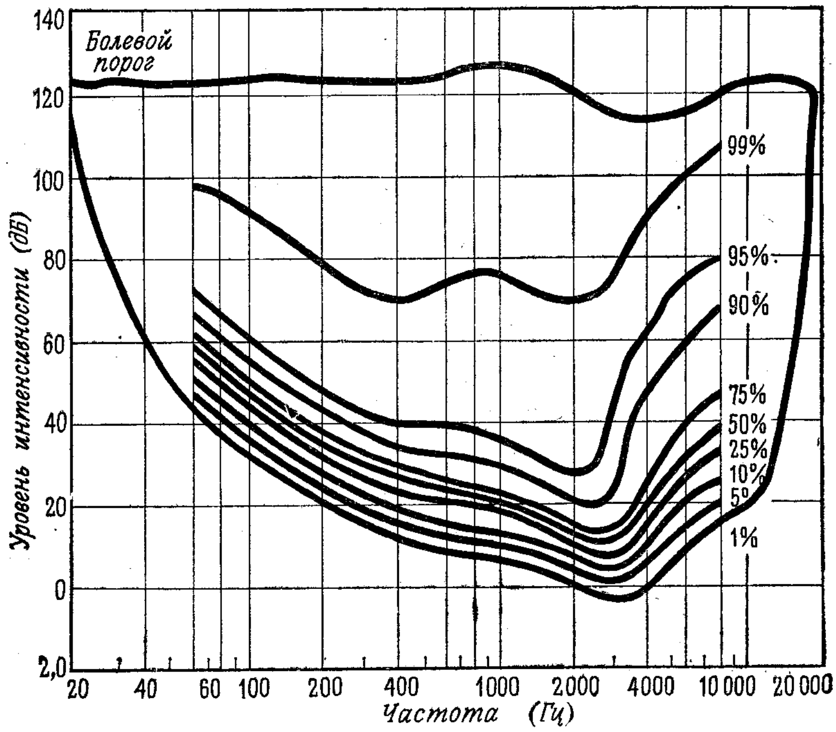
12.6 Скорость звука (с) в воздухе в зависимости от температуры

Температура, $t, ^0C$	с, м/с	Температура, $t, ^0C$	с, м/с
-150	216,7	30	348,9
-100	263,7	50	360,3
-50	299,7	100	387,1
-20	318,7	200	436,0
-10	325,7	300	479,8
0	331,5	400	520,0
10	337,3	500	557,2
20	343,1	1000	714,2

12.7 Скорость звука (с) на различной высоте (h) над Землёй

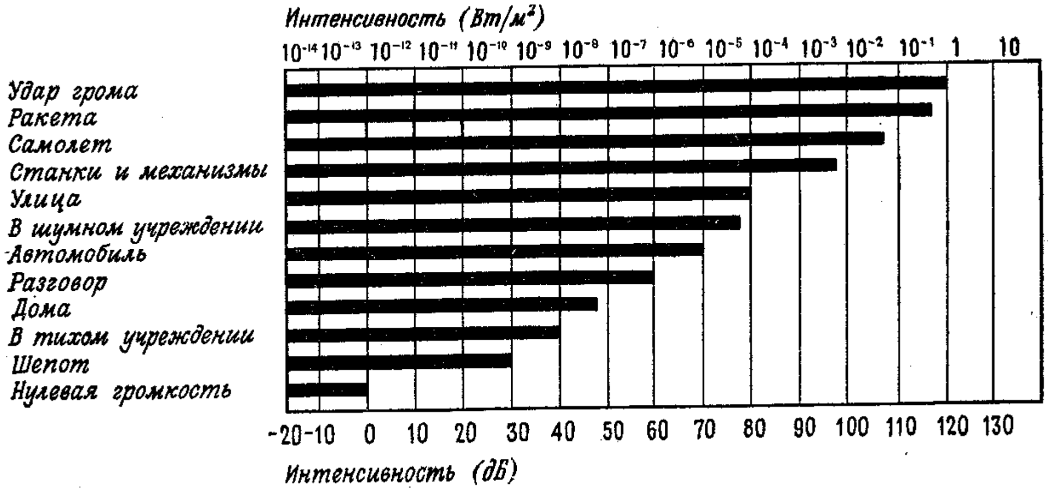
h ,м	с,м/с	h ,м	с,м/с	h ,м	с,м/с
0	340,29	500	338,38	5000	320,54
50	340,10	600	337,98	10 000	299,53
100	339,91	700	337,60	20 000	295,07
200	339,53	800	337,21	50 000	329,80
300	339,14	900	336,82	80 000	282,54
400	338,76	1000	336,43	100 000	251,34

12.8 Область слухового восприятия звуковых волн различными людьми в зависимости от частоты и уровня интенсивности *

