Камчатский государственный технический университет

А. Исаков

Физика

Решение задач ЕГЭ
Часть 8

Оптические явления

Петропавловск-Камчатский
2013

УДК 50(075.8)
ББК 20я73
И85

Рецензент
доктор физико-математических наук,
профессор Дальневосточного Федерального университета
Стоценко Л.Г.

Исаков Александр Яковлевич

И85 Физика. Решение задач ЕГЭ. Часть 8. Оптические явления. КамчатГТУ, 2013. – 195 с.

Приведены решения типовых задач из геометрической и волновой оптики. Ряд задач не относятся к, так называемому, «базовому уровню». Это задачи, для решения которых не вполне достаточно знания математических интерпретаций, они требуют более углублённого проникновения в суть физических законов. Решение задач, предваряется краткими теоретическими сведениями, содержащими как основные уравнения, так и их физическую интерпретацию, что позволяет к решению задач подойти более осмысленно.

Условия большинства задач, не являются новыми, они заимствованы из известных сборников задач, в основном из задачника Трубецковой С.В. (часть 7,8), кроме того использованы задачи, помещённые в пособиях под редакцией Н.Е. Савченко, С.М. Козела, Г.Ф. Меледина, А.А. Пинского, Касаткиной И.Л., Степановой Г.Н. и других популярных авторов. Большинство задач снабжены подробными решениями с анализом применяемых законов и определений, для стандартных задач самого начального уровня приведены только схемы решений.

Сборник предназначен, прежде всего, для школьников старших классов, намеревающихся овладеть методиками решения задач, в частности, повышенного уровня «С» в рамках современного ЕГЭ. Приведенные материалы могут быть так же полезными студентам первых курсов, изучающих общую физику в университетском объёме по техническим программам подготовки, особенно студентам заочной формы образования, когда программа осваивается самостоятельно.

Оглавление

Геометрическая оптика

Волновая оптика

Геометрическая оптика

1. Прямолинейное распространение света

1. При помощи проекционного фонаря на экране получен светлый круг радиусом R_1 = 0,5 м. Приблизив фонарь к экрану на расстояние r = 1,2 м, получили круг радиусом R_2 = 0,2 м. На каком расстоянии r_x находился фонарь от экрана во втором случае?

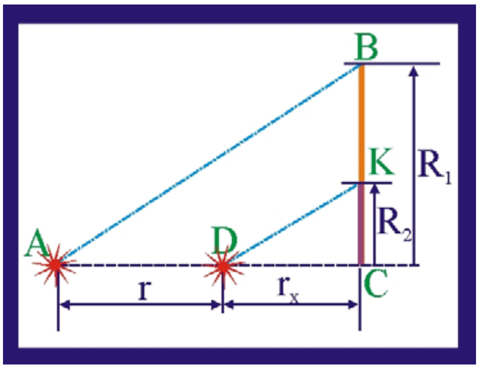


Рис. 1. Проекционный фонарь

Решение

1. Из подобия треугольников при условии прямолинейного распространения света от точечного источника:

$$\Delta\, ABC \sim \Delta\, DKC$$

$$\frac{r + r_x}{R_1} = \frac{r_x}{R_2}; \quad rR_2 + r_x R_2 = R_1 r_x;$$

$$r_x = \frac{rR_2}{R_1 - R_2} = \frac{1{,}2 \cdot 0{,}2}{0{,}3} = 0{,}8 \text{м};$$

2. На расстоянии x_1 = 0,8 м от экрана находится точечный источник света. Между источником и экраном на расстоянии x_2 = 0,3 м от экрана находится параллельно ему линейка длиной L = 0,12 м. Какой длины L_x будет тень от линейки на экране, если источник света расположен против середины линейки?

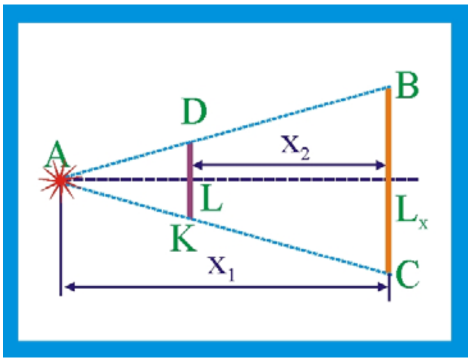


Рис. 2. Тень линейки

Решение

1. Из подобия треугольников при условии прямолинейного распространения света от точечного источника:

$$\Delta\, ABC \sim \Delta\, DKC$$

$$\frac{x_1 - x_2}{L} = \frac{x_1}{L_x}; \quad x_1 L_x - x_2 L_x = x_1 L;$$

$$L_x = \frac{Lx_1}{x_1 - x_2} = \frac{0{,}12 - 0{,}8}{0{,}8 - 0{,}3} = 0{,}192 \text{м};$$

3. Длина тени берегового маяка, освещённого Солнцем оказалась равной x_1 = 100 м, длина тени от человека ростом h = 1,75 м в тот же момент времени составила x_2 = 2 м. Какова высота маяка относительно поверхности, на которой он расположен?

Решение

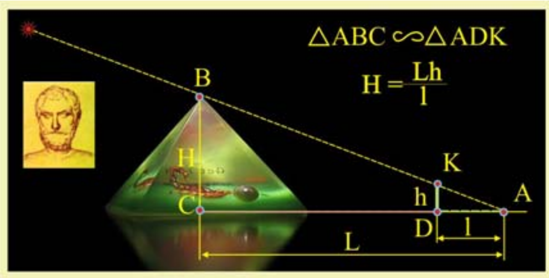


Рис. 3.2. Задача Фалеса Милетского

1. Впервые эта задача была решена в V веке до современного летоисчисления древнегреческим натурфилософом Фалесом Милетским по просьбе египетских жрецов, которым Фараон повелел измерить высоту пирамиды Хеопса. Фалес в качестве предмета известной высоты h использовал шест, вбитый вертикально в песок.

2. По аналогии с Фалесом:

$$h_x = \frac{hx_2}{x_2} = \frac{1{,}75 \cdot 100}{2} \approx 87{,}5\text{м};$$

---

4. Определить диаметр D тени на экране, отбрасываемой шаром радиусом r = 0,1 м, если расстояние от точечного источника света до центра шара x_1 = 0,5 м а от центра шара до экрана x_2 = 1 м.

Решение

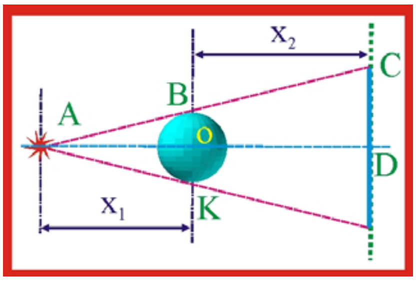


Рис. 4. Тень шара

1. Из подобия треугольников при условии прямолинейного распространения света от точечного источника:

$$\Delta\, AOB \sim \Delta\, ACD$$

$$\frac{x_1}{r} = \frac{2(x_1 + x_2)}{D}; \quad 2r(x_1 + x_2) = x_1 D;$$

$$D = \frac{2r(x_1 + x_2)}{x_1} = \frac{2 \cdot 0{,}1 \cdot 1{,}5}{0{,}5} = 0{,}6\text{м};$$

---

5. Дерево, освещённое солнцем, отбрасывает тень длиной x_1 = 25 м, а вертикально установленный шест высотой h = 0,75 м – длиной x_2 = 1,25 м. Определить высоту дерева h_x.

Решение

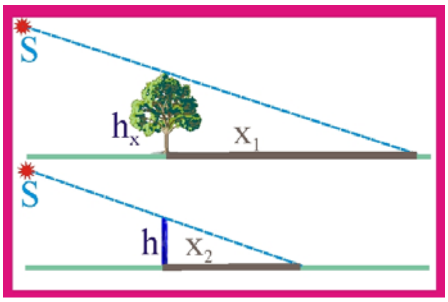


Рис. 5. Тени дерева и шеста

1. Из подобия соответственных прямоугольных треугольников:

$$\frac{h_x}{x_1} = \frac{h}{x_2}; \quad \Rightarrow \quad h_x x_2 = x_1 h;$$

$$h_x = \frac{x_1 h}{x_2} = \frac{25 \cdot 0{,}75}{1{,}25} = 15\text{м};$$

---

6. На какой высоте h_x находится лампа над горизонтальной поверхностью стола, если тень от вертикально поставленного на стол карандаша высотой h = 0,15 м оказалась равной x_1 = 0,1 м при расстоянии от основания карандаша до основания перпендикуляра, опущенного из центра лампы на поверхность стола x_2 = 0,9 м?

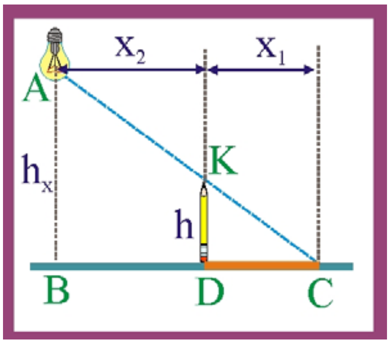


Рис. 6. Высота подвеса лампы

Решение

1. Из подобия треугольников при условии прямолинейного распространения света от точечного источника:

$$\Delta\, ABC \sim \Delta\, KDC$$

$$\frac{x_1 + x_2}{h_x} = \frac{x_1}{h}; \quad \Rightarrow \quad h(x_1 + x_2) = h_x x_1;$$

$$h_x = \frac{h(x_1 + x_2)}{x_1} = \frac{0{,}15 \cdot 1}{0{,}1} = 1{,}5\text{м};$$

---

7. Чему равна длина тени, отбрасываемой вертикальным шестом высотой h на горизонтальную поверхность, если угловая высота Солнца α?

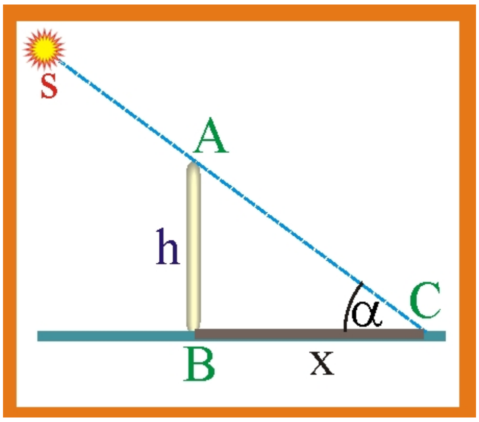


Рис. 7. Длина тени шеста

Решение

1. Из прямоугольного треугольника, у которого катетами являются высота шеста h и длина его тени x, следует:

$$\frac{h}{x} = \mathrm{tg}\alpha; \quad \Rightarrow \quad x = \frac{h}{\mathrm{tg}\alpha} = h\mathrm{ctg}\alpha;$$

---

8. Колышек высотой h = 1 м, поставленный вблизи уличного фонаря вертикально, отбрасывает тень длиной x_1 = 0,8 м. Если перенести колышек на расстояние d = 1 м в той же плоскости дальше от фонаря, то он станет отбрасывать тень длиной x_2 = 1,25 м. На какой высоте подвешен фонарь?

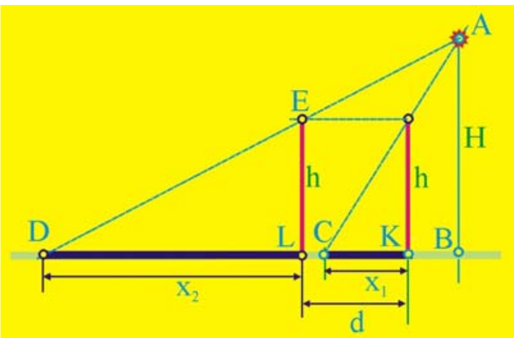


Рис. 8. Тень от колышка

Решение

1. Определим расстояние DC

$$DC = d - x_1 + x_2;$$

2. Определим изменение длины тени

$$\Delta x = x_2 - x_1;$$

3. Из подобия прямоугольных треугольников следует

$$\frac{Dc}{\Delta x} = \frac{H}{h}; \quad \Rightarrow \quad \frac{H}{h} = \frac{d + x_2 - x_1}{x_2 - x_1};$$

$$H = \frac{(d + x_2 - x_1)h}{x_2 - x_1} = \frac{(1 + 1{,}25 - 0{,}8)}{1{,}25 - 0{,}8} \cong 3{,}2\,\text{м};$$

---

9. Показать, что образование тени является следствием прямолинейного распространения света.

Решение

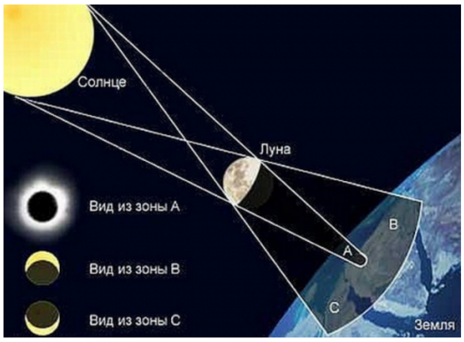


Рис. 9. Геометрическая тень

1. Образование тени, как и изображений в оптических системах объясняются четырьмя законами, установленными опытным путём: законом прямолинейного распространенбия света; законом независимости световых пучков; законом отражения и законом преломления.

2. Согласно закону прямолинейного распространения света, последний в прозрачной среде с n = 1 путешествует по прямолинейной траектории, то и обуславливает наличие за предметами геометрических теней.

10. Как нужно расположить источник света, чтобы во время хирургической операции тень от рук хирурга не закрывала операционное пространство?

Решение


Рис. 10. Хирургический осветитель

1. Организация без теневой поверхности может быть организована при выполнении двух законов геометрической оптики: закона прямолинейного распространения и закона независимости световых пучков. Закон независимости световых пучков утверждает, что пучок от данного источника распространяется независимо от того, есть ли в пространстве другие световые пучки.

2. Выполнение этих условий обеспечивается при расположении нескольких источников света на вогнутой сферической поверхности.

11. Источник света S находится над круглой непрозрачной пластиной на расстоянии a = 1 м от неё. Расстояние от пластинки до экрана b = 0,8 м, а диаметр тени на экране составляет d = 2,7 м. Определить радиус пластинки.

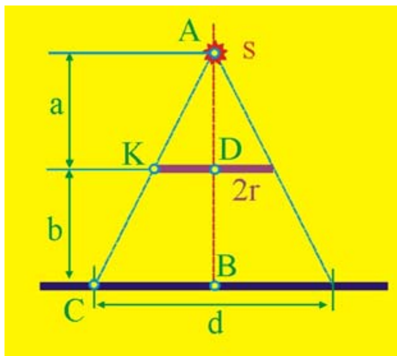


Рис. 11. Размер экрана

Решение

1. Размеры экрана в виде круглого диска можно определить из условия подобия прямоугольных треугольников

$$\Delta ABC \sim \Delta ADK, \Rightarrow$$

$$\frac{d/2}{a+b} = \frac{r}{a}; \quad \Rightarrow \quad r = \frac{ad}{2(a+b)} = \frac{1 \cdot 2{,}7}{2(1+0{,}8)} = 0{,}75\,\text{м}.$$

12. Диаметр источника света d = 0,2 м, расстояние до экрана s = 2 м. На каком наименьшем расстоянии L нужно поместить мяч диаметром d_1 = 0,08 м, чтобы он не отбрасывал тени на экран, а давал только полутень? Прямая, проходящая через центры источника света и мяча, перпендикулярна плоскости экрана.

Решение

1. Искомое расстояние определится из пропорции

$$\frac{d}{s}=\frac{d_1}{L}; \quad \Rightarrow \quad L=\frac{d_1 s}{d}=\frac{0{,}08\cdot 2}{0{,}2}=0{,}8\,\text{м};$$

---

13. Телеграфный столб высотой h и заводская труба, установленные вертикально на горизонтальной поверхности, отбрасывают тени высотой ℓ и L, соответственно. Определить высоту трубы h_x и угловую высоту светила.

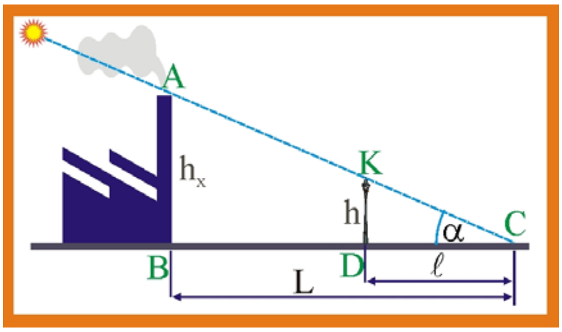


Рис. 13. Заводская труба и фонарный столб

Решение

1. Из подобия треугольников при условии прямолинейного распространения света от точечного источника:

$$\Delta ABC \sim \Delta DKC$$

$$\frac{h_x}{L}=\frac{h}{\ell}; \quad \Rightarrow \quad h_x=\frac{Lh}{\ell};$$

2. Угловая высота Солнца:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{h}{\ell}; \quad \Rightarrow \quad \alpha=\operatorname{arctg}\frac{h}{\ell};$$

---

14. Корабль проходит мимо стоящего на якоре судна. В момент наибольшего сближения матрос на судне вытягивает руку вперёд и, глядя только правым глазом, заслоняет большим пальцем вытянутой руки нос корабля. Открыв левый глаз и закрыв правый глаз, матрос видит, что его большой палец точно закрывает корму корабля. Посредствам таких нехитрых манипуляций матрос достаточно точно определяет расстояние до корабля L. Найти это расстояние, если длина корабля x_1 = 100 м, длина вытянутой руки ℓ = 0,6 м, расстояние между зрачками моряка d = 0,065 м.

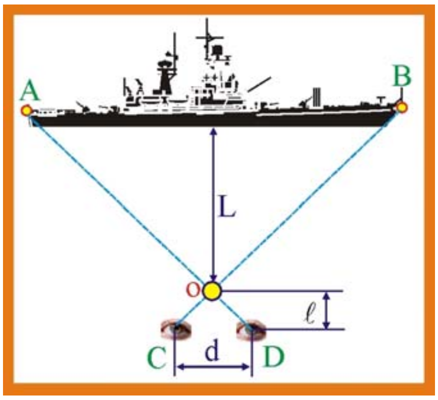


Рис. 14. Явление параллакса

Решение

1. Матрос в данном случае использует для измерения расстояния явление параллакса, которое заключается в изменении направления на измеряемый объект вследствие перемены точки наблюдения. Точка наблюдения изменяется при открывании и закрывании одного или другого глаза.

2. Предположим, что палец матроса располагается в точке о, в этом случае:

$$\Delta OAB \sim \Delta OCD,$$

другими словами,

$$\frac{\ell}{L}=\frac{d}{x_1}; \quad \Rightarrow \quad L=\frac{\ell x_1}{d}=\frac{0{,}6\cdot 100}{0{,}065}\approx 923\text{м};$$

---

2. Законы отражения. Плоское зеркало

15. Человек стоит на расстоянии x_1 = 5 м от вертикального плоского зеркала. На каком расстоянии ℓ от себя он видит своё изображение?

Решение

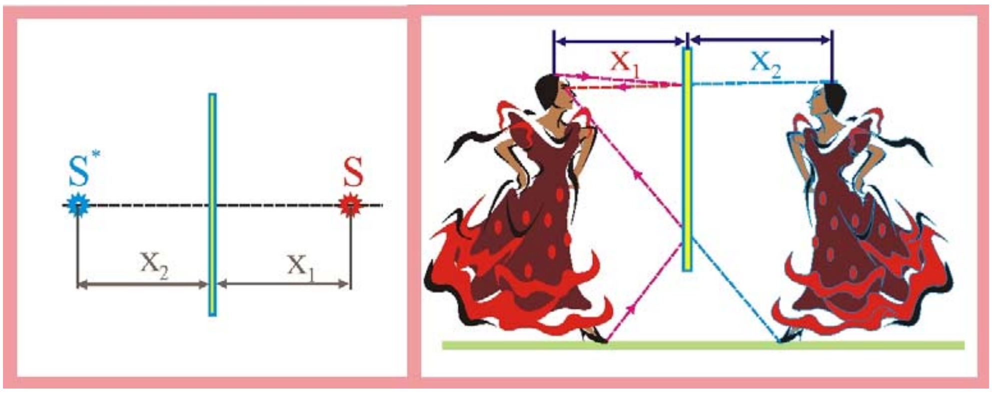


Рис. 15. Изображение в зеркале

1. Изображение источника в плоском зеркале получается мнимым и расположенным симметрично относительно плоскости зеркала:

$$x_1 = x_2; \quad \Rightarrow \quad \ell = x_1 + x_2 = 2x_1 = 10\text{м};$$

16. Как изменится расстояние между предметом и его изображением в плоском зеркале, если зеркало переместить в то место, где было изображение?

Решение

1. Мнимое изображение точечного источника, например, находится на таком же расстоянии от зеркала, как и сам источник (рис.15).

2. Указанное перемещение зеркала соответствует увеличению расстояния от зеркала до источника в два раза, следовательно расстояние межу предметом и его изображением увеличится тоже в 2 раза.

17. Предмет находится от плоского зеркала на расстоянии x_1 = 0,2 м. На каком расстоянии X от предмета окажется его изображение, если предмет отодвинуть от зеркала на расстояние d = 0,1 м?

Решение

1. При отодвигании предмета от зеркала на расстояние d, между предметом и плоскостью зеркала расстояние станет равным (x_1 + d), следовательно, и мнимое изображение предмета от зеркала будет равным (x_1 + d), поэтому:

$$X = 2(x_1 + d) = 0{,}6\text{м};$$

18. Каким должен быть угол падения светового луча, чтобы отражённый луч составлял с падающим лучом угол ζ = 50^0?

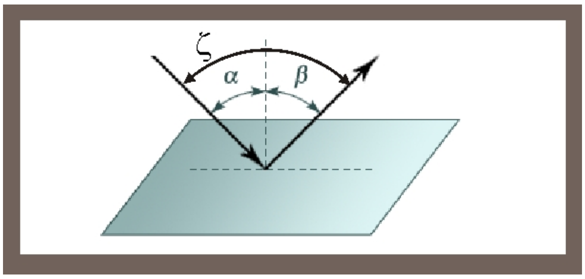


Рис. 18. Закон отражения света

Решение

1.Закон отражения света утверждает, падающий и отражённый лучи лежат в одной плоскости, и что угол падения светового луча равен углу отражения относительно перпендикуляра к плоскости падения, построенного из точки падения луча:

$$\xi = \alpha + \beta = 2\alpha = 2\beta; \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = \frac{\zeta}{2} = 25^0;$$

---

19. Как изменится угол между падающим и отражённым лучами, если угол падения уменьшить на $\Delta\alpha$ = 10^0?

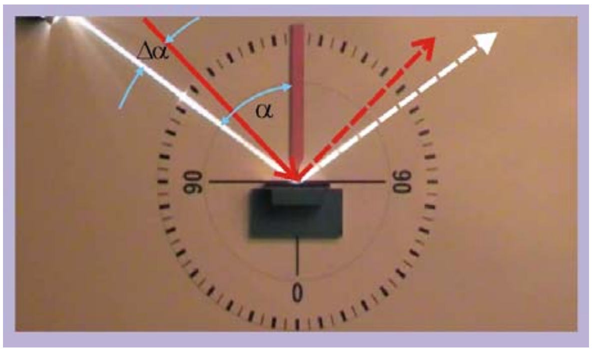


Рис. 19. Изменение угла падения луча

Решение

1. Уменьшение угла падения на $\Delta\alpha$ приведёт к уменьшению на такую же величину и угла отражения светового луча, другими словами:

$$\zeta = \alpha + \beta; \quad \zeta_1 = \alpha_1 + \beta_1;$$

$$\alpha_1 = \alpha - \Delta\alpha; \quad \beta_1 = \beta - \Delta\alpha;$$

$$\zeta_1 = \alpha_1 + \beta_1 = \zeta = 2\Delta\alpha = 20^0;$$

---

20. Угол между падающим и отражённым лучами ζ = 30^0. Каким станет угол отражения β, если угол падения α увеличить на $\Delta\alpha$ = 15^0?

Решение

$$\zeta = \alpha + \beta; \quad \alpha_1 = \alpha + \Delta\alpha; \quad \zeta_1 = (\alpha + \beta) + 2\Delta\alpha; \quad \Rightarrow \quad \beta_1 = \beta + \Delta\alpha = 30^0;$$

---

21. На плоское зеркало mn падает под углом α = 25^o световой луч. На какой угол повернётся отражённый луч, если зеркало повернуть в вертикальной плоскости на угол β = 10^o?

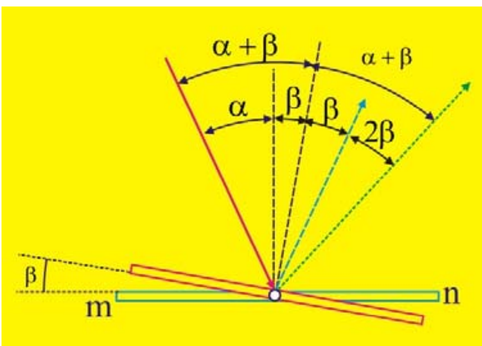


Рис. 21. Поворот зеркала

Решение

1. При повороте в вертикальной плоскости зеркала на угол $\beta = 10^o$, на такой же угол повернётся и перпендикуляр к плоскости зеркала в точке падения луча.

2. Как видно из построения, выполненного на основе закона отражения луча, отражённый луч при повороте зеркала изменит своё направление по сравнению с первоначальным на угол $\gamma = 2\beta = 20^o$.

---

22. Почему стороны лопастей винта самолёта, обращённые к кабине лётчика, окрашивают в чёрный цвет?

Решение

1. Поверхность пропеллера, обращённая к пилоту, окрашивается в чёрный цвет с целью уменьшения отражения от вращающихся поверхностей. Чтобы пропеллер, вращающийся с приличной угловой скоростью (память зрения) не производил впечатления зеркала, отражающего солнечные лучи.

Рис. 22. Кабина самолёта По – 2У

23. В некоторых измерительных приборах шкалы совмещают с плоским зеркалом. В чём преимущество такой шкалы?

Решение

1. Рядом с делениями шкалы помещается дугообразное зеркало, над которым перемещается конец стрелки.

2. Стрелка в данном случае делается ножевидная, конец ее имеет вид ножа, обращенного к наблюдателю ребром. Луч зрения перпендикулярен к шкале, когда конец стрелки сливается со своим изображением в зеркале (перекрывает его). По этому признаку можно найти правильное положение глаза при отсчете и исключить погрешность от параллакса.

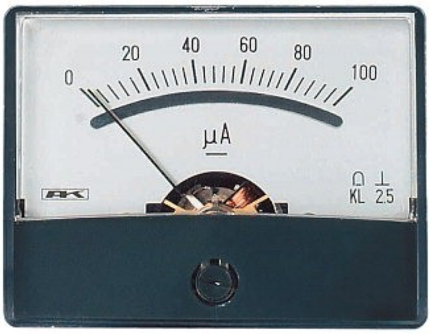


Рис. 23. Зеркальная шкала прибора

24. Почему на поверхности воды образуется лунная дорожка? Почему дорожка всегда направлена к наблюдателю? Может ли возникать дорожка на идеально гладкой водной поверхности?

Решение

1. Если поверхность воды будет идеально гладкой, то наблюдатель будет видеть мнимое изображение лунного диска, т.е. будет иметь место чисто зеркальное отражение.

2. На волнистой водной поверхности наблюдается комбинация зеркального и диффузного отражения, что приводит наблюдению множественного числа мнимых изображений Луны, которые сливаются в дорожку.

3. Лунная дорожка всегда направлена к наблюдателю, потому, что прямые лучи света от Луны падают под острыми углами к поверхности. А угол отражения равен углу падения.

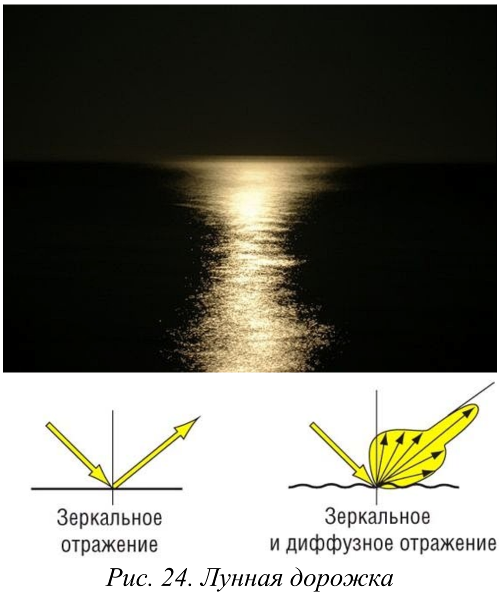


Рис. 24. Лунная дорожка

25. Зеркальное или диффузное отражение будет у световых лучей, падающих на киноэкран?

Решение

1. Все поверхности с позиций отражения можно разделить на зеркально отражающие и диффузно отражающие. Киноэкраны представляют собой шероховатые (по отношению к длинам падающих волн) поверхности, поэтому являются диффузными отражателями. Конструкция и фактура экрана предусматривает создание условий диффузного (одинакового по всем направлениям) отражения. В противном случае, зрители сидящие далеко от центра вооще бы ничего не увидели. Такими неудобствами обладали ранние экраны мониторов.

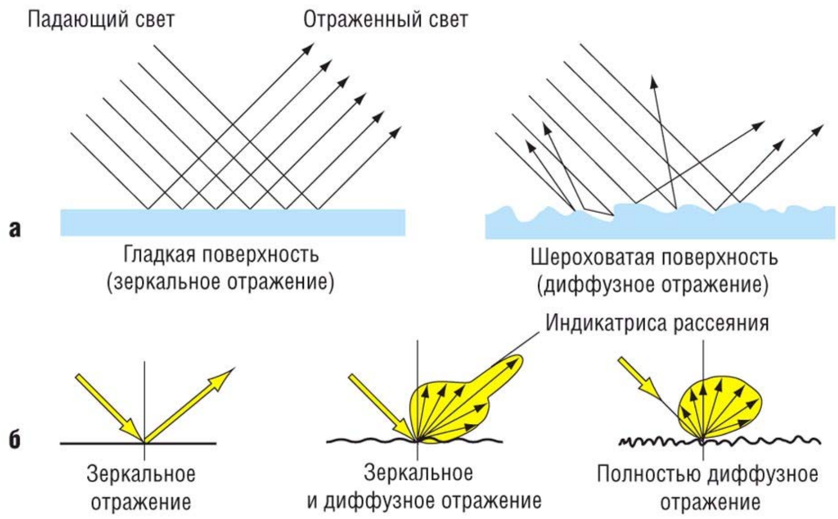


Рис. 25. Отражающие и рассеивающие поверхности

---

26. Согласно принципу Ферма свет всегда распространяется по наикратчайшему пути. Луч света, исходящий из источника S, отражаясь от плоского зеркала MN, приходит в точку S^*. Получить, используя принцип Ферма, закон отражения света.

Решение

1. Принцип Ферма в геометрической оптике (принцип наименьшего времени) является постулатом, предписывающим световому лучу двигаться из начальной в конечную точку за наименьшее время. Т.е. свет выбирает наикратчайший путь из множества возможных, происходит минимизация оптической длины пути.

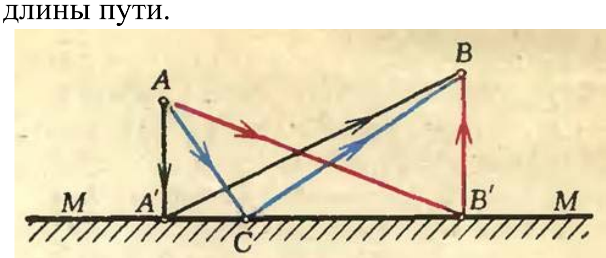


Рис. 26.1. Минимизация пути

2. Пусть ММ – плоское зеркало. В точке А находится источник света. Выясним, по какому пути свет, отразившись от зеркала, приходит из точки А в точку В (рис. 26.1).

3. Покажем некоторые из возможных путей: AA^*– B, ACB, AB^* – B. Таких «маршрутов» для света можно изобразить множество. Они различны по длине, так что на их прохождение требуется различное время. Время

распространения зависит от того, в какую точку зеркала упадет луч и, отразившись, направится в точку B.

4. Из простых геометрических соображений можно выяснить, куда именно должен упасть луч, чтобы время его прохождения по «маршруту» точка A – зеркало – точка B было наименьшим. На рис. 26.2 показан один из возможных путей – ACB.

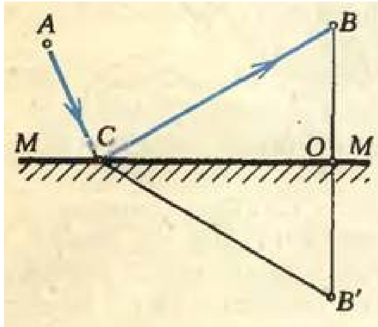


Рис. 26.2. Один из возможных путей распространения

5. Опустим из точки B перпендикуляр на зеркало MM и продолжим его по другую сторону зеркала до точки B^*, отстоящую от зеркала на расстоянии $|OB^*| = |OB|$. Проведем линию CB^*. Получившиеся треугольники COB и COB^* равны друг другу, так как они прямоугольные, сторона OC у них общая и $|OB| = |OB^*|$. Следовательно, $|CB| = |CB^*|$, откуда следует, что длина пути луча ACB равна сумме длин от A до точки C падения луча на зеркало и от этой точки до токи B. Очевидно, что эта сумма будет наименьшей, если точка C будет лежать на прямой, соединяющей точки A и B^* (рис. 26.3).

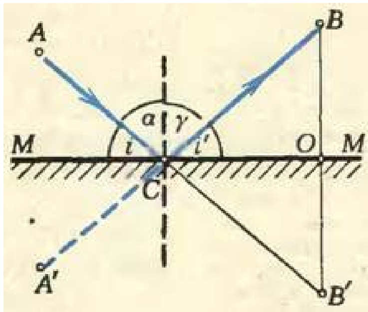


Рис. 26.3. Равенство углов

6. В этом случае сумма длин |AC| и |CB|, то есть длина всего пути света, будет наименьшей, Наименьшим будет и время прохождения светом этого пути.

7. Из построений видно, что ≥ BCO = ≥ B'CO (треугольник BCB^* равнобедренный, поэтому CO – биссектриса угла при вершине), а ≥ B^*CO = ≥ ACM (как вертикальные). Это значит, что углы наклона падающего и отраженного лучей к зеркалу равны друг другу. **В этом и состоит закон отражения света.**

8. Углы в оптике принято отсчитывать не от плоскости зеркала, а от нормали к ней в точке падения. Но ясно, что если равны углы i и i^*, то равны и углы α и γ – закон отражения обычно записывается в виде

$$\angle i = \angle i^*.$$

---

27. На пути лучей, которые сходились бы в некоторой точке S, подставили плоское зеркало. Определить положение точки, в которой сойдутся эти лучи после отражения от зеркала, если расстояние между точкой S и плоскостью зеркала ξ = 0,35 м.

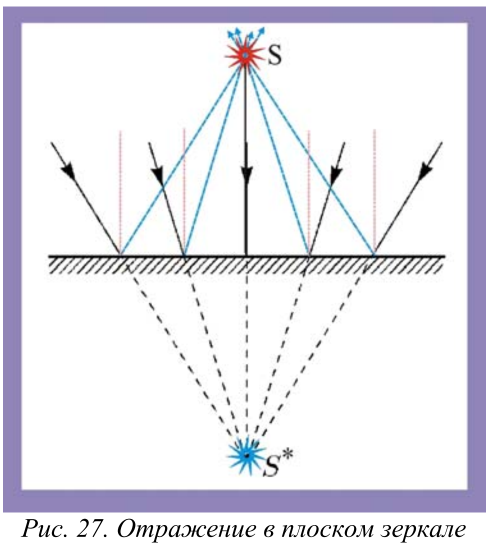


Рис. 27. Отражение в плоском зеркале

Решение

1. При помещении на пути сходящихся лучей плоского зеркала точка S будет представлять собой предмет, а точка S^* мнимое изображение, расположенное симметрично относительно плоскости зеркала. Естественно что расстояния от предмета до зеркала и от зеркала до изображения будут одинаковыми ξ = 0,35 м.

28. Лучи Солнца падают на поверхность земли под углом $\xi = 60^0$. Под каким углом к горизонту нужно расположить плоское зеркало, чтобы лучи, отразившись от зеркала, пошли горизонтально?

Решение

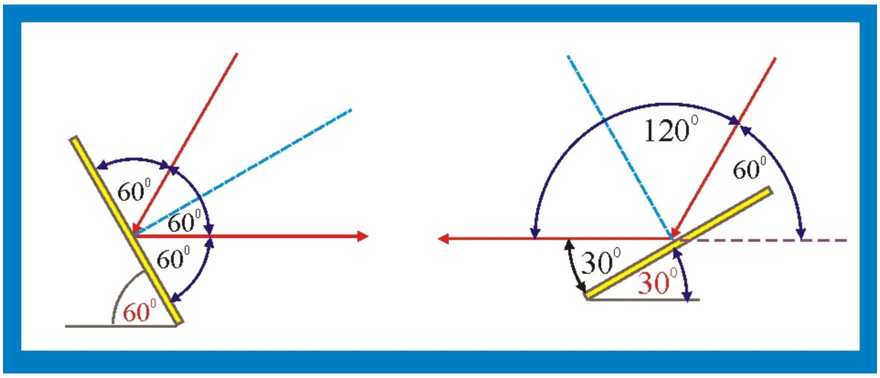


Рис. 28. Поворот лучей зеркалом

---

29. Под каким углом к поверхности парты надо расположить плоское зеркало, чтобы получить изображение лежащей на столе книги в вертикальной плоскости Поверхность парты составляет с горизонтом угол α = 20^o.

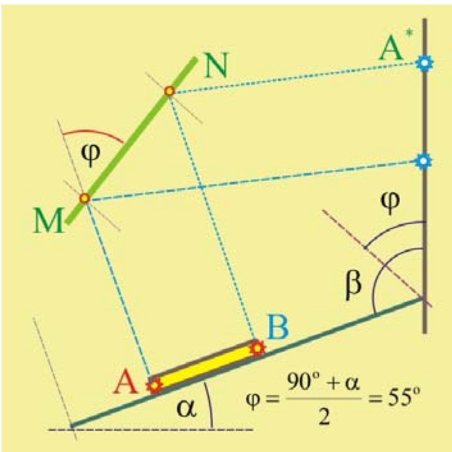


Рис. 29. Изображение книги

Решение

1. Определим угол β между поверхностью парты и вертикальной стеной

$$\beta = 90^o + \alpha = 110^o;$$

2. Проведём биссектрису угла β и получим значение угла φ

$$\varphi = \frac{90^o + 20^o}{2} = 55^o;$$

3. Расположим зеркало MN над книгой AB, так чтобы плоскость зеркала составляла с перпендикуляром, опущенным на поверхность парты, угол $\varphi = 55^o$. Выполним построения.

---

30. Человек, ростом h = 1,75 м находится на расстоянии L= 6 м от вертикального столба высотой H = 7 м. На каком расстоянии от себя человек должен расположить плоское горизонтальное маленькое зеркало, чтобы увидеть в нём отражение верхушки столба?

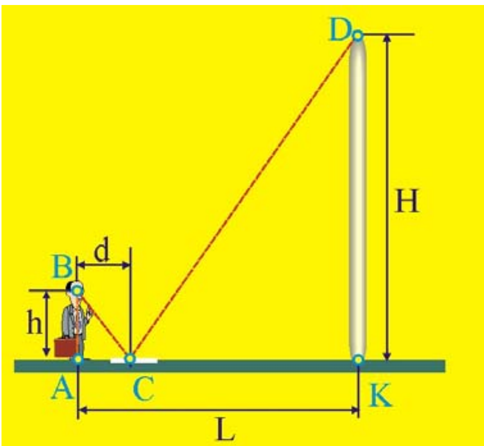


Рис. 30. Верхушка столба

Решение

1. Выделим на поверхности земли точку С, перемещая которую по поверхности объемся выполнения закона отражения между двумя лучами исходя-

щими с вершины столба и из глаза наблюдателя.

2. В результате такого выбора образуются два подобных прямоугольных треугольника

$$\Delta ABC \sim \Delta CDK,$$

$$\frac{h}{d} = \frac{H}{L-d}; \quad \Rightarrow \quad d = \frac{Lh}{h+H} = 1{,}2\,\text{м}.$$

---

31. Человек ростом H = 1,8 м, из фараонов, видит Луну по направлению, составляющему угол α = 60° с горизонтом. На каком расстоянии от себя фараон должен положить на землю плоское зеркало, чтобы в нём узреть отражение Луны.

Решение

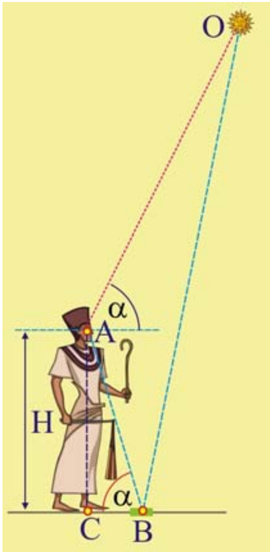


Рис. 31. Отражение Луны в зеркальце

1. Если Луна видна под углом α к горизонту, то для того чтобы одновременно наблюдать её в небе и в зеркале необходимо глаз фараона A соединить с точкой B поверхности земли, лучом, таким образом, чтобы угол с горизонтом тоже был равен α = 60°.

2. Соединив найденную таким образом точку B с положением Луны на небе, мы в соответствие с законом отражения получим место положения зеркальца.

3. Рассматривая далее Δ ABC, у которого известен один катет и угол, можно по определению котангенса записать

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{CB}{AC}; \quad \Rightarrow CB = AC \cdot \mathrm{ctg}\alpha = H \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1{,}8 \cdot \mathrm{ctg}60^{0} \cong 1{,}04\,\text{м}.$$

---

32. Сбоку от зеркала MN стоит человек A. Второй человек B приближается к зеркалу перпендикулярно его поверхности к средней точке. На каком расстоянии от зеркала будет находиться второй человек B в момент, когда оба увидят себя в зеркале, если L = 1 м?

Решение

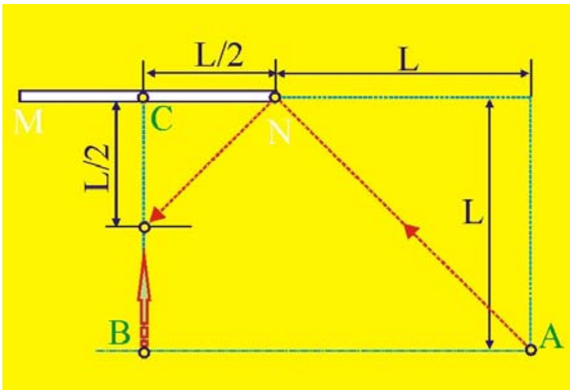


Рис. 32. Отражение людей

1. Отметим, что второй наблюдатель идучи перпендикулярно к середине зеркала всё время будет видеть своё отражение, следовательно вопрос сводится к определению условия при котором первый человек A увидит себя и человека B.

2. Для исполнения закона отражения построим из точки A гипотенузу равнобедренного треугольника, которая будет составлять угол 45° с горизонтом и вертикалью и определим положение её пересечения поверхности зеркала.

3. Далее, используя закон отражения проведём луч до пересечения с линией BC, получив тем самым расстояние L/2, при котором оба человека увидят свои отражения в зеркале.

---

33. В комнате высотой H = 4 м на расстоянии h = 2,5 м от пола висит лампочка. Плоское зеркальце диаметром d = 0,05 м лежит на полу на расстоянии L = 0,5 м от лампочки. Какого максимального диаметра D будет зайчик на потолке? Как изменяется диаметр зайчика от расстояния L?

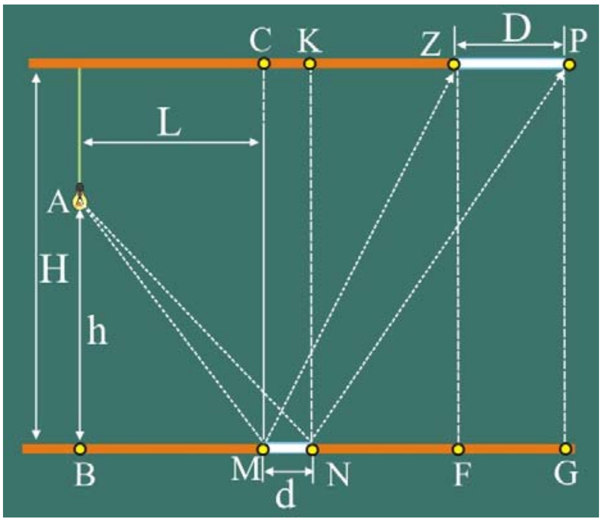


Рис. 33. Зайчик на потолке

Решение

1. Искомый максимальный диаметр светового пятна на потолке определим в виде разности

$$D = KP - KZ;$$

2. Величины KP и KZ найдём из анализа подобных прямоугольных треугольников

$$\Delta ABM \sim \Delta MZF;$$

$$\frac{h}{L} = \frac{H}{MF}; \quad \Rightarrow MF = \frac{LH}{h};$$

$$KZ = MF - d;$$

$$\Delta ABN \sim \Delta NPG;$$

$$\frac{h}{L+d} = \frac{H}{KP}; \quad \Rightarrow \quad KP = \frac{(L+d)H}{h}$$

$$D = \frac{(L+d)H}{h} - \frac{LH}{h} + d = \frac{2dH}{h} = \frac{2 \cdot 0{,}05 \cdot 4}{2{,}5} = 0{,}16 \text{ м};$$

3. Поскольку в расчётное уравнение D параметр L не входит, то от него диаметр пятна на потолке не зависит.