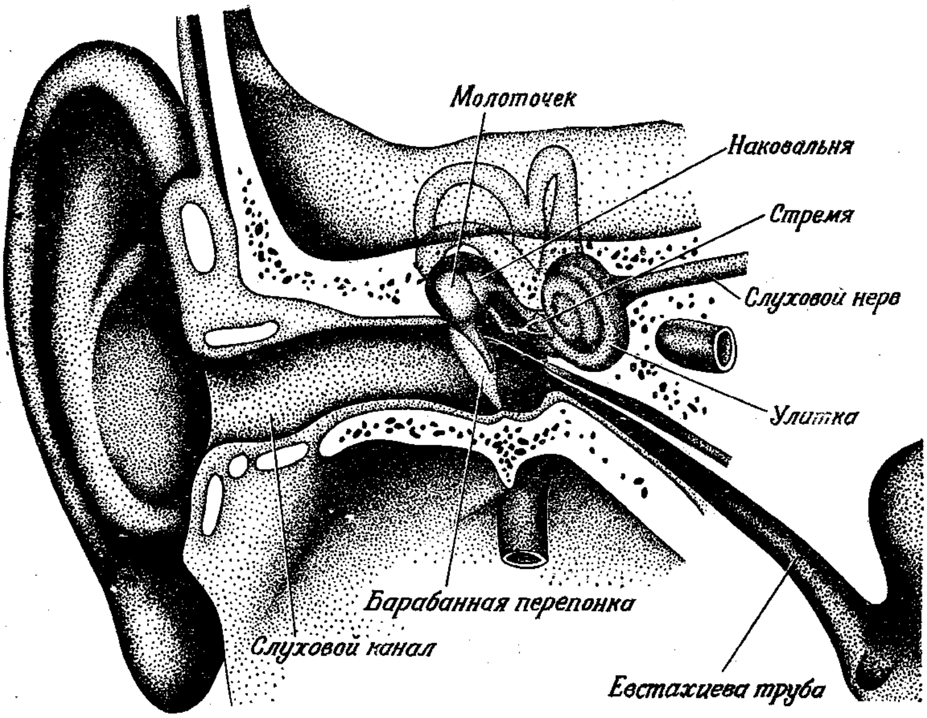


*Уровень интенсивности - $L = \lg(I / I_0)$, где $I_0 \cong 1 \cdot 10^{-12}$ Вт/м^2.

12.9 Интенсивность различных источников акустических волн



12.10 Строение органа слуха человека



12.11 Акустические параметры человека

Наименование параметра	Значение параметра
Мощность голоса, тихий шёпот, Вт	$\cong 10^{-9}$
Мощность голоса, речь обычной громкости, Вт	$\cong 7\cdot 10^{-6}$
Мощность голоса, предельная громкость, Вт	$2\cdot 10^{-3}$
Интенсивность звука при пороге слышимости, Вт/м^2	$1\cdot 10^{-12}$
Интенсивность звука при болевом пороге, Вт/м^2	10 – 100
Частотный диапазон при разговоре (у мужчин)	85 – 500
Частотный диапазон при разговоре (у женщин)	160 – 340
Частота колебаний голосовых связок при пении басом	80 –350
Частота колебаний голосовых связок при пении баритоном, Гц	110 – 400
Частота колебаний голосовых связок при пении тенором, Гц	130 - 250
Частота колебаний голосовых связок при пении сопрано	260 –1050
Частота колебаний голосовых связок при пении колоратурным сопрано, Гц	330 - 1400
Скорость звука в тканях тела, м/с	≅1560 м/с

12.12 Акустические параметры музыкальных инструментов

Инструмент	Среднее звуковое давление, Па	Пиковое значение мощности, Вт	Диапазон наибольшей мощности, Гц
Большой барабан	0.9	24,6	250 - 500
Военный барабан	1,46	1,2	250 - 500
Цимбалы 37 см	1,8	-	8,6 –11,3 кГц
Контрабас	0,42	0,58	125 - 250
Бас - саксофон	0,41	0,288	250 – 500
Бас - труба	0,54	0,206	250 –500
Тромбон	0,65	6,45	600 – 700
			2000 - 2800
Труба	0,86	0,314	250 – 500
			500 - 700
Английский рожок	0,38	0,053	250 - 500
Кларнет	0,35	0,05	700 - 1000
Флейта	0,16	0,055	1400-2000
Рояль	0,35	0,248	75-1500
Орган	2,0	12,6	20 - 1500
Оркестр из 15 инструментов	0,79	9,3	50-6800
Оркестр из 18 инструментов	0.96	14,4	40 - 8000
Оркестр из 75 инструментов	0,98	66,5	55 - 12000

15.13 Сила звука для основных значений шкалы децибел

Параметры звука	Децибелы, дБ	Сила звука, мкВт/м^2
Предел чувствительности уха	0	10^{-6}
Шепот на расстоянии 1м	10	10^{-5}
Шорох листьев в саду	20	10^{-4}
Средний уровень шума в аудитории	30	10^{-3}
Уровень шума в аудитории (перерыв)	50	10^{-1}
Шум двигателя грузовика	70	10
Машинное отделение траулера	90	10^{3}
Молодёжная тусовка (дискотека)	До 120	10^{5}
Сопло реактивного двигателя	150	10^{6}
Смертельный уровень звука	180	10^{12}