---

34. Какой наименьшей высоты h должно быть вертикальное плоское зеркало, чтобы мадам могла, не изменяя положения головы, видеть в нём себя в полный рост H? На каком расстоянии s от пола должен находиться нижний край зеркала? Зависит ли размер зеркала от расстояния между зеркалом и мадам?

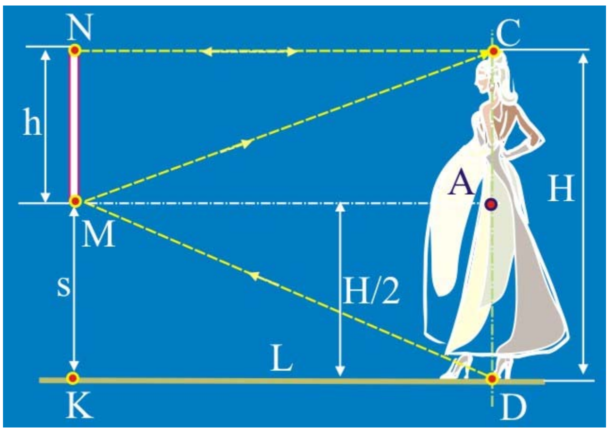


Рис. 34. Отражение мадам в зеркале

Решение

1. Восстановим в произвольной точке K перпендикуляр к горизонтальному полу. Будем считать далее, что вертикальная стена, на которой предполагается поместить зеркало проходит через точки NK.

2. Выделим две крайние точки фигуры мадам C и D, располагающиеся на расстоянии H друг от друга.

3. Верхний край зеркала разместим на одной прямой с точкой C. Луч из C на зеркало перпендикулярен, т.е. отражение точки C в зеркале будет постоянным.

4.Минимальная высота зеркала, обеспечивающая отражение точки D будет иметь место, исходя из закона отражения, при

$$h = \frac{H}{2};$$

5. Из проведенных построений видно, что нижний край зеркала будет находиться от пола на расстоянии

$$s = \frac{H}{2};$$

6. При изменении расстояния L будет изменяться только угол падения и угол отражения, на размер зеркала этот параметр не влияет.

35. В комнате длиной L на стене висит плоское зеркало. На расстоянии x от зеркала стоит человек ростом y. Какова высота зеркала h, если человек видит в зеркале всю противоположную стену высотой H? На каком расстоянии от пола s находится нижний край зеркала?

Решение

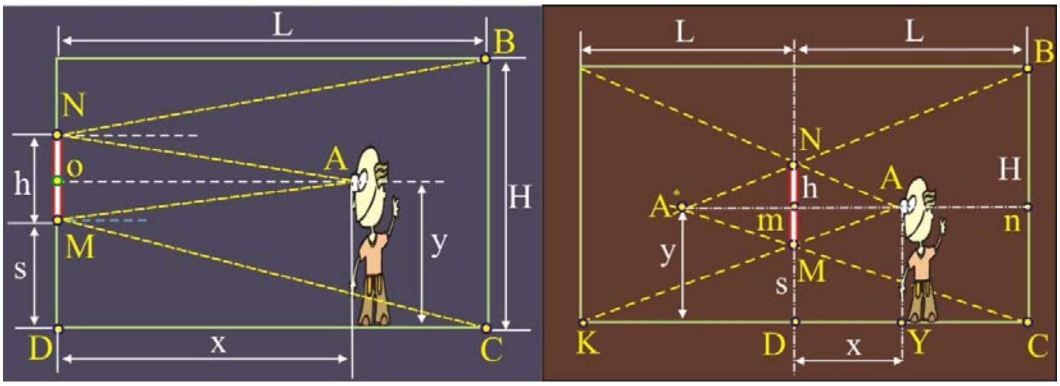


Рис. 35. Изображение противоположной стены

1. Высоту нижнего края зеркала над полом определим из подобия прямоугольных треугольников

$$\Delta KAY \sim \Delta KMD; \;\Rightarrow\; \frac{y}{L+x} = \frac{s}{L}; \quad s = \frac{Ly}{L+x};$$

2. Высота зеркала является основанием равнобедренного треугольника ΔMNA^*, который подобен ΔADC, из чего следует, что

$$\frac{H}{L+x} = \frac{h}{x}; \;\Rightarrow\; h \ge \frac{Hx}{L+x};$$

36. Размеры вертикального заднего окна автомобиля $B \times H = (120 \times 45)$ см^2. Водитель сидит на расстоянии $x = 2$ м от заднего окна. Каковы должны быть минимальные размеры плоского зеркала заднего вида, расположенного на удалении $x_0 = 0{,}5$ м перед водителем, чтобы он имел наилучший обзор дорожной обстановки сзади?

Решение

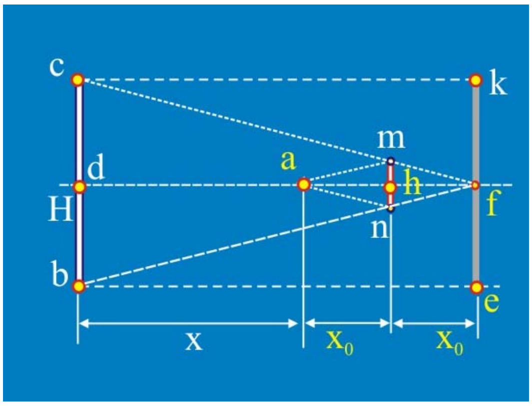


Рис. 36. Автомобильное зеркало

1. Рассмотрим вначале соотношение между вертикальным размером зеркала h и вертикальным размером заднего стекла автомобиля из условия того, что глаз водителя должен видеть отражение нижней и задней кромки стекла.

2. Для определения высоты зеркала h рассмотрим подобие двух треуголь-

ников, образованных лучами в процессе построения отражения точек с и b от кромок зеркала, m и n

$$\Delta bcf \sim \Delta amn,$$

$$\frac{H}{x+2x_0}=\frac{h}{x_0} \quad\Rightarrow\quad h=\frac{Hx_0}{x+2x_0}=\frac{0{,}45\cdot 0{,}5}{2+1}=0{,}075\,\text{м}$$

3. Горизонтальный размер зеркала получается методом таких же построений только в горизонтальной плоскости

$$z=\frac{Bx_0}{x+2x_0}=\frac{1{,}2\cdot 0{,}5}{3}=0{,}2\ \text{м};$$

---

37. Наблюдатель приближается к плоскому зеркалу перпендикулярно его поверхности со скоростью v = 0,5 м/с. С какой скоростью приближается изображение к зеркалу? С какой скоростью изображение приближается к наблюдателю?

Решение

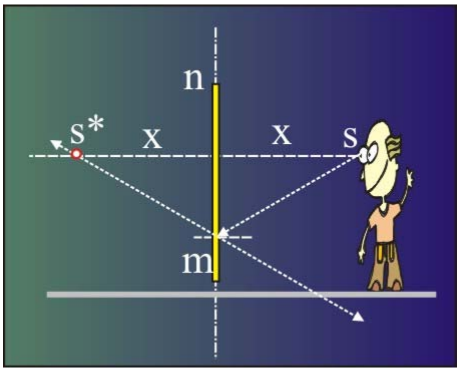


Рис. 37. Перемещение изображения

1. Построим изображение источника s, совместив его с глазом наблюдателя. Один луч направим перпендикулярно зеркалу mn, а второй под произвольным углом. Получим мнимое изображение s^*, расположенное на расстоянии, равном расстоянию от зеркала до источника. Таким образом, изображение находится на расстоянии 2x от наблюдателя.

2. Пусть наблюдатель за время Δt переместится в направлении зеркала на расстояние Δx, скорость при этом определится как

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t};$$

3. Изображение при этом переместится на в два раза большее расстояние

$$v^*=\frac{2\Delta x}{\Delta t}=2v;$$

Другими словами, к зеркалу изображение приближается со скоростью v = 0,5 м/с, а к наблюдателю изображение приближается со скоростью v^* = 1 м/с.

---

38. Точка s движется со скоростью v_1 = 3 м/с, а вертикальное зеркало перемещается с постоянной скоростью v_2 = 2 м/с. С какой скоростью движется изображение точки?

Решение

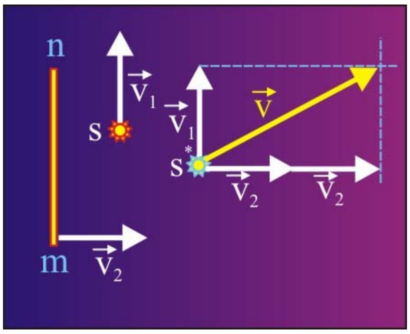


Рис. 38. Скорость изображения

1. Поскольку точка движется параллельно плоскости зеркала, то её изображение при неподвижности зеркала будет перемещаться со скоростью v_1.

2. В соответствие с принципом относительности Галилея движение зеркала со скоростью v_2 будет эквивалентно перемещению точки в перпендикулярном к зеркалу направлении с такой же скоростью, т.е. изображение в гори-

зонтальном направлении будет двигаться с удвоенной скоростью $2v_2$.

3. Модуль вектора результирующей скорости определится в виде геометрической
суммы

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + (2v_2)^2} = \sqrt{9+16} = 5\frac{м}{с};$$

---

39. Отражающая поверхность зеркала составляет с плоскостью стола угол α = 135 °. По направлению к зеркалу по столу катится шар со скоростью v = 2 м/с. В каком направлении и с какой скоростью движется изображение шара?

Решение

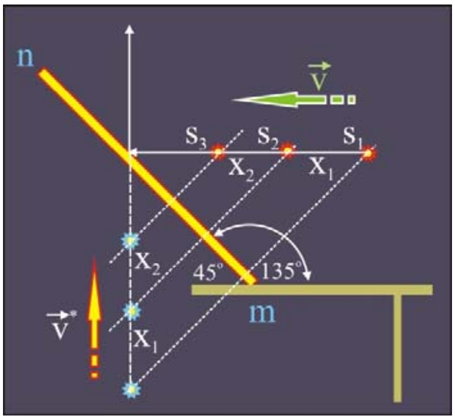


Рис. 39. Скорость изображения

1. Выберем три произвольных положения центра шара s_1, s_2 и s_3, приняв центр шара за светящуюся точку, построим их изображения в наклонённом зеркале.

2. Из построения видно, что за фиксированный промежуток времени Δt центр шара перемещается по горизонтали на расстояние x_1 а изображение этой точки перемещается вертикально на такое же расстояние x_1.

3. Изображение шара, таким образом, будет двигаться вертикально вверх со скоростью центра шара v = 2 м/с.

---

40. На вращающееся с угловой скоростью ω плоское зеркало падает световой луч. Найти угловую скорость Ω отражённого луча.

Решение

1. По определению средняя угловая скорость определяется как

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t};$$

2. Как показано в предыдущей задаче, при повороте зеркала на угол $\Delta\varphi$ отражённый луч повернётся на угол $2\Delta\varphi$, поэтому

$$\Omega = \frac{\Delta\psi}{\Delta t} = \frac{2\Delta\varphi}{\Delta t} = 2\omega;$$

---

41. Плоское зеркало вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей по поверхности зеркала. Определить траекторию изображения токи S, расположенной на расстоянии r от оси вращения зеркала.

Решение

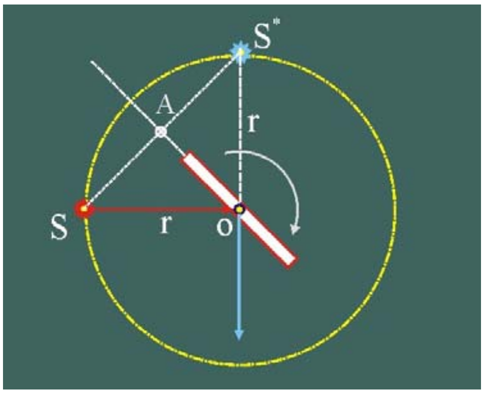


Рис. 41. Вращение зеркала

1. Как видно из построения точки S в зеркале изображение будет находиться на расстоянии r от оси вращения, при этом

$$\angle SOA = \angle S^{*}OA;$$

2. При повороте зеркала на половину оборота изображение точки будет делать полный оборот.

3. Когда зеркало повёрнуто к точке S тыльной стороной, то изображение отсутствует. Таким образом траектория изображения S^* представляет собой окружность радиуса r с центром в точке O.
изменяется с 60^o до 120^o.

---

42. Угол между двумя плоскими зеркалами изменяют, вращая одно зеркало относительно ребра другого с постоянной угловой скоростью ω = 1,5 рад/с. Источник света S расположен на расстоянии h = 10 см от поверхности неподвижного зеркала. Через какое время расстояние между первыми изображениями в зеркалах станет равным x = 10 см, если в начальный момент времени зеркала находились в одной горизонтальной плоскости?

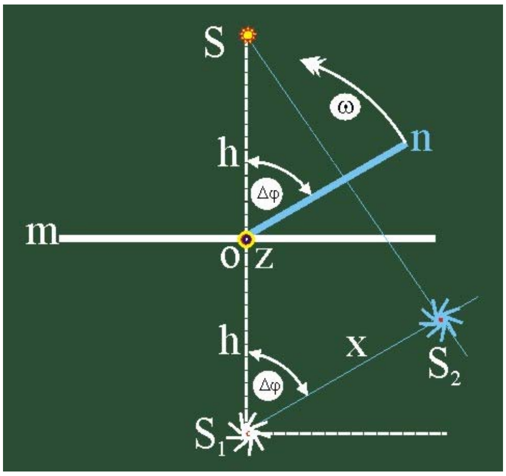


Рис. 42. Поворот одного зеркала

Решение

1. Пусть первоначально зеркала mo и on занимали горизонтальное положение В этом случае, по условию задачи, изображение светящейся точки S_1 лежало на перпендикуляре к плоскости зеркал на удалении 2h от источника.

2. Предположим далее, что зеркало on повернулось относительно вертикали на угол $\Delta\varphi$, при этом, в соответствие с законом отражения изображение в нём светящейся точки займёт положение S_2, причём расстояние между S_1 и S_2, будет равно x. Отметим, что ΔSS_1S_2 является прямоугольным с известной гипотенузой и малым катетом.

3. Среднее значение угловой скорости, как известно, определяется уравнением

$$<\omega>=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}; \quad \Rightarrow \quad \Delta t=\frac{\Delta\varphi}{\omega};$$

4. Решение задачи, таким образом, свелось к определению значения угла $\Delta\varphi$

$$\sin\Delta\varphi=\frac{x}{2h}; \quad \Rightarrow \quad \Delta t=\frac{\arcsin\left(\frac{x}{2h}\right)}{\omega}=\frac{\arcsin 0{,}5}{1{,}5}=20\,c;$$

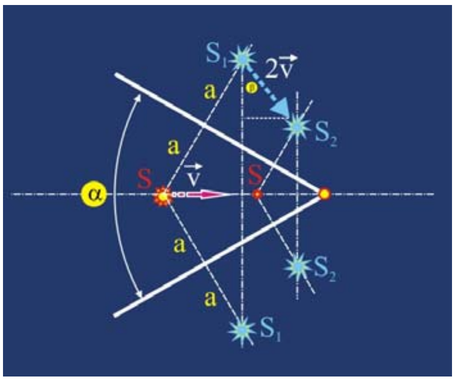


Рис. 15.44. Движущийся источник

43. Два плоских зеркала образуют двухгранный угол α = 60°. В плоскости, делящей угол пополам, находится точечный источник света S. С какой скоростью u, с какой скоростью будут сближаться первые изображения источника в зеркалах, если он начнёт двигаться к линии пересечения зеркал со скоростью v

Решение

1. При движении точечного источника со скоростью v, его изображение будет перемещаться со скоростью 2v.

2. Скорость сближения изображений определится с виде проекции

$$u = 2v\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2v\sin 60^o = 2v\frac{\sqrt{3}}{2} \cong 1{,}7v;$$

---

44. Два источника света S_1и S_2 расположены на расстоянии x = 105 см. Два плоских зеркала – одно на расстоянии a_1 = 60 см от источника S_1, другое – на расстоянии a_2 = 37,5 см от источника S_2 – расположены так, что изображение источников S_3 и S_4, соответственно, совпадают. Определить угол между зеркалами.

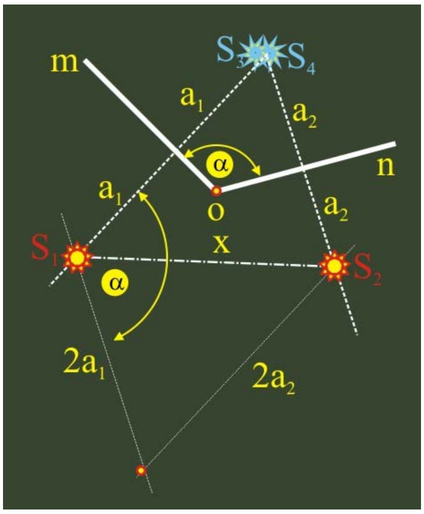


Рис. 44. Угол между зеркалами

Решение

1. Выбираем произвольное положение источников S_1 и S_2 на расстоянии x друг от друга.

2. Строим два луча, пересекающихся в некоторой точке, где по условию задачи совмещены два первых изображения S_3 и S_4.

3. Отрезки S_1S_3 и S_2S_4 делим напополам и опускаем в эти точки перпендикуляры m и n.

4. Пересечение этих перпендикуляров в точке O соответствует общей линии зеркал.

5. Таким образом, на основании закона отражения построен $\Delta S_1S_2S_3$, отображающий положение двух точечных источников и их совмещённых изображений, в соответствие с условием задачи.

6. Достроим треугольник до параллелограмма, для диагонали x которого можно записать следующее уравнение

$$x^2 = (2a_1)^2 + 2(2a_1)(2a_2)\cos\alpha + (2a_2)^2;$$

$$\cos\alpha = \frac{x^2 - 4a_2^2 - 4a_1^2}{8a_1a_2}; \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos\frac{x^2 - 4a_1^2 - 4a_2^2}{8a_1a_2};$$

$$\alpha = \arccos\frac{105^2 - (4\cdot 60)^2 - (4\cdot 37{,}5)^2}{8\cdot 60\cdot 37{,}5} \cong \arccos(-0{,}5) \cong 120^0;$$

его попадание в точку B.

---

45. Во многих измерительных приборах роль стрелки играет световой луч, отражённый от плоского зеркала. На какой угол повернулось зеркальце прибора, если отражённый луч, перпендикулярный шкале, передвинулся по ней на расстояние Δx = 32 мм? Расстояние от шкалы до зеркальца r = 2 м.

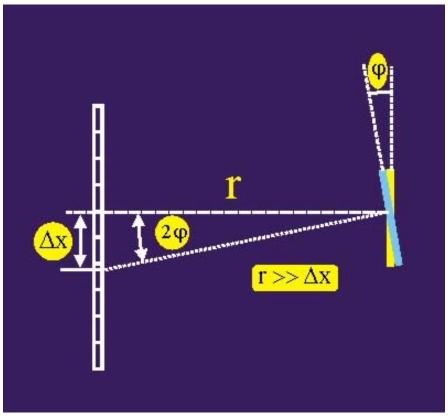


Рис. 15.35. Зеркальный измеритель

Решение

1. При повороте плоского зеркальца на угол φ, изображение светящейся точки по-

вернётся на угол 2φ.

2. Ввиду того, что r >> x дуговой размер можно приближённо считать линейным и определить угол следующим образом:

$$2\varphi = \frac{\Delta x}{r},$$

откуда следует, что

$$\varphi = \frac{\Delta x}{2r} = \frac{0{,}032}{4} = 8 \cdot 10^{-3}\,\text{рад}\,(\cong 0{,}46^{\circ});$$

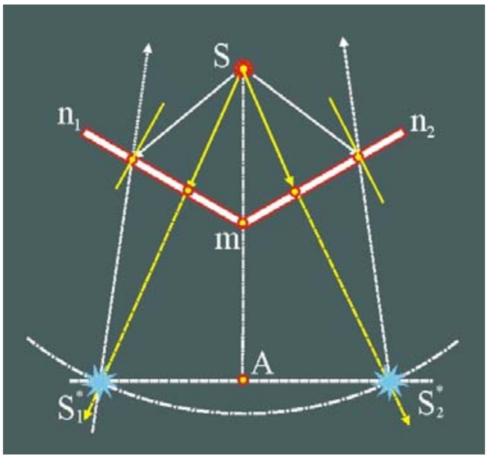


Рис. 46. Отражение от двух зеркал

46. Доказать, что точечный источник света и два его изображения, полученные с помощью двух зеркал, расположенных под углом друг к другу, лежат на одной окружности. Найти положение центра окружности.

Решение

1. Если построить изображение светящейся точки в двух, расположенных в одной плоскости под углом зеркал, то изображения S_1^* и S_2^* будут симметричны относительно перпендикуляра SA, опущенного из светящейся точки на линию $S_1^*S_2^*$, соединяющую изображения.

2. Так как расстояния от светящейся точки до изображений SS_1^* и SS_2^* будут одинаковыми, то можно утверждать, что изображения лежат на окружности, центр, которой, в рассматриваемом случае, совпадает с положением светящейся точки. При изменении угла между зеркалами центр окружности будет перемещаться по линии SA.

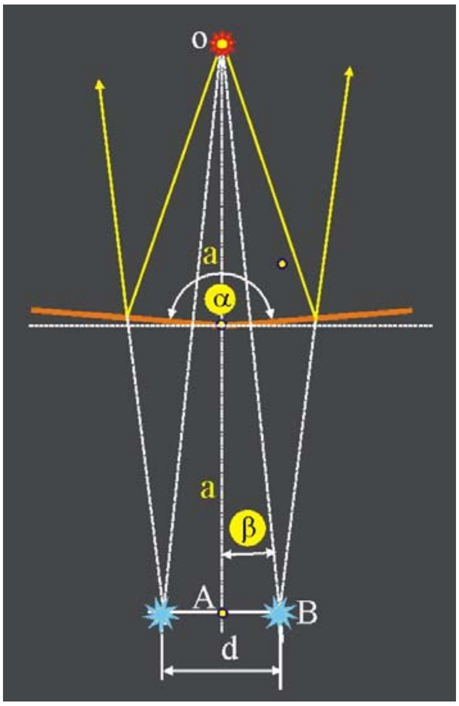


Рис. 47. Бизеркала Френеля

47. Два плоских зеркала образуют двухгранный угол с раскрытием α = 179°. На расстоянии a = 0,1 м от линии соприкосновения зеркал и на одинаковом расстоянии от их поверхности находится точечный источник света (рис. 15.35). Найти расстояние между мнимыми изображениями источника в зеркалах (бизеркала Френеля).

Решение

1. Выразим из треугольника OAB половину искомого расстояния d через тангенс угла β

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{0{,}5d}{2a}; \quad \beta = \frac{2\pi - \alpha}{2};$$

$$d = 4a \cdot \mathrm{tg}\left(\frac{2\pi - \alpha}{2}\right) \cong 0{,}035\,\text{м};$$

---

48. Определить угол между двумя плоскими зеркалами, расположенными в одной плоскости, если точечный источник света и два его изображения находятся в вершинах равностороннего треугольника.

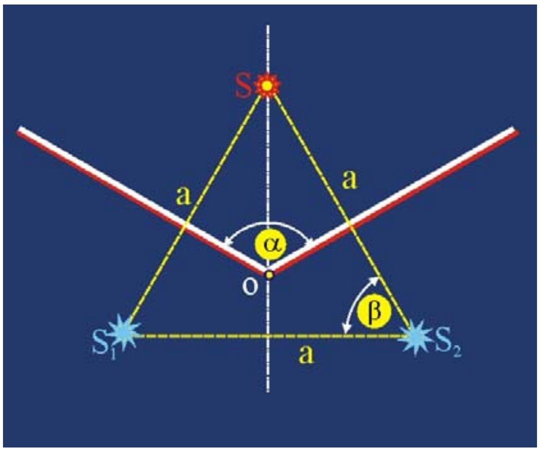


Рис. 48. Равносторонний треугольник

Решение

1. Треугольник SS_1S_2 может быть равносторонним только при условии

$$\beta = 60^\circ .$$

2. Для угла между плоскостями зеркал α в этом случае можно записать условие

$$\alpha = \pi - \beta = 120^\circ .$$

---

49. Два плоских зеркала расположены под некоторым углом α друг к другу. Между зеркалами помещён точечный источник света. Первое изображение находится в первом зеркале на расстоянии a_1 = 6 см, а во втором – на расстоянии a_2 = 8 см от источника. Расстояние между данными изображениями x = 10 см. Найти угол между зеркалами.

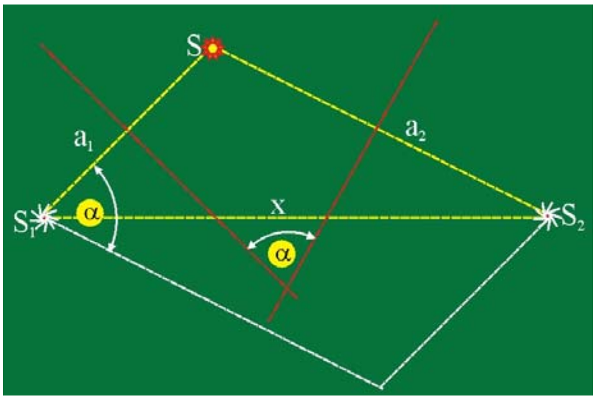


Рис. 49. Изображение в двух зеркалах

Решение

1. По заданным условиям построим треугольник SS_1S_2 со сторонами a_1, a_2, x.

2. Построим на базе этого треугольника параллелограмм с диагональю x.

3. Поскольку лучи SS_1 и SS_2 по закону отражения должны быть перпендикулярны поверхности предполагаемых зеркал и делится зеркалами пополам, то задача сводится к определению угла α, между сторонами параллелограмма

$$x^2 = a_1^2 + 2a_1a_2\cos\alpha + a_2^2; \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{x^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2};$$

$$\alpha = \arccos\frac{x^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2} = \arccos\frac{100 - 36 - 64}{96} = \arccos 0 = \frac{\pi}{2} \equiv 90^\circ ;$$

---

50. Два плоских зеркала образуют двугранный угол α = 120°. В плоскости, делящей этот угол напополам, расположен точечный источник света S. Расстояние между первыми изображениями источника равно H. Чему будет равно расстояние между изображениями, если двугранный угол уменьшить в два раза?

Решение

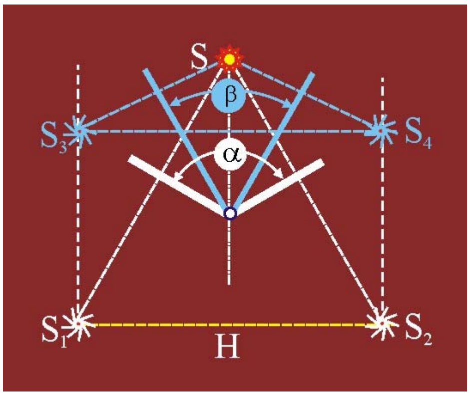


Рис. 50. Изменение угла α

1. При $\alpha = 120^o$ треугольник ΔSS_1S_2, образованный источником и его изображениями в зеркалах, как было показано в задаче 15.38, является равносторонним, со сторонами равными H.

2. При уменьшении угла между зеркалами $\beta = 60^o$ треугольник ΔSS_3S_4, образований источником и новыми его изображениями трансформируется в равнобедренный, с основанием $S_3S_4 = H$, угол между падающими на зеркала лучами изменяется с 60^o до 120^o.

---

51. Угол между двумя плоскими зеркалами изменяют, вращая одно зеркало относительно ребра другого с постоянной угловой скоростью ω = 1,5 рад/с. Источник света S расположен на расстоянии h = 10 см от поверхности неподвижного зеркала. Через какое время расстояние между первыми изображениями в зеркалах станет равным x = 10 см, если в начальный момент времени зеркала находились в одной горизонтальной плоскости?

Решение

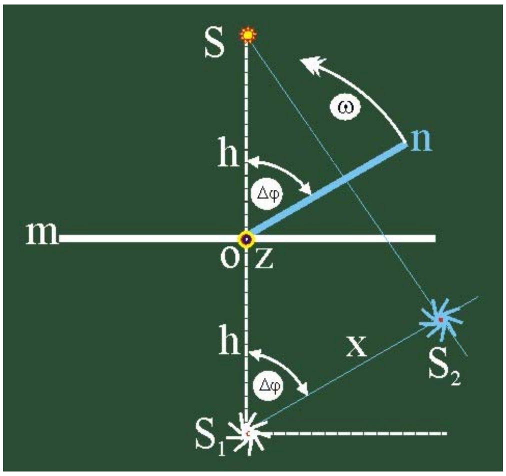


Рис. 51. Поворот одного зеркала

1. Пусть первоначально зеркала mo и on занимали горизонтальное положение В этом случае, по условию задачи, изображение светящейся точки S_1 лежало на перпендикуляре к плоскости зеркал на удалении 2h от источника.

2. Предположим далее, что зеркало on повернулось относительно вертикали на угол Δφ, при этом, в соответствие с законом отражения изображение в нём светящейся точки займёт положение S_2, причём расстояние между S_1 и S_2, будет равно x. Отметим, что ΔSS_1S_2 является прямоугольным с известной гипотенузой и малым катетом.

3. Среднее значение угловой скорости, как известно, определяется уравнением

$$<\omega> = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}; \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega};$$

4. Решение задачи, таким образом, свелось к определению значения угла Δφ

$$\sin\Delta\varphi = \frac{x}{2h}; \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\arcsin\left(\frac{x}{2h}\right)}{\omega} = \frac{\arcsin 0{,}5}{1{,}5} = 20\,c;$$

---

52. Посередине между двумя плоскими параллельными зеркалами расположена светящаяся точка. С какой скоростью нужно перемещать друг относительно друга зеркала параллельно друг другу, чтобы первые изображения источника света сближались со скоростью v = 5 м/с?

Решение

1. Как было показано ранее скорость изображения в два раза по модулю больше относительной скорости перемещения источника и зеркала.

2. Поскольку зеркал два, то изображения будут сближаться со скоростью в четыре раза большей, чем относительная скорость зеркал, т.е. чтобы выполнить заданное условие, относительная скорость зеркал должна быть равна

$$u = \frac{v}{4} = 1{,}25\,\frac{м}{с};$$

---

53. Светящаяся точка S движется между двумя плоскими зеркалами, образующими двугранный прямой угол. Чему равна относительная скорость перемещения первых изображений через три секунды после начала движения при горизонтальной скорости движения источника v = 1,5 см/с? Чему равно расстояние между изображениями через τ = 3 с после начала движения? Начальное положение светящейся точки характеризуется координатами x_0 = 1,5 см, y_0 = 2,5 см.

Решение

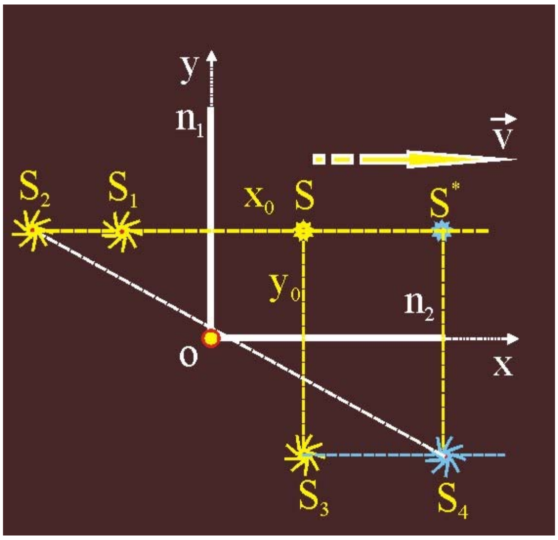


Рис. 53. Движение светящейся точки

1. Движение источника S относительно вертикального зеркала on_1 происходит перпендикулярно его плоскости, поэтому во время всего движения изображение будет удаляться по этому перпендикуляру со скоростью 2v.

2. Изображение в горизонтальном зеркале on_2 находясь от оси x на расстоянии y_0 будет перемещаться вправо со скоростью v. Таким образом, относительная скорость изображений будет равна

$$v_r = 2v = 3\,\frac{см}{с};$$

3. Искомое расстояние между изображениями S_2S_4 можно определить из прямоугольного треугольника $\Delta S_2S^*S_4$

$$(S_2S_4)^2 = (2y_0)^2 + [2(x_0 + v\tau)]^2; \quad \Rightarrow \quad S_2S_4 = 2\sqrt{y_0^2 = (x_0 + v\tau)^2} = 13\,см\,.$$

---

54. Два плоских зеркала образуют двухгранный угол α = 60°. В плоскости, делящей угол пополам, находится точечный источник света S. С какой скоростью u, с какой скоростью будут сближаться первые изображения источника в зеркалах, если он начнёт двигаться к линии пересечения зеркал со скоростью v

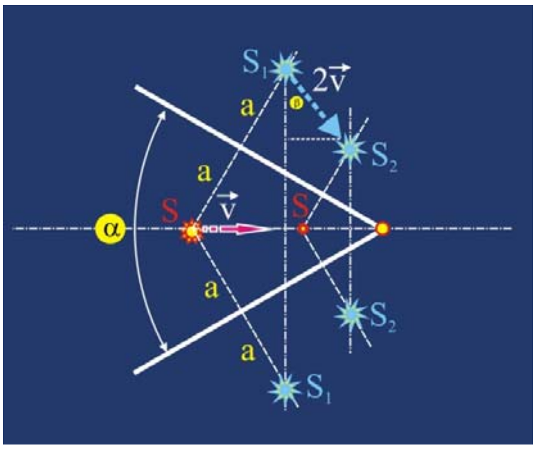


Рис. 54. Движущийся источник

Решение

1. При движении точечного источника со скоростью v, его изображение будет перемещаться со скоростью 2v.

2. Скорость сближения изображений определится с виде проекции

$$u = 2v\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2v\sin 60^{\circ} = 2v\frac{\sqrt{3}}{2} \cong 1{,}7v;$$

---

55. Два источника света S_1 и S_2 расположены на расстоянии x = 105 см. Два плоских зеркала – одно на расстоянии a_1 = 60 см от источника S_1, другое – на расстоянии a_2 = 37,5 см от источника S_2 – расположены так, что изображение источников S_3 и S_4, соответственно, совпадают. Определить угол между зеркалами.

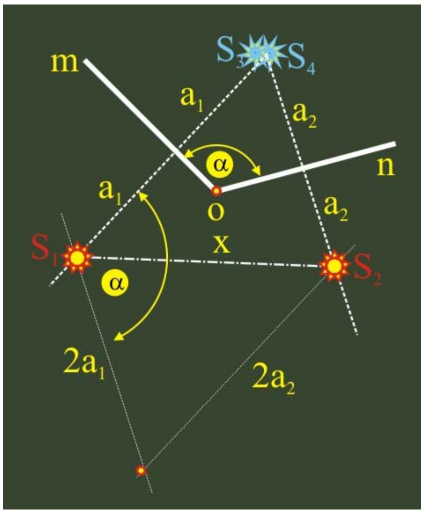


Рис.55. Угол между зеркалами

Решение

1. Выбираем произвольное положение источников S_1 и S_2 на расстоянии x друг от друга.

2. Строим два луча, пересекающихся в некоторой точке, где по условию задачи совмещены два первых изображения S_3 и S_4.

3. Отрезки S_1S_3 и S_2S_4 делим наполопам и опускаем в эти точки перпендикуляры m и n.

4. Пересечение этих перпендикуляров в точке O соответствует общей линии зеркал.

5. Таким образом, на основании закона отражения построен $\Delta S_1S_2S_3$, отображающий положение двух точечных источников и их совмещённых изображений, в соответствие с условием задачи.

6. Достроим треугольник до параллелограмма, для диагонали x которого можно записать следующее уравнение

$$x^2 = (2a_1)^2 + 2(2a_1)(2a_2)\cos\alpha + (2a_2)^2;$$

$$\cos\alpha = \frac{x^2 - 4a_2^2 - 4a_1^2}{8a_1a_2}; \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos\frac{x^2 - 4a_1^2 - 4a_2^2}{8a_1a_2};$$

$$\alpha = \arccos\frac{105^2 - (4\cdot 60)^2 - (4\cdot 37{,}5)^2}{8\cdot 60\cdot 37{,}5} \cong \arccos(-0{,}5) \cong 120^{0};$$

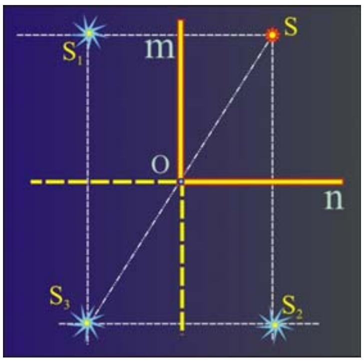


Рис. 56. Три изображения

56. Точечный источник света находится между двумя зеркалами, образующими двугранный прямой угол. Сколько изображений источника дают эти зеркала и где эти изображения расположены?

Решение

1. От точечного источника S в зеркалах m и n образуются два симметричных изображения S_1 и S_2.

2. Часть лучей, отразившихся вначале от зерка-

ла m, отражаются затем от зеркала n, т.е. образуют в точке S_3 ещё одно изображение. Таким образом, нормально расположенные друг к другу зеркала дадут три мнимых изображения одной светящейся точки.

3. Полученный результат можно обобщить уравнением, обозначив через α угол между зеркалами, а через n число возможных мнимых изображений:

$$\alpha = \frac{360^0}{n+1}; \quad \Rightarrow \quad n = \frac{360^o}{90^o} - 1 = 3;$$

---

57. Геометрически найти область изображений световой точки, находящейся посередине двух зеркал m и n, расположенных пол углом α = 60^o.

Решение

1. От центральной линии, соответствующей местоположению источника по условию задачи, на поверхность зеркал опускаем серию перпендикуляров.

2. Располагаем симметрично относительно линии зеркал изображения.

3. Соединяем изображения S_1S_3 и продолжаем лучи до пресечения с осью, проходящей через общий центр зеркал.

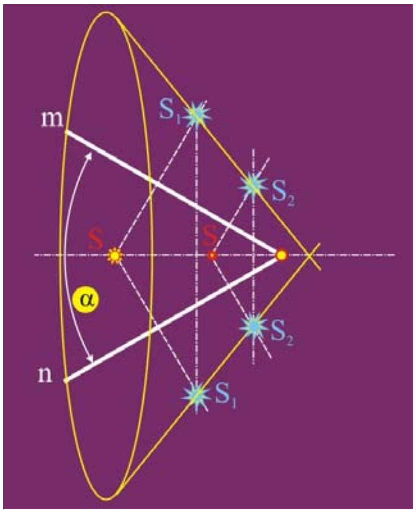


Рис. 57. Область изображений

4. Таким образом получается конус с углом раскрытия β = 120^o внутри которого возможно расположение изображений при различных положениях точеного источника света относительно зеркал.

---

58. Сколько мнимых изображений точечного источника света S возникнет в двух зеркалах, пересекающихся под углом α = 45^o, если источник располагается на биссектрисе двугранного угла, образованного зеркалами?

Решение

1. Зеркала, расположенные под углом α = 45^o друг другу дадут, в соответствие с уравнением, полученным в предыдущей задаче n мнимых изображений

$$n = \frac{360^o}{\alpha} - 1 = 8 - 1 = 7;$$

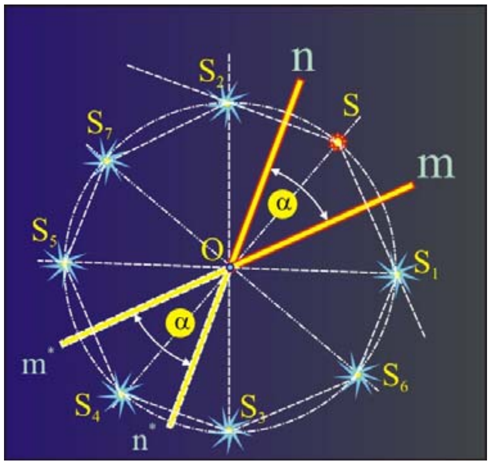


Рис. 58. Пять мнимых изображений

---

59. Точечный источник света находится между двумя плоскими зеркалами, образующими двухгранный угол φ, на одинаковом расстоянии от каждого из них. Чему равен угол между зеркалами, если получается n_1 = 5 мнимых изображений, n_2 = 9 мнимых изображений?

Решение

1. Для определения значений двугранных углов между зеркалами воспользуемся полученными выше уравнениями

$$\varphi_1 = \frac{360^0}{n_2+1} = \frac{360^o}{6} = 60^o;$$

$$\varphi_2 = \frac{360^0}{n_2+1} = \frac{360^o}{10} = 36^o;$$

---

59. Два зеркала образуют двугранный угол $\alpha \le \pi/2$. На одно из них падает луч, лежащий в плоскости, перпендикулярной ребру угла. Найти угол отклонения этого луча от первоначального направления после отражения от обоих зеркал.

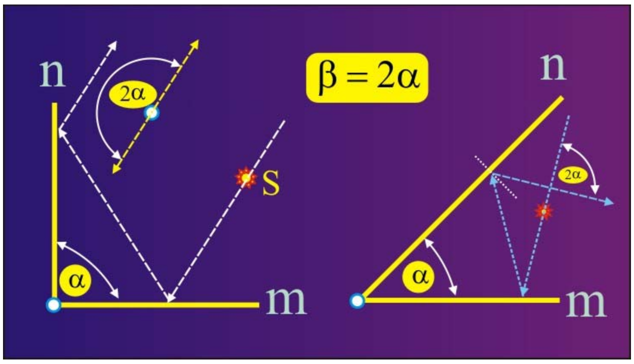


Рис. 59. Направление отраженного луча

Решение

1. Рассмотрим вначале простейший случай, когда $\alpha = 90^o$ и луч падает на зеркало m под углом $i = 45^0$ (левый фрагмент рис. 15 50). Выполненные в соответствие с законом отражения построения показывают, что угол между первоначальным направлением луча и его направлением после отражения от второго зеркала n равен удвоенному углу между зеркалами, т.е. $\beta = 2\alpha = 180^o$.

2. Выберем $\alpha = 45^o$ и произвольное значение угла падения луча на зеркало m. Выполненные построения (правый фрагмент рис. 15.50) показывают, что как и в первом случае, $\beta = 2\alpha = 90^o$.

---

60. Луч последовательно отражается от двух плоских зеркал, причём луч, падающий на первое зеркало, параллелен плоскости второго зеркала, а дважды отражённый луч параллелен плоскости первого зеркала. Чему равен угол между зеркалами?

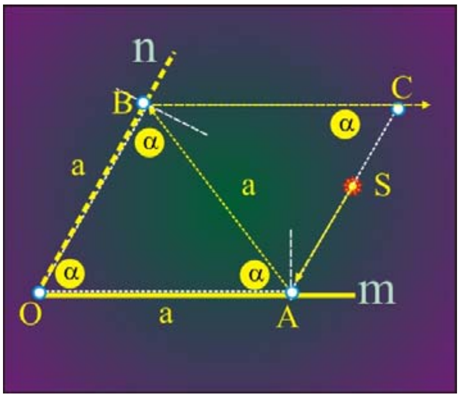


Рис. 60. Параллельное отражение

Решение

1. Расположим зеркало om горизонтально. Направим от источника света луч в точку А, параллельно этому лучу проведём плоскость, совпадающую с плоскостью второго зеркала on

2. Построим из точки А отражённый луч до пересечения с плоскостью второго зеркала on, определим точку В.

3. Отразившийся от второго зеркала on луч должет по условию задачи быть горизонтальным, т.е. параллельным плоскости первого зеркала om. Это возможно при угле раскрыва зеркал $\alpha = 60^o$, в этом случае треугольник ОАВ будет равносторонним с равными углами.

---

61. Как нужно расположить два плоских зеркала относительно друг друга, чтобы при любом угле падения падающий луч и дважды отражённый в зеркалах луч были параллельны?

Решение

1. Расположим одно из зеркал, например om горизонтально.

2. Направим на это зеркало из точки S луч под произвольным углом, отразим этот луч в соответствие с законом отражения.

3. Очевидно, что второе зеркало on для выполнения условия параллельности отражённого от него луча z и падающего на первое зеркало луча f должно быть перпендикулярно первому зеркалу, т.е. $\alpha = 90^o$.

4. Если угол между зеркалами сделать $\alpha > \pi/2$, или $\alpha < \pi/2$, то лучи k и q не будут параллельны исходному лучу f.

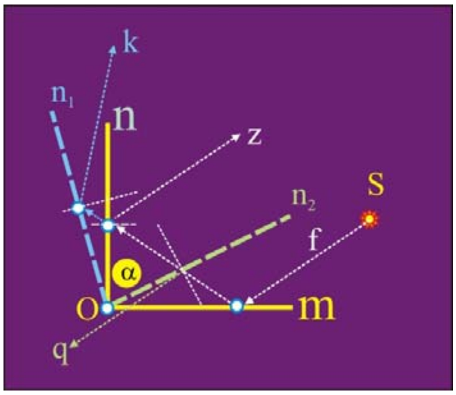


Рис. 61. Параллельные лучи

---

62. Два небольших плоских зеркала расположены на одинаковых расстояниях друг от друга и от источника света. Каким должен быть угол между зеркалами, если луч после двух отражений снова направится к источнику?

Решение

1. Одинаковость расстояний между источником света и зеркалами предполагает, что точка, откуда исходит свет и две точки, принадлежащие зеркалам, образуют равносторонний треугольник OAB, у которого все углы равны $\alpha = 60^o$.

2. Чтобы луч попал в точку S зеркала нужно расположить пол углом 60^o.

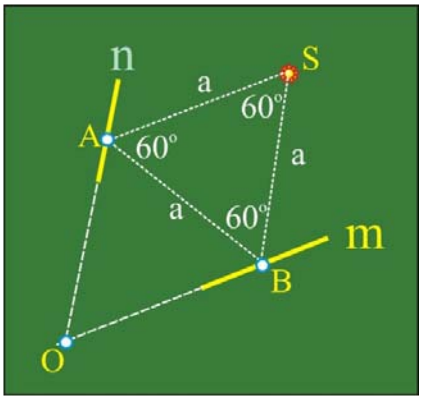


Рис. 62. Возвращение луча

---

63. Построить луч, который, выйдя из точки A, после последовательных отражений в двух взаимно перпендикулярных зеркалах, придёт в точку B.

Решение

1. Соединяем заданные точки A и B.

2. Строим изображение точки A в зеркале m, получаем точку C.

3. Из точки C проводим прямую, параллельную линии BA, получаем на поверхности зеркал точки L и K.

4. Проводя построения в соответствие с законом отражения убеждаемся, что луч исходящий их точки A после двойного отражения от взаимно перпендикулярных зеркал приходит в точку B, образуя мнимое изображение D на прямой CD.

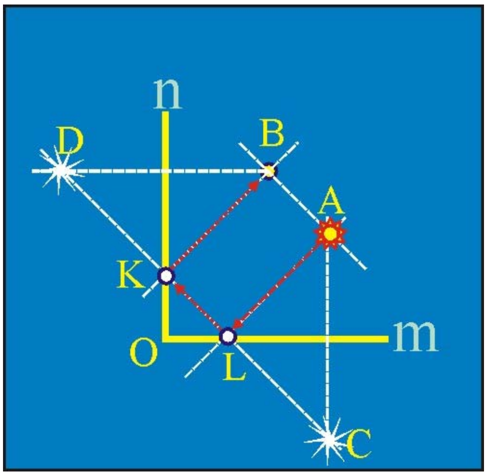


Рис. 63. Заданное положение

---

64. В системе трёх зеркал расположенных в форма буквы П задано положение точечного источника света и трёх точек на поверхности зеркал. Построить луч, который после последовательного отражения в зеркалах в точках 1,2,3 вернётся снова в точку А, из которой он вышел.

Решение

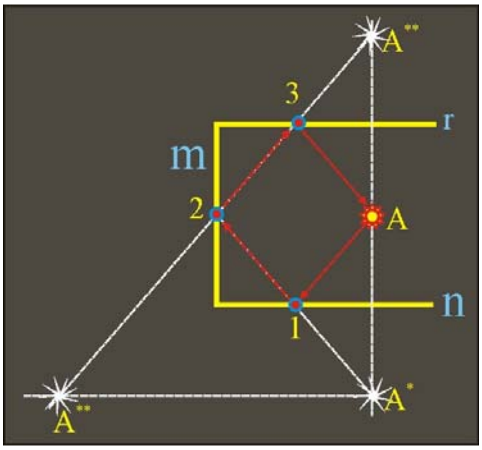


Рис. 64. Три зеркала

1. Соединим заданные точки линиями. Прямая А1 параллельна прямой 23, а прямая А3 параллельна прямой 12.

2. Построим изображения A^* и A^{**} светящейся точки А в зеркалах n и r.

3. Точки 2,3 и A^{**} лежат на одной прямой. Продолжим эту прямую и найдём точку её пересечения с прямой параллельной зеркалу n, получим точку A^{**}, которая будет изображением светящейся точки в зеркале m.

4. Таким образом, исходный луч при своих последовательных отражениях образует параллелограмм, в данном случае – ромб.

---

65. Построить ход луча, который, выйдя из точки А, находящейся внутри зеркального ящика, попадёт в тоску В, отразившись последовательно от каждого из четырёх зеркал.

Решение

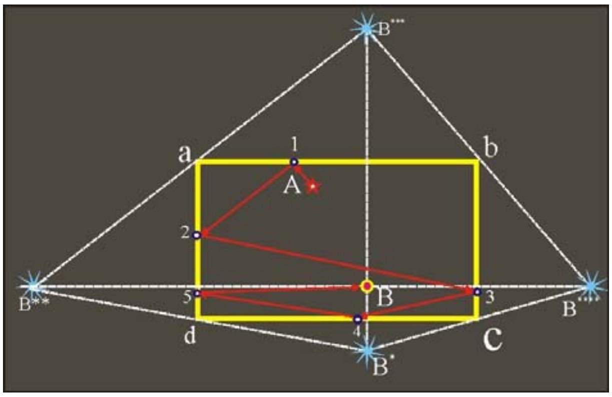


Рис. 65. Зеркальный ящик

1. Строим изображения точки В во всех четырёх зеркалах, получаем пирамиду $B^*B^{**}B^{***}B^{****}$.

2. Из точки А строим лучи параллельные линиям, соединяющим соответствующие изображения точки В в зеркалах, используя закон отражения получаем последовательные отражения луча в точках 1, 2, 3, 4, 5, которые в конечном счёте, обеспечат его попадание в точку В.

---

3. Сферическое зеркало

66. Показать на примерах методику построения изображений в криволинейных зеркалах.

Решение

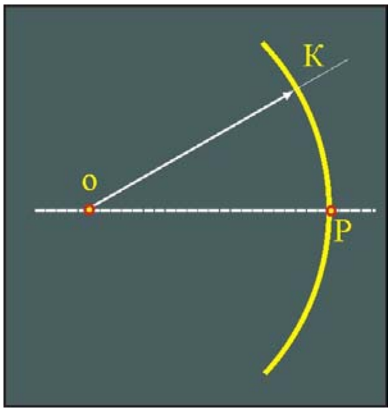


Рис. 66.1. Схема зеркала

1. Сферическое зеркало представляет собой отражающую поверхность, имеющую форму сферического сегмента. Если световые лучи отражаются от внутренней поверхности сегмента, то зеркало является **вогнутым**, если – от внешней поверхности, то зеркала, то оно называется **выпуклым**.

2. Центр сферы на базе которой построен сегмент называется **оптическим центром** зеркала. На рис. 66.1 оптическим центром является точка О.

3. Вершина сферического сегмента (точка Р) называется **полюсом** зеркала.

4. Прямая (любая), проходящая через оптический центр называется **оптической осью** зеркала.

5. Прямая, проходящая через оптический центр (ОР) **называется главной оптической осью** зеркала. Эта ось от прочих побочных отличается только тем, что располагается симметрично относительно краёв зеркала.

6. При выполнении построений в сферических зеркалах, как правило, рассматриваются параксиальные (приосевые) световые пучки, пучки образованные лучами, проходящими на относительно малых расстояниях от главной оптической оси, т.е. характеризующиеся малыми углами с главной оптической осью.

7. При падении на вогнутое зеркало параллельного пучка световых лучей, параллельных главной оптической оси, после отражения от поверхности зеркала они все собираются в точке F, именуемой **главным фокусом** зеркала. Расстояние от полюса зеркала до главного фокуса называется фокусным расстоянием F, которое определяется как:

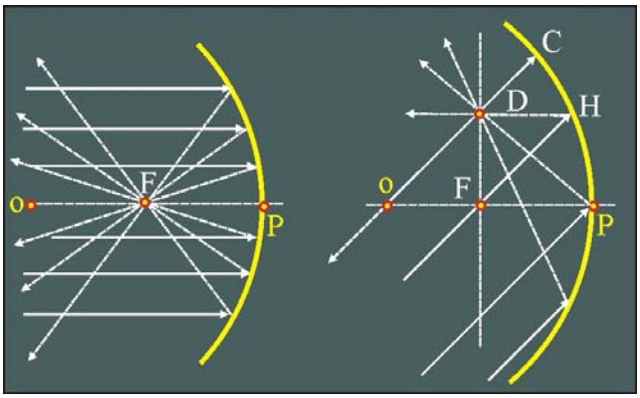


Рис. 66.2. Параллельный световой пучок

$$F = \frac{R}{2};$$

8. Если световые лучи не параллельны главной оптической оси, они пересекутся в точке D, лежащей в фокальной плоскости, причём луч, проходящий через точку фокуса, отразившись, будет параллелен главной оптической оси.

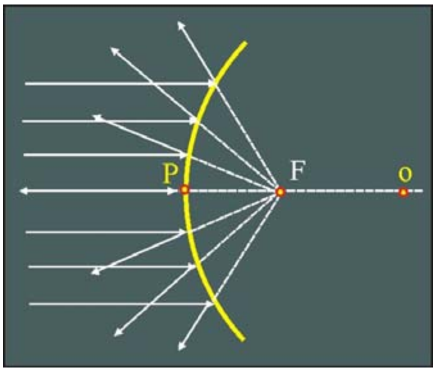


Рис. 66.3. Выпуклое зеркало

9. При направлении параллельного пучка света на выпуклое зеркало (рис. 66.3) лучи после отражения от поверхности зеркала будут расходящимися. Продолжения отразившихся лучей пересекаются в одной точке, именуемой фокусом выпуклого зеркала или главным фокусом выпуклого зеркала. Изображение, возникающее в выпуклом зеркале, получается мнимым. Фокусное расстояние вогнутого зеркала определяется так же, как и для выпуклого

$$F = \frac{R}{2};$$

10. Для вогнутых зеркал так же существует понятие фокальной плоскости, но, в отличие от предыдущего случая, фокальная плоскость выпуклого зеркала является мнимой.

11. В сферических зеркалах лучи, составляющие малый угол с оптической осью после отражения либо пересекаются в одной тоске (вогнутые зеркала) или пересекаются в одной точке продолжение лучей (выпуклые зеркала). По этой причине зеркала могут формировать изображения предметов.

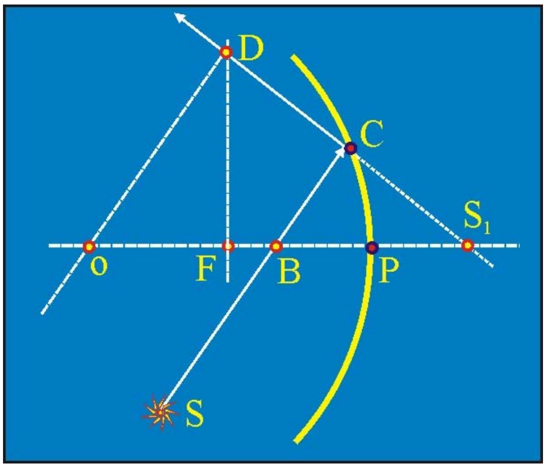


Рис. 66.4. Построение изображения

12. Построение изображения сводится к определению направления произвольного луча после его отражения от зеркала. На рис. 66.4 показан пример построения изображения светящейся точки S.

13. Пусть некоторый предмет (в виде обычной стрелки) расположен вдали от фокуса вогнутого зеркала. Из точки A предмета направляются два луча: один параллельно оптической оси, второй – через оптический центр зеркала. Луч параллельный оптической оси отразившись, пройдёт через фокус зеркала. Пересечение прямого луча и отражённого даст изображение точки A. Поскольку точка B предмета расположена на главной оптической оси, то её изображение B^* будет так же находиться на главной оптической оси. Таким образом в вогнутом зеркале при расположении предмета за фокусным расстоянием получается уменьшенное, перевёрнутое и действительное изображение.

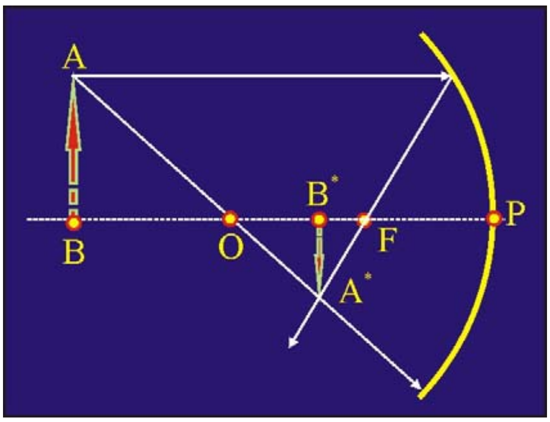


Рис 66.5. Предмет в вогнутом зеркале

67. На вогнутое сферическое зеркало падает луч mn. Найти построением дальнейший ход луча.

Решение

1. Отражённый луч должен пересечь непременно фокальную плоскость зеркала. Точку пересечения отражённого луча и фокальной плоскости определим дополнительным построением.

2. Через оптический центр зеркала проводим прямую kz параллельную заданному лучу, т.е. определим положение побочного фокуса F^*. Из точки n проводим линию через побочный фокус и получаем направление искомого отражённого луча.

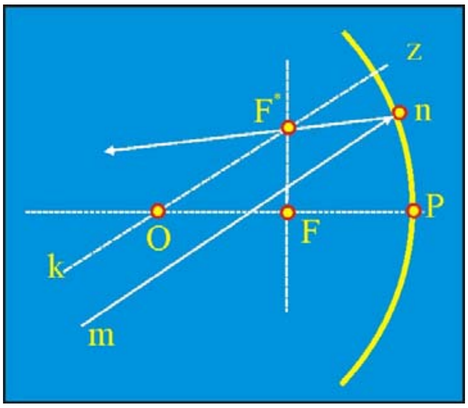


Рис. 67. Ход луча в вогнутом зеркале

---

68. На выпуклое зеркало падает луч mn. Найти направление отраженного от зеркала луча.

Решение

1. Проводим линию, перпендикулярную главной оптической оси зеркала, получаем положение фокальной плоскости зеркала.

2. Через оптический центр зеркала O проводим линию kz, параллельную падающему лучу mn и получаем положение побочного фокуса F^*.

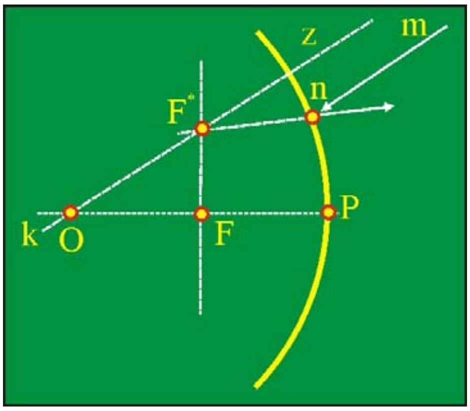


Рис. 68. Ход луча в выпуклом зеркале

3. Соединив побочный фокус точкой падения луча на зеркало, получим направление отражённого луча.

---

69. Какую форму должна иметь поверхность зеркала, способного собирать параллельный пучок световых лучей в одну точку?

Решение

1. Рассмотрим два параллельных главной оптической оси луча, один из которых исходит из точки B и проходит через фокус зеркала F, второй, произвольный луч, пусть исходит из точки C и падает на зеркало в точке A с координатами (x,y).

2. На основании принципа Ферма о минимизации пути, можно записать следующее соотношение

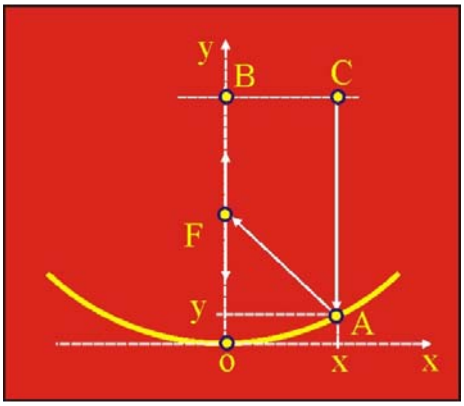


Рис. 69. Форма вогнутого зеркала

$$CA + AF = BO + OF,$$

но

$$BO = CA + y;$$

3. Треугольник yFA является прямоугольным, поэтому по теореме Пифагора

$$AF = \sqrt{x^2 + (F - y)^2};$$

4. Совместим первые два уравнения

$$CA + AF = CA + y + OF; \quad \Rightarrow AF = OF + y = F + y;$$

5. Приравняем значения AF

$$\sqrt{x^2 + (F - y)^2} = y + F; \quad \Rightarrow \quad x^2 + (F - y)^2 = (y + F)^2;$$

$$x^2 + F^2 - 2Fy + y^2 = y^2 + 2Fy + F^2;$$

$$y = \frac{x^2}{4F};$$

6. Полученное уравнение является уравнением симметричной параболы, т.е. вогнутая поверхность зеркала должна представлять собой параболоид вращения. В этом случае параллельный главной оптической оси пучок света должен в фокусе собираться в точку.

---

70. Определить фокусное расстояние сферического зеркала радиус которого равен R.

Решение

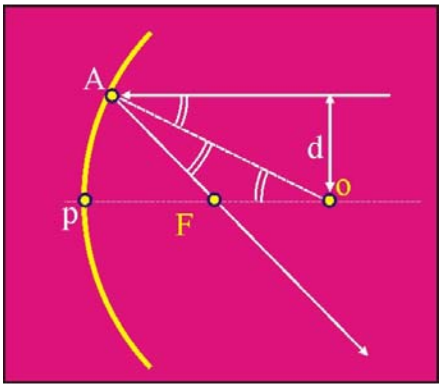


Рис. 70. Фокусное расстояние

1. Выберем луч параллельный главной оптической оси зеркала, так, чтобы он упал на поверхность зеркала в точке А.

2. Образовавшийся треугольник AOF – равнобедренный, т.е.

$$AF = FO; \quad \Rightarrow \quad \angle OAF = \angle AOF;$$

3. Пусть расстояние от падающего луча до главной оптической оси d << R. В этом случае уместно соотношение

$$pF = FO = \frac{pO}{2} = \frac{R}{2};$$

4. Таким образом, тонкий пучок света, параллельный главной оптической оси, фокусируется на расстоянии F, равном половине значения радиуса вогнутого зеркала.

---

71. Получить формулу сферического зеркала для случая расположения источника света S на расстоянии d от полюса зеркала.

Решение

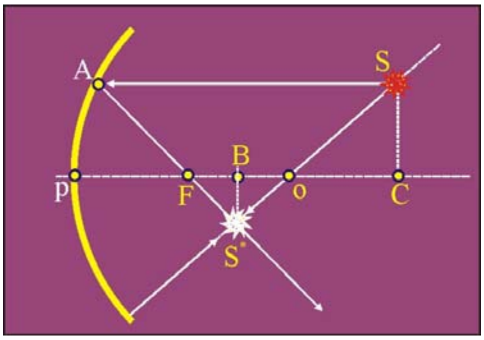


Рис. 71. Формула вогнутого зеркала

1. Проанализируем два, исходящих из точечного источника света S два луча: один направим параллельно главной оптической оси, а другой пусть проходит через оптический центр зеркала O.

2. Рассмотрим далее два подобных треугольника:

$$\Delta SAS^* \sim \Delta OFS^*,$$

$$\frac{AS}{FO} = \frac{AS^*}{FS^*};$$

3. Учтём следующие очевидные соотношения

$$AS^* = pB; \quad FS^* = FB;$$

что даёт основание записать:

$$\frac{AS}{FO}=\frac{pB}{FB};\quad \Rightarrow \quad \frac{1}{F}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f};$$

---

72. Посеребренная сфера рассечена на две части плоскостью. На каком расстоянии b от центра сферы проходит эта плоскость, если меньшая отсеченная часть представляет собой сферическое зеркало диаметром d = 0,64 м и с фокусным расстоянием F = 0,65 м?

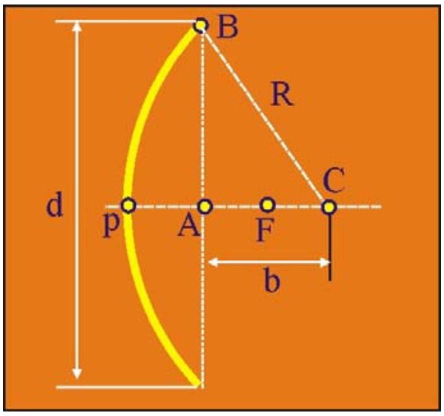


Рис. 72. Расстояние до плоскости

Решение

1. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC из которого по теореме Пифагора можно записать

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2+b^2=R^2=4F^2;$$

$$b=\sqrt{4F^2-\frac{d^2}{4}}\cong 1{,}26\text{ м}.$$

---

73. Фокус вогнутого зеркала расположен на расстоянии a = 0,24 м от предмета и на расстоянии b = 0,54 м от изображения. Найти увеличение зеркала k.

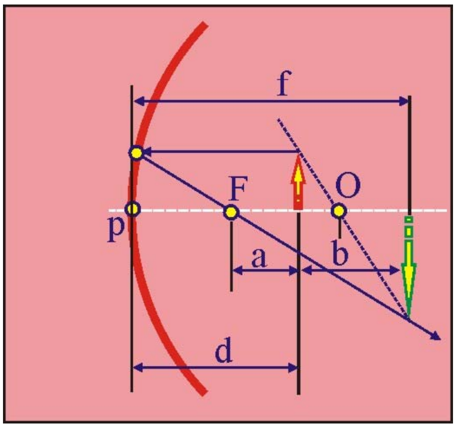


Рис. 73. Увеличение зеркала

Решение

1. Ели предмет находится за фокусным расстоянием, то справедливы следующие соотношения

$$\left.\begin{array}{l}a=d-F;\\ b=f-F,\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad\left.\begin{array}{l}d=a+F;\\ f=b+F;\end{array}\right\}$$

формула зеркала при этом имеет вид

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F};$$

2. Если предмет расположен между зеркалом и фокусом, то

$$\left.\begin{array}{l}a=F-d;\\ b=f+F,\end{array}\right\}$$

а формула зеркала приобретает вид:

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=\frac{1}{F};$$

3. Подставляя соответствующую систему уравнений в формулу зеркала, получим:

$$\frac{1}{a+F}+\frac{1}{b+F}=\frac{1}{F};\quad k=\frac{f}{d}=\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt{\frac{0{,}54}{0{,}24}}=1{,}5;$$

---

74. На каком расстоянии перед выпуклым сферическим зеркалом должен находиться предмет, чтобы его изображение получилось в 1,5. раза ближе к зеркалу, чем сам предмет. Радиус кривизны зеркала R = 1,6 м.

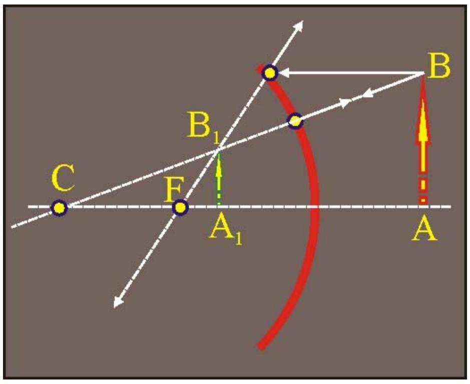


Рис. 74. Предмет в выпуклом зеркале

Решение

1. Запишем формулу выпуклого зеркала

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=-\frac{1}{F};$$

2. Перепишем формулу с учётом того, что

$$f=\frac{d}{1,5};\quad F=\frac{R}{2};$$

$$\frac{1}{d}-\frac{1,5}{d}=-\frac{2}{R};$$

откуда находим:

$$d=\frac{0,5R}{2}=0,4\text{ м};$$

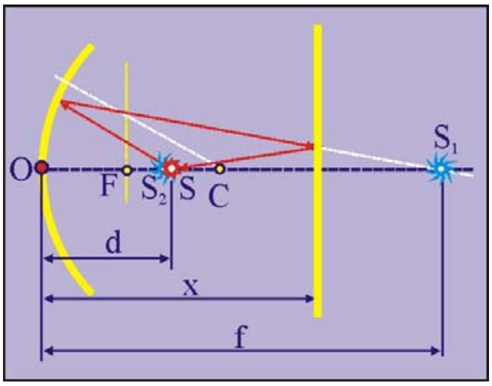


Рис. 75. Два зеркала

75. На главной оптической оси вогнутого зеркала радиусом R = 40 см находится светящаяся точка S на расстоянии d = 30 см от зеркала. На каком расстоянии перед вогнутым зеркалом нужно поставить плоское зеркало, чтобы лучи отражённые зеркалами вернулись в точку S?

Решение

1. В отсутствие плоского зеркала точка S_1 на оптической оси зеркала являлась бы изображением заданной светящейся точки S.

2. Если на пути лучей, отразившихся от вогнутого зеркала и путешествующих в точку S_1 поставить плоское зеркало, то это узкий пучок, отразившись, как ему и положено, от поверхности плоского зеркала дадут изображение S_2.

3. По условию задачи плоское зеркало делит участок S_1S_2 напополам, то изображение S_2 должно совпадать с положением исходной светящейся точки S.

4. Определим расстояние f от полюса вогнутого зеркала до изображения, воспользовавшись формулой зеркала

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F};$$

5. Учитывая, что F = R/2, находим из уравнения вогнутого зеркала

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=2R;\quad\Rightarrow\quad f=\frac{Rd}{2d-R};$$

6. Выразим расстояние x от плоского зеркала до полюса вогнутого зеркала

$$x=d+\frac{f-d}{2}=\frac{d+f}{2};$$

7. Подставим в последнее уравнение значение f

$$x = \frac{d^2}{2d - R} = \frac{0{,}3^2}{0{,}6 - 0{,}4} = 0{,}45 \text{ м}.$$

---

76. Между выпуклым зеркалом и предметом установлен непрозрачный экран, который закрыл половину апертуры зеркала. Каким будет в этом случае изображение предмета в зеркале?

Решение

1. Если бы не было экрана, то изображение получалось бы лучами 1,2. Но экран не пропускает эти лучи. Изображение предмета не исчезнет, т.к. отражает вся поверхность зеркала, а её половина не закрыта.

2. Используя узкий пучок света, ограниченный лучами 3,4 построим изображение, генерируемое незакрытой частью зеркала.

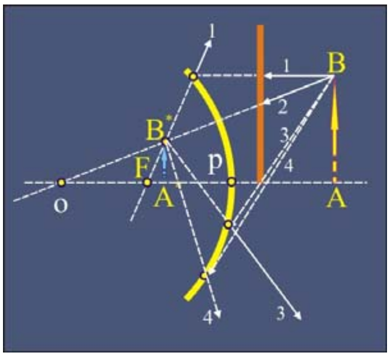


Рис. 76. Экран перед зеркалом

3. С установкой экрана поменяется яркость изображения, т.к. в соответствующих точках будет собираться только половина лучей.

---

77. Сферу радиуса R посеребрили изнутри и отрезали от неё меньшую часть, получив вогнутое сферическое зеркало. Плоскость разреза прошла на расстоянии R/2 от центра сферы. В центр окружности, образованной линией разреза поместили точечный источник света. Определить максимальный угол между лучами, отраженными от такого зеркала.

Решение

1. При перемещении луча от центра зеркала к его периферии угол отражения α увеличивается. Увеличивается угол и между отражёнными лучами

$$\beta = 2\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right);$$

2. Из рис. 15.68 видно, что

$$\sin\alpha_{max} = \frac{R/2}{R} = \frac{1}{2}; \quad \Rightarrow \quad \alpha_{max} = \frac{\pi}{6};$$

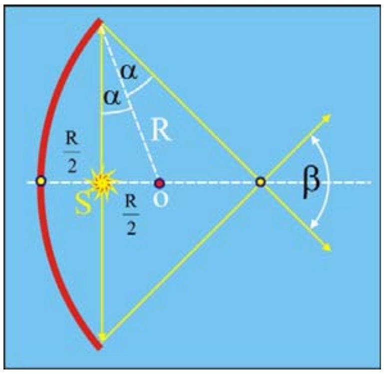


Рис. 77. Максимальный угол

3. Подставляя значение α_{max} в уравнение для угла β, получим:

$$\beta_{max} = \pi/3 = 60^{\circ}.$$

4. Законы преломления

78. Под каким углом следует направить луч из воздуха на поверхность стекла с показателем преломления n = 1,54, чтобы угол преломления получился равным $\gamma = 30^0$?

Решение

1. Закон преломления:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n_{1,2}; \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = n_{1,2}\sin\gamma; \quad \alpha = \arcsin\left(n_{1,2}\sin\gamma\right) = \arcsin\frac{1,54}{2} \approx 50^0;$$

---

79. При каком условии луч проходит через границу раздела двух прозрачных сред, не преломляясь?

Решение

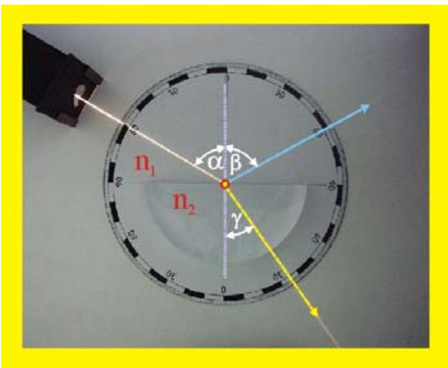


Рис. 79. Преломление света

1. При падении света на границу раздела двух сред происходят явления отражения и преломления световых лучей.

2. Углом преломления называется угол γ образованный прошедшим лучом и нормалью (перпендикуляром) восстановленным к границе раздела сред в точке падения луча.

3. Закон преломления света впервые был сформулирован Снеллиусом в 1620 г.: преломлённый луч лежит в плоскости, проведенной через падающий луч и перпендикуляр, построенный в точке падения луча к границе раздела. Угол падения луча α и угол преломления γ находится в соотношении

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2} = n_{21},$$

где n_1, n_2 – коэффициенты преломления в рассматриваемых средах, c_1, c_2 – соответствующая скорость света в средах, n_{21} – относительный коэффициент преломления среды 2 относительно среды 1.

4. Закон Снеллиуса показывает, что луч не будет преломляться в том случае, когда:

$$n_{21} = 1; \quad \Rightarrow \quad n_1 = n_2,$$

т.е. когда коэффициенты преломления сред одинаковы по величине.

---

80. При каком условии угол падения луча света на границу раздела двух сред будет меньше угла преломления?

Решение

1. Среда, скорость в которой меньше, называется оптически более плотной, среда, в которой скорость света больше – оптически менее плотной.

2. Заданные условия, т.е. $\alpha < \gamma$ будут наблюдаться при переходе светового луча из оптически более плотной среды в оптически менее плотную среду, когда $c_1 < c_2$, при этом

$$n_{21} < 1; \quad n_1 > n_2;$$

---

81. Если смотреть над костром, то кажется, что предметы колеблются. Почему?

Решение

Рис. 81. Нагревание воздуха

1. На основании экспериментов установлено, что показатель преломления воздуха можно принимать с достаточной степенью точности равным единице.

2. Это означает, что для воздуха в нормальных условиях принимается, что скорость света равна скорости света в вакууме.

3. Показатель преломления в общем случае равен отношению скоростей света в вакууме и среде

$$n = \frac{c}{v},$$

где $c \cong 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме, v – скорость света в среде.

4. Объём воздуха в области горения костра представляет собой газообразную среду с переменной во времени температурой. При изменении температуры газов меняется их плотность, в полном соответствии с уравнением Клапейрона – Менделеева, с повышением температуры плотность уменьшается

$$PV = \frac{m}{\mu}RT; \quad P = \frac{m}{V}\frac{RT}{\mu}; \quad P = \rho\frac{RT}{\mu}; \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{P\mu}{RT}; \quad \rho \approx T^{-1};$$

5. При изменении плотности, изменяется и показатель преломления, причём в области костра показатель преломления является функцией координат и времени

$$n = f(x, y, z, t),$$

что собственно и создаёт впечатление колеблющихся предметов, с.к. хаотически меняется показатель преломления.

---

82. При каких условиях прозрачный и бесцветный предмет становится невидимым в проходящих лучах?

Решение

1. Предмет станет невидимым, если материал, из которого он изготовлен, будет иметь показатель преломления равный показателю преломления среды, в которую он помещен.

2. Так, например, если в глицерин с показателем преломления $n_1 \cong 1{,}469$ поместить образец, выполненный из кварцевого стекла с $n_2 \cong 1{,}458$, то он практически не будет виден.

---

83. Почему задолго до восхода Солнца начинает светать?

Решение

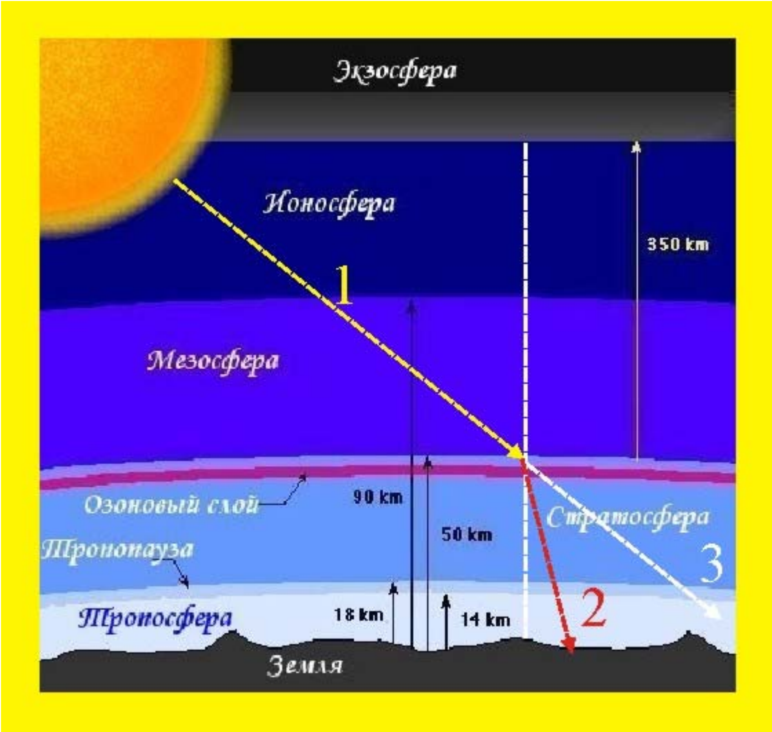


Рис. 83. Преломление лучей в атмосфере

1. Земной шар окружен атмосферой, газообразной оболочкой в тоще которой происходит преломление солнечных лучей.

2. Плотность атмосферы имеет максимальные значения у поверхности земли, т.к. концентрация молекул тяжёлых воздуха в приземных слоях максимальна

$$\zeta(h) = \zeta_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right),$$

где ζ – концентрация молекул на высоте h, ζ_0 – концентрация на поверхности, μ – молярная масса, g – ускорение свободного падения, h – высота, R – универсальная газовая постоянная, T – абсолютная температура.

2. Из этого уравнения, в частности, следует, что состав воздуха с высотой должен изменяться, что подтверждается многочисленными наблюдениями. В приповерхностном слое земли воздух состоят из 78,08% азота N_2, – 20,95% кислорода O_2, – 0,03% углекислого газа CO_2, – 0,94% инертные газы. На высоте h = 10^4 м соотношение изменяется

$$\frac{\zeta(O_2)}{\zeta(N_2)} = \frac{\zeta_0(O_2)}{\zeta_0(N_2)} \exp\left[-\frac{\mu(O_2) - \mu(N_2) gh}{RT}\right] \cong 0{,}23,$$

т.е. концентрация кислорода уменьшится до 0,23. Следует отметить, что полученные уравнения справедливы для изотермической атмосферы, распределение температуры естественно будет вносить свои коррективы.

3. Таким образом, за долго до прямой видимости Солнца его лучи за счёт преломления в основном в тропосфере и стратосфере за счёт явления преломления будут достигать поверхности.

84. Определить показатель преломления вещества, если при угле падения $\alpha = 60^0$, угол преломления составляет $\gamma = 30^0$.

Решение

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2} = n_{21}; \quad n_{2,1} = \frac{\sin 60^0}{\sin 30^0} \approx \frac{0{,}866}{0{,}5} \approx 1{,}73;$$

---

85. Луч света от подводного источника попадает на поверхность воды под углом $\alpha = 35^0$. Под каким углом луч выйдет в воздух, если показатель преломления воды $n \approx 1{,}33$?

Решение

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2} = n_{21}; \quad \gamma = \arcsin\left(n_{2,1}\sin\alpha\right) \approx \arcsin 0{,}763 \approx 49{,}73^0;$$

---

86. Свет падает на границу раздела двух сред, причём при угле падения $\alpha = 30^0$ угол преломления $\gamma = 40^0$. определить показатель преломления второй среды n_2, если для первой среды $n_1 = 1{,}6$.

Решение

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2} = n_{21}; \quad n_2 = \frac{n_1 \sin\alpha}{\sin\gamma} \approx \frac{1{,}6 \cdot 0{,}5}{0{,}643} \approx 1{,}245;$$

---

86. Определить показатель преломления и скорость света в слюде ($n_2 \approx 1{,}6$), если при угле падения $\alpha = 60^0$ угол преломления $\gamma = 32^0$

Решение

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{n_2}{n_0} = \frac{c_0}{c_2} = n_{20}; \quad n_2 = \frac{n_0 \sin\alpha}{\sin\gamma} \approx \frac{1 \cdot 0{,}866}{0{,}523} \approx 1{,}65;$$

$$c_2 = \frac{c_0}{n_2} \approx \frac{3 \cdot 10^8}{1{,}65} \approx 1{,}811 \cdot 10^8 \frac{м}{с};$$

---

87. Найти показатель преломления среды в которой скорость распространения света $c_1 = 2 \cdot 10^5$ км/с.

Решение

$$\frac{n_x}{n_0} = \frac{c_0}{c_1} = n_{21}; \quad n_x = \frac{n_0 c_0}{c_1} \approx \frac{1 \cdot 3 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^8} \approx 1{,}5;$$

---

88. Определить относительный показатель преломления при переходе света из глицерина ($n_1 \approx 1{,}474$) в стекло (тяжёлый флинт $n_2 \approx 1{,}8$) и наоборот, из стекла в глицерин.

Решение

1. Относительный показатель преломления при переходе луча света из глицерина в тяжёлый флинт:

$$n_{12} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1{,}8}{1{,}474} \approx 1{,}23;$$

2. Относительный показатель преломления при переходе луча света из стекла в глицерин:

$$n_{21} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1,474}{1,8} \approx 0,813;$$

---

89. При переходе света из стекла (тяжёлый флинт $n_1 \approx 1,8$) в глицерин ($n_2 \approx 1,474$) угол преломления оказался равным $\gamma = 30^0$. Определить угол падения луча α и относительный показатель преломления для заданных условий.

Решение

1. Относительный показатель преломления:

$$n_{21} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1,474}{1,8} \approx 0,813;$$

2. Угол падения луча:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2} = n_{21}; \quad \alpha = \arcsin\left(n_{2,1}\sin\gamma\right) \approx \arcsin 0,41 \approx 24,2^0;$$

90.Определить показатель преломления стекла (тяжёлый флинт $n_1 \approx 1,8$) относительно воды ($n_2 = 1,33$).

Решение

$$n_{21} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1,8}{1,33} \approx 1,354;$$

---

91. Показатель преломления стекла $n_1 = 1,54$. Определить показатель преломления воды ($n_2 = 1,33$) относительно стекла и скорость света в воде и стекле.

Решение

1. Показатель преломления воды относительно стекла:

$$n_{12} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1,33}{1,54} \approx 0,864;$$

2. Скорость света c_1 в стекле и в c_2 воде:

$$c_1 = \frac{c_0}{n_1} = \frac{3\cdot 10^8}{1,54} \approx 1,95\cdot 10^8\,\frac{м}{с}; \quad c_2 = \frac{c_0}{n_2} = \frac{3\cdot 10^8}{1,33} \approx 2,257\cdot 10^8\,\frac{м}{с};$$

---

92. Определить значение угла преломления γ, если показатель преломления вещества $n = 1,88$, а угол падения света на поверхность вещества $\alpha = 70^0$.

Решение

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n; \quad \gamma = \arcsin\left(\frac{1}{n}\sin\alpha\right) \approx \arcsin 0,763 \approx 30^0;$$

---

93. Найти значение угла преломления в масле с $n_1 = 1,3$, если свет идёт из воздуха $n_0 = 1$ и угол его падения $\alpha = 45^0$.

Решение

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{n_1}{n_0}; \quad \gamma = \arcsin\left(\frac{n_0}{n_1}\sin\alpha\right) \approx \arcsin 0{,}763 \approx 32{,}96^0;$$

---

94. Водолаз определил угол преломления луча в воде (n = 1,33) равным γ = 32^0. под каким углом ζ к поверхности воды падали лучи света?

Решение

1. Угол падения луча:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n; \quad \alpha = \arcsin(n\sin\gamma) \approx \arcsin 0{,}705 \approx 44{,}83^0;$$

2. Угол между падающим лучом и поверхностью воды:

$$\zeta = 90^0 - \alpha \approx 45^0;$$

---

95. Солнечные лучи падают на поверхность воды при угловой высоте Солнца над горизонтом ξ = 30^0. Под каким углом пойдут лучи в воде (n = 1,33) после преломления?

Решение

1. Угол падения световых лучей на поверхность воды:

$$\alpha = 90^0 - \xi = 60^0;$$

2. Угол преломления лучей в воде:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{n}{n_0} = n; \quad \gamma = \arcsin\left(\frac{n_0}{n_1}\sin\alpha\right) \approx \arcsin 0{,}763 \approx 40{,}6^0;$$

---

96. Абсолютные показатели преломления алмаза и стекла соответственно равны n_1 = 2,42 и n_2 = 1,5. Каково отношение толщин этих веществ, если время распространения света в них одинаково?

Решение

1. Скорости распространения света в веществах:

$$c_1 = \frac{c_0}{n_1}; \quad c_2 = \frac{c_0}{n_2};$$

2. Толщины слоёв алмаза и стекла:

$$h_1 = c_1\tau = \frac{c_0}{n_1}\tau; \quad h_2 = c_2\tau = \frac{c_0}{n_2}\tau;$$

3. Отношение толщин слоёв:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{n_1}{n_2} = 1{,}61;$$

---

97. За одно и то же время свет по кратчайшему пути проходит слой воды (n_1 = 1,33) толщиной h_1 = 9 см и стеклянный брусок (лёгкий крон $n_2 \approx$ 1,5). Определить толщину бруска h_2.

Решение

1. Скорость света воде и в стекле:

$$c_1 = \frac{c_0}{n_1}; \quad c_2 = \frac{c_0}{n_2};$$

2. Время распространения света в заданных образцах:

$$\tau_1 = \frac{h_1}{c_1} = \frac{h_1 n_1}{c_0}; \quad \tau_2 = \frac{h_2}{c_2} = \frac{h_2 n_2}{c_0}; \quad \tau_1 = \tau_2;$$

3. Толщина стеклянного бруска:

$$n_1 h_1 = n_2 h_2; \quad n_2 = \frac{h_1 n_1}{n_2} = \frac{9\cdot 10^{-2}\cdot 1{,}33}{1{,}5} \approx 0{,}079\text{м} \equiv 7{,}9\text{см};$$

---

98. Скорость распространения света в некоторой жидкости $c_1 = 2{,}4\cdot 10^8$ м/с. На поверхность этой жидкости из воздуха падает световой луч под углом $\alpha = 25^0$. Определить угол преломления луча.

Решение

1. Относительный коэффициент преломления жидкости:

$$n = \frac{c_0}{c_1} \approx 1{,}25;$$

2. Угол преломления луча:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{n}{n_0} = n; \quad \gamma = \arcsin\left(\frac{n_0}{n_1}\sin\alpha\right) \approx \arcsin 0{,}34 \approx 19{,}88^0;$$

---

99. На горизонтальном дне водоёма глубиной h = 1,2 м лежит плоское зеркало. На каком расстоянии L от места вхождения луча этот луч снова выйдет из воды после отражения от зеркала: Угол падения луча в воду $\alpha = 30^0$

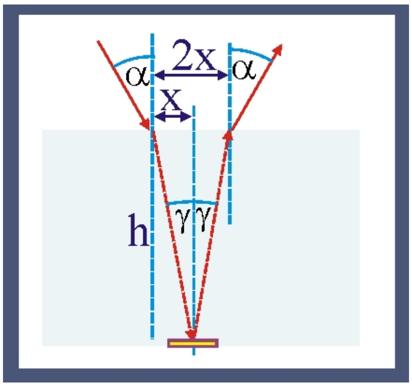


Рис. 99. Зеркало на дне водоёма

Решение

1. Угол преломления луча в воде γ:

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{n_0}{n_1}\sin\alpha\right) \approx \arcsin 0{,}375 \approx 22^0;$$

2. Из прямоугольного треугольника, образованного преломлённым лучом, перпендикуляром к поверхности и самой поверхностью воды:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{x}{h}; \quad \Rightarrow \quad x = h\operatorname{tg}\gamma \approx 0{,}485\text{м};$$

3. Смещение луча при выходе из воды относительно точки падения:

$$L = 2x \approx 1\,\text{м};$$

---

100. На горизонтальном дне бассейна лежит плоское зеркало. Луч света, преломившись на поверхности воды, отражается от зеркала и снова выходит в воздух. Расстояние точки от входа луча в воду до точки выхода отражённого луча L = 1,5 м. Глубина водоёма h = 2 м. Определить угол α падения луча в воду.

Решение

1. Угол преломления луча (рис. 99):

$$\mathrm{tg}\gamma = \frac{L}{2h}; \quad \gamma = \mathrm{arctg}\frac{L}{2h} \approx \mathrm{arctg}0,667 \approx 20,56^0;$$

2. Угол падения луча:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n; \quad \alpha = \arcsin(n\sin\gamma) \approx \arcsin 0,467 \approx 27,84^0;$$

---

101. Луч падает на поверхность воды пол углом α_1 = 40°. Под каким углом луч должен упасть на поверхность стекла, чтобы угол преломления остался той же величины?

Решение

1. Определим используя закон Снеллиуса угол преломления луча в воде

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\gamma} = \frac{n_2}{n_1}; \quad \frac{0,643}{\sin\gamma} = \frac{1,33}{1};$$

$$1,33\sin\gamma = 0,643; \quad \gamma = \arcsin\frac{0,643}{1,33} \cong 29^o;$$

2. Запишем закон преломления для воды и найдём угол падения

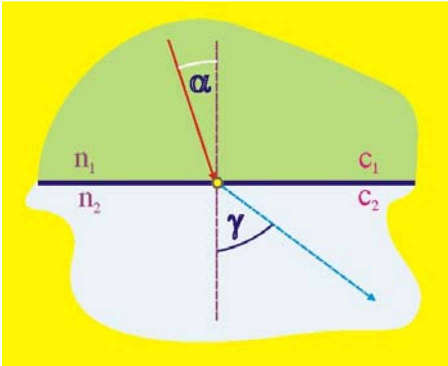


Рис. 101. Преломление при $\alpha < \gamma$

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin 29^o} = \frac{1,46}{1}; \quad \frac{\sin\alpha_2}{0,485} = 1,46; \quad \alpha_2 = \arcsin 0,71 \cong 45,2^o.$$

---

102. На стеклянную пластинку с показателем преломления 1,5, падает луч света. Определить угол падения луча, если угол между отражённым и преломлённым лучом составляет β = 90°.

Решение

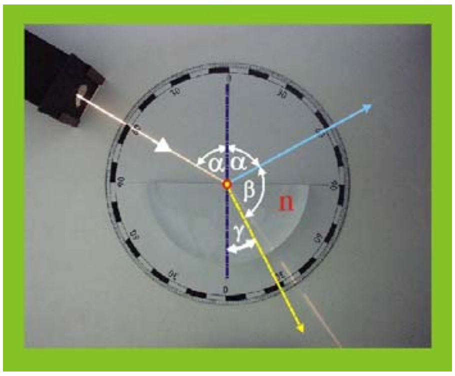


Рис. 102. Из воздуха в стекло

1. Как видно из построений хода лучей

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi,$$

откуда

$$\gamma = \pi - \beta - \alpha;$$

2. С учётом заданного значения угла $\beta = \pi/2$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha;$$

3. По закону преломления света

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n;$$

4. Из уравнения для γ находим

$$\sin\gamma = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha;$$

5. Перепишем закон преломления в виде

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha = n; \quad \alpha = \mathrm{arctg}n = \mathrm{arctg}1{,}5 \cong 0{,}98\ \text{рад} \cong 56{,}2^\circ;$$

---

103. Взаимно перпендикулярные лучи 1 и 2 из воздуха проникают в жидкость. У первого луча угол преломления $\gamma_1 = 30^\circ$ а у второго – $\gamma_2 = 45^\circ$. Определить показатель преломления жидкости.

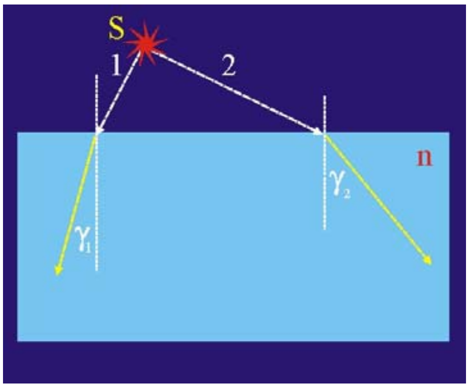


Рис. 103. Два нормальных луча

Решение

1. Запишем закон преломления для двух взаимно перпендикулярных лучей при их вхождении из воздуха в жидкость

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 30^\circ} = n; \quad \frac{\sin(90-\alpha)}{\sin 45^\circ} = n;$$

2. Образуем на основании закона систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} n\sin 30^\circ &= \sin\alpha; \\ n\sin 45^\circ &= \cos\alpha; \end{aligned}\right\}$$

из которых, в частности, следует, что

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \quad (n\sin 30^\circ)^2 + (n\sin 45^0)^2 = 1;$$

$$(0{,}5n)^2 = (0{,}7n)^2 = 1; \quad 0{,}25n^2 + 0{,}49n^2 = 1; \quad 0{,}74n^2 = 1;$$

$$n = \sqrt{\frac{1}{0{,}74}} \cong 1{,}16;$$

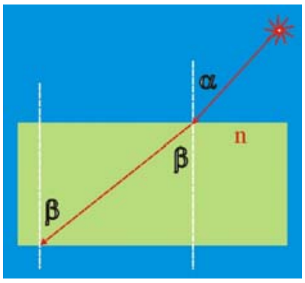


Рис. 104. Дно озера

104. Солнечные лучи падают на горизонтальное дно озера под углом $\beta = 30^\circ$. Под каким углом α солнечные лучи падают на поверхность воды? Принять показатель преломления воды равным n = 1,33.

Решение

1. Искомый угол можно определить непосредственно из закона преломления Снеллиуса

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n; \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = n\sin\beta = 1{,}33\cdot 0{,}5; \quad \alpha = \arcsin 0{,}665; \quad \alpha = 41{,}7^\circ;$$

---

105. Тонкий пучок света, проходящий через центр стеклянного шара радиусом R, фокусируется на расстоянии 2R от его центра. Найти показатель преломления стекла.

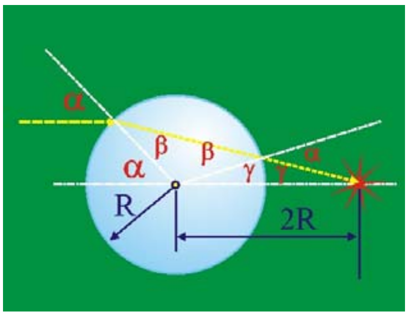


Рис. 105. Стеклянный шар

Решение

1. Запишем соотношения между углами

$$\alpha = 2\gamma;$$

$$\alpha + \gamma = 2\beta;$$

2. Ввиду малости углов синусы углов можно в первом приближении заменить углами и закон преломления записать следующим образом

$$\frac{\alpha}{\beta} = n; \quad \Rightarrow \quad n = \frac{2\gamma}{\frac{2\gamma + \gamma}{2}} = \frac{4}{3} \cong 1{,}33;$$

---

106. Когда луч из первой среды проник во вторую среду, угол падения был равен 60°, а угол преломления – 45°. Когда же луч шёл из первой среды в третью, угол падения был равен 60°, а угол преломления – 30°. Когда луч шёл из второй среды в третью среду, угол падения был равен 60°, а угол преломления равнялся β. Вычислить угол β.

Решение

1. Обозначим скорости в средах через v_1, v_2 и v_3 соответственно. Тогда закон преломления света для трёх сред можно представить следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\sin 60^o}{\sin 45^o} = \frac{v_1}{v_2}; \\ &\frac{\sin 60^o}{\sin 45^o} = \frac{v_1}{v_3}; \\ &\frac{\sin 60^o}{\sin\beta} = \frac{v_2}{v_3}; \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta = \sin 60^o \left(\frac{\sin 60^o}{\sin 45^o}\right) \cdot \left(\frac{\sin 30^0}{\mathrm{sn} 60^o}\right);$$

$$\sin\beta = 0{,}866 \cdot 1{,}22 \cdot 0{,}577 \cong 0{,}61; \quad \beta = \arcsin 0{,}61 \cong 37{,}6^o;$$

---

107. Если смотреть на капиллярную трубку сбоку, то видимый внутренний радиус будет равен r^*. Каков истинный внутренний радиус, если показатель преломления стекла n?

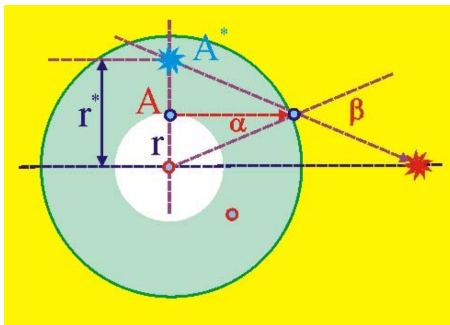


Рис. 107. Капиллярная трубка

Решение

1. Используя закон преломления построим изображение некоторой точки A^* расположенной на диаметре трубки. Если углы α и β рассматривать как малые, заменяя синусы углами, то

$$\beta = \alpha n;$$

2. Для малых углов можно из геометрических соображений написать следующие соотношения:

$$r^* = R\alpha; \quad r = R\beta;$$

3. Поделим уравнения друг на друга

$$\frac{r^*}{r} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\alpha n} = \frac{1}{n}; \quad \Rightarrow \quad r = \frac{r^*}{n};$$

---

108. Показатель преломления атмосферы некоторой планеты радиусом R изменяется с высотой над её поверхностью по закону

$$n = n_0 - \alpha h; \quad \text{при } h >> n_0/\alpha.$$

На какой высоте тонкий пучок света, выпущенный горизонтально, будет обходить планету, оставаясь, всё время на этой высоте?

Решение

1. Выделим два луча, находящиеся на расстояниях r_1 и r_2 от центра планеты. Время их одного полного оборота должно быть одинаковым, потому что векторы скоростей световых волн всегда перпендикулярны волновым фронтам

$$\tau_1 = \tau_2; \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi r_1}{v_1} = \frac{2\pi r_2}{v_2}; \quad \frac{r_1}{v_1} = \frac{r_2}{v_2};$$

2. Выразим скорости распространения света в атмосфере через скорость света в вакууме c и соответствующие коэффициенты преломления

$$v_1 = \frac{c}{n_1}; \quad v_2 = \frac{c}{n_2}; \quad \Rightarrow \quad r_1 n_1 = r_2 n_2;$$

3. Введём следующие обозначения

$$r_1 = R + h; \quad r_2 = R + h + \Delta h; \quad n = n_o - \alpha h;$$

4. Образуем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} &r_1 n_1 = r_2 n_2; \\ &r_1 = R + h; \\ &r_2 = R + h + \Delta h; \\ &n = n_0 - \alpha h; \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad \Delta h << h \quad h = \frac{1}{2}\left(\frac{n_0}{\alpha} - R\right);$$

---

109. Луч света падает из воздуха на поверхность стекла под углом α_1 = 40°. Как изменится угол преломления, если угол падения увеличится на 20°?

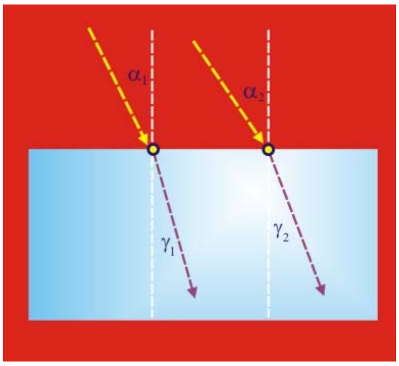


Рис. 109. Изменение угла падения

Решение

1. Запишем закон преломления света

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n,$$

который применительно к условию данной задачи можно переписать следующим образом:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\gamma_1} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\gamma_2} = \frac{\sin(\alpha_1 + 20^o)}{\sin\gamma_2}; \lambda$$

2. Принимая для стекла n = 1,5, определим углы преломления

$$\sin\gamma_1 = \frac{\sin\alpha_1}{n} = \frac{0{,}642}{1{,}5} \cong 0{,}428; \quad \gamma_1 = \arcsin 0{,}428 \cong 25{,}3^o;$$

$$\sin\gamma_2 = \frac{\sin\alpha_2}{n} = \frac{0{,}866}{1{,}5} \cong 0{,}577; \quad \gamma_1 = \arcsin 0{,}577 \cong 35{,}2^o; \quad \Delta\gamma \cong 10^o;$$

---

110. На горизонтальную поверхность среды падает луч света из воды под углом β = 20° к поверхности, преломляется под углом r = 46° к поверхности. Определить абсолютный показатель преломления среды.

Решение

1. Запишем уравнение показателя преломления среды относительно воды

$$n_{21} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{c_1}{c_2};$$

2. Выразим абсолютные показатели преломления через соответствующие скорости распространения света

$$n_1 = \frac{c}{c_1};\quad n_2 = \frac{c}{c_2};\quad \Rightarrow\quad c_1 = \frac{c}{n_1};\quad c_2 = \frac{c}{n_2};$$

3. Подставим значение скоростей в уравнение закона преломления

$$n_{21} = \frac{c/n_1}{c/n_2} = \frac{n_2}{n_1};\quad \Rightarrow\quad n_2 = \frac{n_1 \sin\alpha}{\sin\gamma};$$

4. Определим углы отклонения лучей от вертикали и решим закон преломления относительно показателя преломления среды

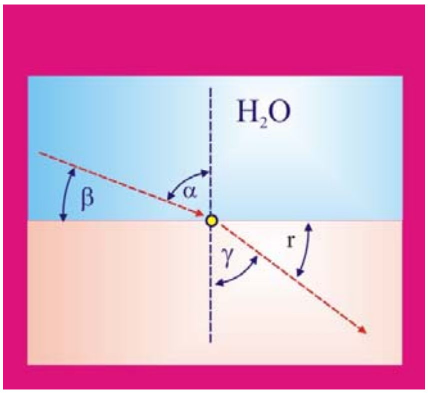


Рис. 110. Луч из воды в среду

$$n_2 = \frac{n_1 \sin(90^\circ - 20^\circ)}{\sin(90^\circ - 46^\circ)} = \frac{1{,}33 \sin 70^\circ}{\sin 44^\circ} \cong 1{,}8;$$

---

111. Доказать, что если угол между отражённым и преломлённым лучами составляет 90°, то показатель преломления равен тангенсу угла падения.

Решение

1. Как видно из построения хода лучей, выполненного в соответствии с законами преломления и отражения

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \beta = 90^\circ - \beta = 90^\circ - ;$$

2. Запишем далее закон преломления света

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{\sin\alpha}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha;$$

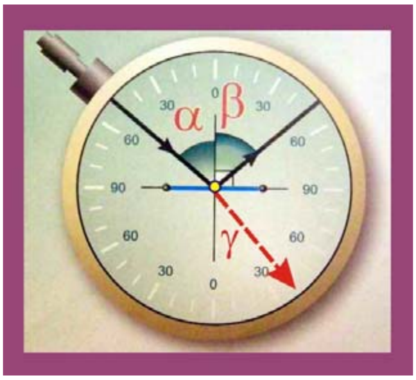


Рис. 111. Тангенс угла падения

---

112. При переходе светового луча из воздуха в воду он отклоняется на угол γ = 20°. Как изменится этот угол, если на поверхность воды налить слой масла?

Решение

1. Обозначим как v_1 скорость света в воздухе, v_2 – скорость света в воде, v_3 – скорость света в масле. До наливания масла закон преломления запишется как:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{v_1}{v_2},$$

где α – угол падения луча на границу воздух – вода, γ – угол преломления луча в воде.

2. После появления на поверхности воды слоя масла закон перепишется в виде:

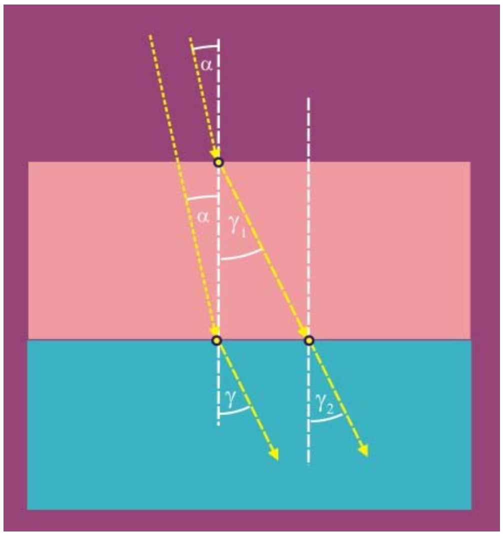


Рис. 112. Слой масла на воде

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma_1} = \frac{v_1}{v_3}; \quad \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = \frac{v_3}{v_2},$$

где α – угол падения луча на границу воздух – масло, γ_1 – угол преломления в масле, γ_2 – угол преломления в воде после прохождения масла

3. Перемножим последние равенства

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma_2} = \frac{v_1}{v_3}; \quad \Rightarrow \quad \gamma_2 = \gamma,$$

т.е. угол преломления после наливания слоя масла не изменится.

---

113. Световой луч, исходящий из точки A падает на границу раздела двух сред с разными коэффициентами преломления и попадает в точку B. Доказать, что траектория падающего и преломлённого луча отвечает требованиям принципа Ферма.

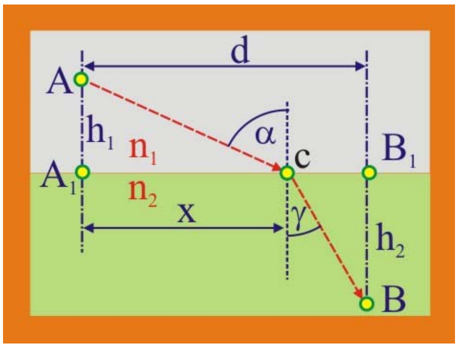


Рис. 113. Преломление и принцип Ферма

Решение

1. Обозначим как v_1 скорость в среде с показателем преломления n_1, v_2 – скорость света в среде с коэффициентом преломления n_2

2. Выразим время прохождения света τ из точки A в точку B

$$\tau = \frac{AC}{v_1} + \frac{DC}{v_2};$$

$$\tau = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (d - x)^2}}{v_2};$$

3. Определим производную

$$\frac{\partial\tau}{\partial x} = \frac{x}{v_1\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{d - x}{v_2\sqrt{h_2^2 + (d - x)^2}};$$

4. Из рассмотрения прямоугольных треугольников ΔAA_1C и ΔBB_1C следует:

$$\frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} = \sin\alpha; \quad \frac{d - x}{\sqrt{h_2^2 + (d - x)^2}} = \sin\gamma;$$

5. Для производной времени получаем:

$$\frac{\partial\tau}{\partial x} = \frac{\sin\alpha}{v_1} - \frac{\sin\gamma}{v_2};$$

6. Производная обращается в ноль при

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{v_1}{v_2},$$

т.е. при выполнении закона преломления. Другими словами, только при выполнении закона преломления Снеллиуса время распространения луча минимально, что соответствует принципу Ферма.

---

114. На дне сосуда, наполненного водой до высоты h, находится точечный источник света S. На поверхности воды плавает диск так, что его центр O находится над точечным источником света. При каком минимальном радиусе диска ни один луч не выйдет через поверхность воды? Показатель преломления воды n.

Решение

1. Построим луч, исходящий из источника S, который отразившись от поверхности не проникнет в воздух, т.е луч пойдёт под углом полного внутреннего отражения. Для этого луча справедливо соотношение:

$$\sin\alpha_0 = \frac{1}{n};$$

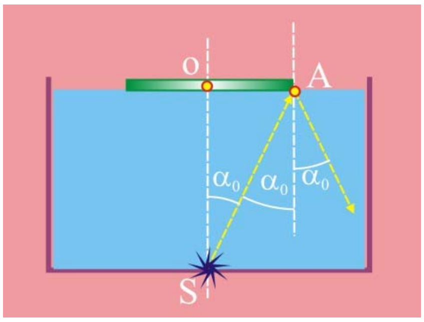


Рис. 114. Диск на воде

2. Все лучи, для которых $\alpha \ge \alpha_0$ испытывают полное внутреннее отражение и в воздушную среду не попадают.

3.Если высоту слоя воды обозначить как h, а радиус диска через R, то из прямоугольного треугольника SOA следует, что:

$$R = OA = htg\alpha_0;$$

4. Последнее уравнение представляет собой математическое условие не выхода луча в воздух

$$h\frac{\sin\alpha_0}{\cos\alpha_0} = R; \quad R = \frac{h}{n\cos\alpha_0}; \quad \cos\alpha_0 = \frac{R}{\sqrt{h^2+R^2}};$$

$$R = \frac{h\sqrt{h^2+R^2}}{nR}; \quad \Rightarrow \quad R = \frac{h}{\sqrt{n^2-1}};$$

---

115. На поверхности водоёма, имеющего глубину H = 5 м, плавает фанерный круг радиуса r = 1 м, над центром которого на некоторой высоте h = 1 м расположен точечный источник света. Определить радиус тени R от круга на дне водоёма? Принять показатель преломления воды n = 1,33.

Решение

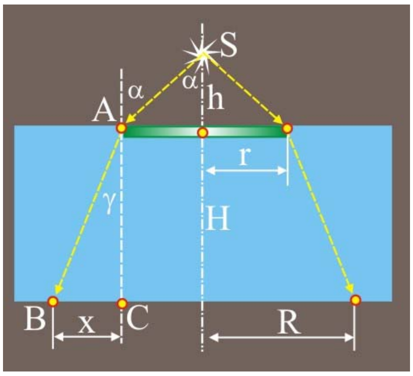


Рис. 115. Тень от круга

1. По заданным геометрическим размерам определим угол падения луча на воду при его касании кромки плавающего диска

$$tg\alpha = \frac{r}{h}; \quad \alpha = arctg\frac{r}{h} = 45^o;$$

2. Используя закон преломления, определим угол преломления γ

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n; \quad \gamma = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right) \cong 32^o;$$

3. Из прямоугольного треугольника ABC определим расстояние x

$$tg\gamma = \frac{x}{H}; \quad x = tg\gamma H = 0{,}624 \cdot 5 = 5{,}1\,м;$$

4. Определим радиус тени от диска

$$R = r + x = 6{,}1\,м;$$

---

116. Высота сваи железнодорожного моста H = 10 м. Глубина водоёма h = 6 м. Какова длина тени сваи на дне водоёма, если солнечные лучи света падают под углом 40^o к горизонту?

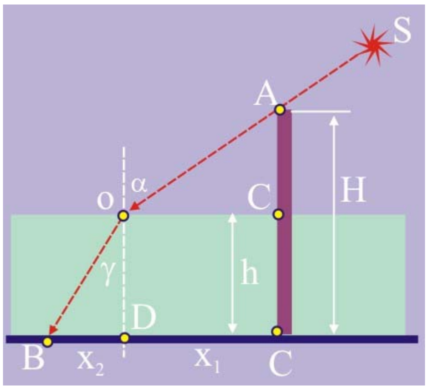


Рис. 116. Тень на дне от сваи

Решение

1. Угол падения лучей относительно нормали к поверхности воды

$$\alpha = 90^o - 40^0 = 60^0;$$

2. Поиск длины тени в данном случае сводится к определению длины отрезков x_1 и x_2. Величину x_1 можно определить из прямоугольного треугольника ΔAOC в котором известен один из катетов и угол

$$tg(90^o - \alpha) = \frac{H-h}{x_1}; \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{H-h}{tg40^o} = \frac{4}{0{,}84} \cong 4{,}76\ \text{м}$$

;

3. Запишем далее закон преломления и определим величину угла преломления γ

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n; \quad \gamma = \arcsin\frac{\sin\alpha}{n} = \arcsin 0{,}65 = 40^o;$$

4. Из прямоугольного треугольника BOD определим величину x_2

$$tg\gamma = \frac{x_2}{h}; \quad \Rightarrow \quad x_2 = htg\gamma = 6 \cdot 0{,}84 = 5\ \text{м};$$

5. Длина тени на дне водоёма

$$X = x_1 + x_2 = 9{,}76\ \text{м};$$

---

117. Свая вбита в дно реки и возвышается над водой на h_1 = 1 м. Глубина реки h_2 = 2 м. Найти длину тени от сваи на поверхности реки и на её дне, когда высота солнца над горизонтом α = 30°.

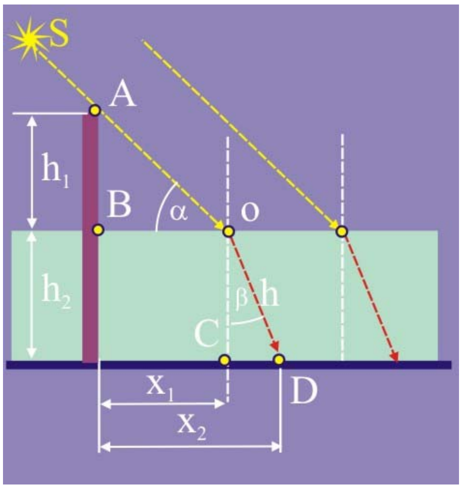


Рис. 117. Тень на воде и на дне

Решение

1. Определим длину тени на воде из прямоугольного треугольника ΔAOB

$$x_1 = h_1 ctg\alpha = 1 \cdot 1{,}73 = 1{,}73\ \text{м};$$

2. Определим угол преломления β

$$\beta = \arcsin\frac{\sin(90-\alpha)}{n} \cong 41^o;$$

3. Из прямоугольного треугольника ΔCOD определим катет CD

$$\frac{CD}{h_2} = tg\beta; \quad \Rightarrow \quad CD = h_2 tg\beta \cong 1{,}74\ \text{м};$$

4. Длина тени в воде определится в виде суммы

$$x_2 = x_1 + CD \cong 3{,}46\ \text{м}.$$

---

118. В дно озера и на берегу вбиты две вертикальные сваи высотой h = 1,5.м. Определить: а) зависимость между длинами их теней, образуемых солнечными лучами; б) длину тени на дне озера. Лучи Солнца падают на поверхности под углом δ = 30°. Глубина озера превышает длину сваи.

Решение

1. Длину береговой тени определим из прямоугольного треугольника ΔABC

$$x_1 = BC = AC \cdot tg(90^o - \delta) = h \cdot tg60^o \cong 2{,}6 \text{ м};$$

2. Определим угол преломления γ

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n; \quad \gamma = \arcsin\frac{\sin\alpha}{n} \cong 41^o;$$

3. Определим длину тени в воде

$$tg\gamma = \frac{x_2}{h}; \quad x_2 = h \cdot tg\gamma = 1{,}3 \text{ м};$$

4. Отношение длин теней в воздухе и воде

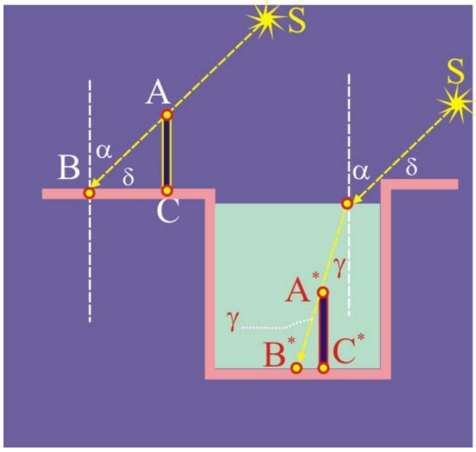


Рис. 118. Две сваи одинаковой высоты

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{htg60^o}{htg40^0} \cong \frac{1{,}73}{0{,}87} = 2;$$

---

119. На дне водоёма глубиной h = 13,3 м, лежит предмет S. На каком расстоянии от поверхности воды видит предмет человек, если его взгляд направлен перпендикулярно поверхности воды?

Решение

1. Если рассматривать два луча, между которыми угол α таков, что $\sin\alpha \approx \alpha$, то закон преломления запишется следующим упрощённым образом:

$$n = \frac{\beta}{\alpha};$$

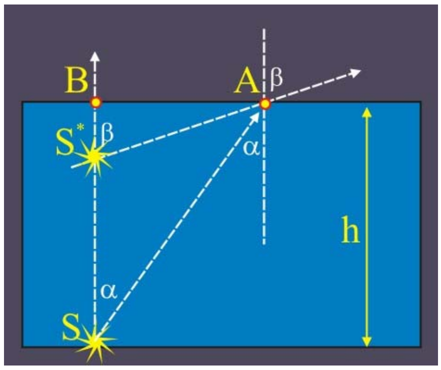


Рис. 119. Предмет на дне водоёма

2. Анализ прямоугольных треугольников ΔABS и ΔABS^* показывает, что:

$$AB = BS^* \cdot \beta = BS\alpha,$$

откуда

$$BS^* = \frac{h}{n} = \frac{13{,}3}{1{,}33} = 10 \text{ м};$$

---

5. Полное внутреннее отражение

120. Найти предельный угол падения луча на границу раздела стекла и воды.

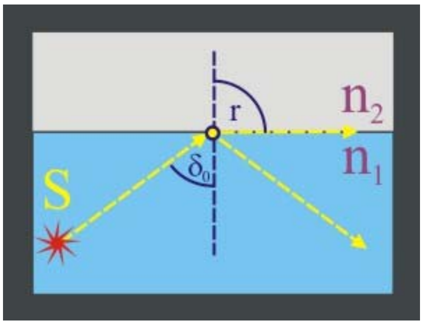


Рис. 120. Предельный угол падения

Решение

1. Предельное значение угла падения, при котором наблюдается явление полного внутреннего отражения, находится из условия

$$\sin\delta = \frac{n_2}{n_1},$$

откуда

$$\delta = \arcsin\frac{n_2}{n_2} = \arcsin\frac{1,33}{1,5} = 62^{\circ};$$

121. В системе вода – воздух предельный угол полного отражения равен 49°, а в системе стекло – воздух он равен 42°. Найти предельный угол полного отражения для системы стекло – вода.

Решение

1. Пусть n_1 коэффициент преломления света в стекле, а n_2 – в воде. Закон преломления для предельного угла запишется следующим образом:

$$\sin 49^{\circ} = \frac{1}{n_1};\quad \sin 42^{\circ} = \frac{1}{n_2},$$

откуда

$$\sin\delta_0 = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin 42^{\circ}}{\sin 49^{0}} \cong \frac{0,669}{0,755} \cong 0,886;\quad \alpha_0 = \arcsin 0,886 \cong 62,3^{\circ};$$

121. Лучи света выходят из скипидара в воздух. Предельный угол отклонения света для этих лучей составил $42^{\circ}53^{!}$. Определить скорость распространения света в скипидаре.

Решение

1. Пусть показатель преломления скипидара равен n_1, воздуха – n_2. Показатели преломления связаны со скоростями распространения света отношением

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{v}{c};$$

2. Запишем условие полного внутреннего отражения

$$\sin\delta_0 = \frac{n_2}{n_2};$$

3. Совместное решение уравнений даёт:

$$\sin\delta_0 = \frac{v}{c};\quad v = c\sin\delta = 3\cdot 10^{8}\cdot 0,679 \cong 2,037\cdot 10^{8}\,\frac{м}{c};$$

122. Найти предельный угол падения при переходе луча света из стекла в воду, если абсолютные показатели преломления стекла и воды равны n_1 = 1,52 и n_2 = 1,33.

Решение

1. Запишем закон преломления света

$$n_{21} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{n_2}{n_1},$$

где n_2 и n_1 – показатель преломления воды и стекла соответственно.

2. Для полного внутреннего отражения необходимо принять:

$$\gamma = 90^{\circ};\quad \sin\gamma = 1;\quad \alpha = \alpha_0;$$

3. Закон преломления для принятых условий запишется следующим образом:

$$\sin\alpha_0 = \frac{n_2}{n_1};\quad \Rightarrow\quad \sin\alpha_0 = 0{,}875;\quad \alpha_0 = \arcsin 0{,}875 \cong 61^{\circ};$$

---

123. Безоблачным солнечным деньком, расположившейся на дне водолаз ростом h = 1,7 м увидел на спокойной поверхности воды отражение всех участков дна, расположенных от него на расстоянии x = 10 м и более. Определить глубину водоёма.

Решение

1. Рассмотрим луч падающий на поверхность раздела сред (вода – воздух) под углом α_0 полного отражения

$$\sin\alpha_0 = \frac{1}{n};$$

2. Расстояние от водолаза до границы видимого участка дна определится как:

$$x = AE + DE;$$

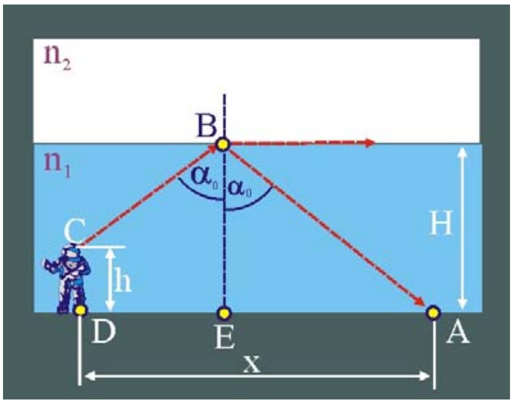


Рис. 122. Водолаз

$$x = H\mathrm{tg}\alpha_0 + (H - h)\mathrm{tg}\alpha_0;$$

3. После преобразований:

$$x = H\mathrm{tg}\alpha_0 + H\mathrm{tg}\alpha_0 - h\mathrm{tg}\alpha_0 = (2H - h)\mathrm{tg}\alpha_0;$$

$$\mathrm{tg}\alpha_0 = \frac{\sin\alpha_0}{\cos\alpha_0} = \frac{\sin\alpha_0}{\sqrt{1-\sin^2\alpha_0}} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}};$$

$$x = \frac{2H - h}{\sqrt{n^2-1}};\quad \Rightarrow\quad H = \frac{h}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{n^2-1} = 0{,}85 + 5\sqrt{1{,}33^2 - 1} \cong 5{,}2\ \text{м};$$

---

123. При переходе из первой среды во вторую угол преломления был равен 45°, а при переходе из первой среды в третью он стал равным 30° (при том же угле падения α). Найти угол предельного отклонения для луча α_0, идущего из третьей среды во вторую среду.

Решение

1. Запишем дважды закон преломления:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 45^o} = \frac{n_2}{n_1}; \quad \frac{\sin\alpha}{\sin 30^o} = \frac{n_3}{n_1};$$

2. Заменим в уравнениях α на α_0 и получим

$$\sin\alpha_0 = \frac{n_2}{n_3} = \frac{n_2/n_1}{n_3/n_1} = \frac{\sin 30^o}{\sin 45^o} \cong 0{,}707; \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 \cong 45^o;$$

---

124. Луч света направлен так, что испытывает полное внутренне отражение на границе воды и воздуха. Сможет ли этот луч выйти в воздух, если на поверхность воды налить прозрачное масло?

Решение

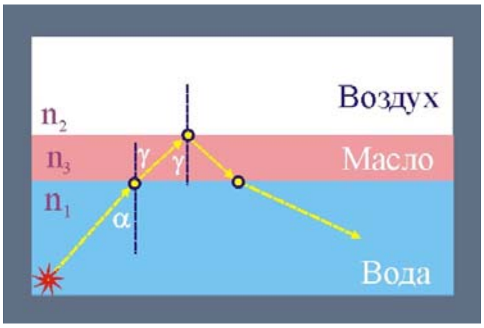


Рис. 124. Масло на воде

1. Показатель преломления воды принимается обычно равным n_1 = 1,33, а показатель преломления, например, подсолнечного масла равен n_3 = 1,47, т.е. угол полного отражения для масла, при прочих равных условиях, меньше чем у воды.

2. Запишем закон преломления для масла и воды

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{n_3}{n_1}; \quad \Rightarrow \quad \sin\gamma = \frac{n_1 \sin\alpha}{n_3};$$

$$\sin\gamma \cong 0{,}9 \sin\alpha; \quad \Rightarrow \quad \gamma > \alpha,$$

т.е. если при заданном угле α луч на проникает в воздух, то при покрытии поверхности воды слоем масла, луч из воды не проникнет в воздух, потому что

$$\sin\gamma > \frac{1}{n_3};$$

---

125. Могут ли солнечные лучи испытывать полное внутреннее отражение внутри дождевой сферической капли?

Решение

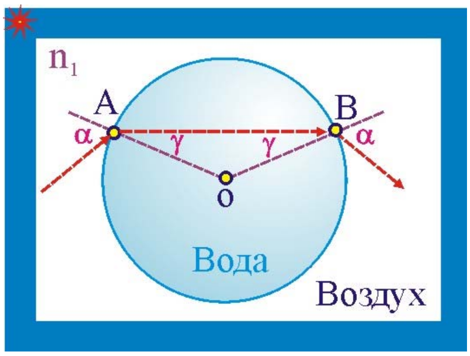


Рис. 125. Преломление в капле воды

1. Если принять угол преломления равным α, то условие полного внутреннего отражения определится как:

$$\sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{n} < \frac{1}{n};$$

2. Поскольку треугольник ΔOAB равнобедренный, то углы при его основании равны, т.е луч на внутреннюю поверхность капли падает под углом γ, который не является предельным, поэтому луч преломится в точке B и частично выйдет в воздух, немного подсветив каплю изнутри.

---

126. На сферическую водяную каплю падает луч света. Найти угол δ отклонения луча от первоначального направления после двух преломлений и одного отражения на поверхности капли, если угол падения луча на внешнюю поверхность капли равен α.

Решение

1. Выразим угол отклонения луча при каждом преломлении

$$\delta_1 = \alpha - \gamma;$$

2. Отклонение луча при внутреннем отражении

$$\delta_2 = \pi - 2\gamma;$$

3. Угол преломления определим из закона преломления

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n; \quad \Rightarrow \quad \gamma = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right);$$

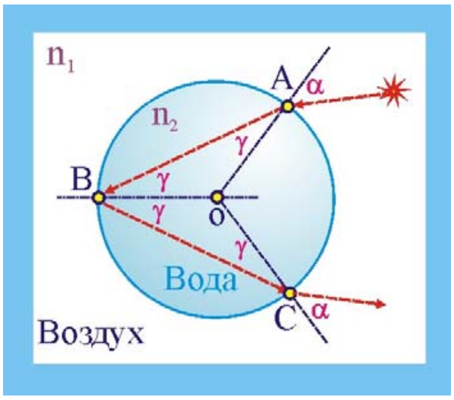


Рис. 126. Два преломления в капле

4. Суммарный угол между падающим и вышедшем лучами

$$\delta = 2\delta_1 + \delta_2 = \pi + 2\alpha - 4\beta;$$

$$\delta = \pi + 2\alpha - 4\arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right);$$

Двойное лучепреломление и отражение в каплях воды является причиной появления радуги.

---

127. В стекле с показателем преломления n_1 = 1,52 имеется сферическая полость радиусом R = 3 см, заполненная водой (n_2 = 1,33). На полость падает параллельный пучок света. Определить радиус светового пучка, проникающего внутрь полости.

Решение

1. Чтобы лучи света не попали в полость, угол преломления должен быть равен 90°, его величина определяется законом преломления

$$\sin\alpha_0 = \frac{n}{n_2};$$

2. Предположим, что радиус проникающего светового пучка равен r, из геометрических соображений

$$r = R\sin\alpha_0 = R\frac{n_1}{n_2} = 3\cdot\frac{1{,}33}{1{,}52} \cong 2{,}63\ \text{см};$$

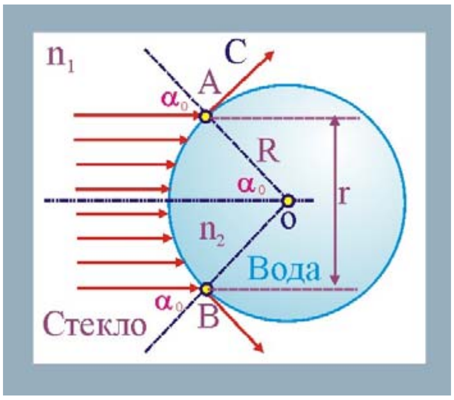


Рис. 127. Световой пучок в полости

---

128. Если смотреть на неглубокий водоём с прозрачной водой, то всегда кажется, что глубина водоёма меньше действительной. Во сколько раз глубина кажется меньше?

Решение

1. Кажущееся уменьшение глубины наблюдается вследствие явления преломления света

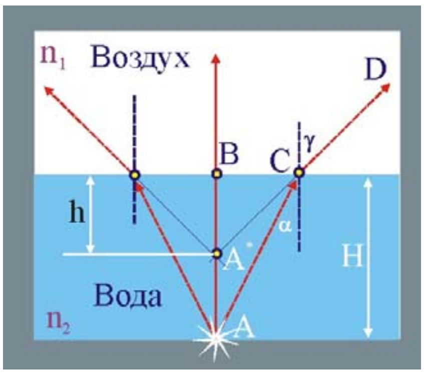


Рис. 128. Глубина водоёма

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{1}{n};$$

2. Рассмотрим узкий пучок света, идущий из точки А. Вследствие преломления на границе раздела вода – воздух возникнет изображение источника A^*.

3. Рассмотрим прямоугольные треугольники ΔABC и ΔA^*BC

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{BC}{H}; \quad \mathrm{tg}\gamma = \frac{BC}{BA*};$$

4. Ввиду малости углов тангенсы можно заменить синусами, поэтому

$$\sin\alpha = \frac{BC}{H}; \quad \sin\gamma = \frac{BC}{BA^*}; \quad \Rightarrow \quad BA^* = \frac{H}{n} = \frac{H}{1,33} = \mathrm{const};$$

---

129. При переходе света из воздуха в некоторое вещество предельный угол полного отражения света оказался равным 24^o37^*. определить это вещество.

Решение

1. Запишем закон преломления света при его переходе из воздуха ($n_1 = 1$) в некую среду с показателем преломления n_2

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{1}{n};$$

2. Для предельного угла полного отражения α_0 угол преломления $\gamma = 90^o$, другими словами, $\sin\gamma = 1$

$$\sin\alpha_0 = \frac{1}{n_2}; \quad \Rightarrow \quad n_2 = \frac{1}{\sin\alpha_0} = \frac{1}{\sin 24^0 37^*} \cong 2,4;$$

3. Искомым веществом является алмаз, у которого $n = 2,417$

---

130. На поверхность воды от точечного источника света S, расположенного на глубине падают лучи под углом $\alpha_1 = 30^o$ и $\alpha_2 = 60^o$. Изобразить дальнейший ход этих лучей.

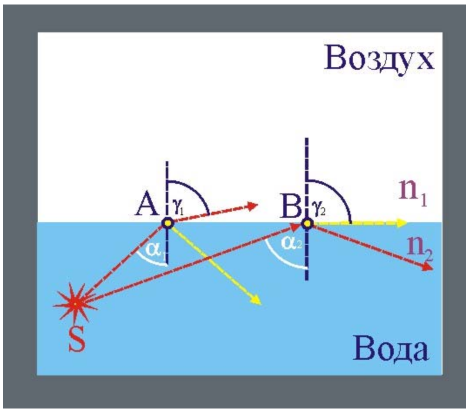


Рис. 130. Ход лучей

Решение

1. Предельное значение угла падения, при котором наблюдается явление полного внутреннего отражения в данных условиях, находится из условия

$$\sin\alpha_0 = \frac{n_1}{n_2},$$

$$\alpha_0 = \arcsin\frac{n_1}{n_2} = \arcsin\frac{1}{1,33} \cong 49^o;$$

2. Поскольку угол падения второго луча больше предельного угла для воды, то при падении луча с $\alpha_2 = 60^o$ световой луч из воды не выйдет, испытав полное отражение.

3. Для первого же луча, падающего под углом $\alpha_1 = 30^o$, закон преломления даёт:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\gamma_1} = \frac{1}{n}; \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 = \arcsin(n\sin\alpha_1) \cong 41,7^o;$$

---

131. Вычислить предельные углы полного внутреннего отражения для стекла и алмаза.

Решение

1. Запишем закон преломления света при его переходе из воздуха ($n_1 = 1$) в некую среду с показателем преломления n_2

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{1}{n};$$

2. Для предельного угла полного отражения α_0 угол преломления $\gamma = 90^o$, другими словами, $\sin\gamma = 1$

$$\sin\alpha_0 = \frac{1}{n_2}; \quad \Rightarrow \quad n_2 = \frac{1}{\sin\alpha_0}; \quad \alpha_0 = \arcsin\frac{1}{n};$$

3. Предельное значение угла для стекла с показателем преломления $n_2 = 1{,}5$

$$\alpha_{0(1)} = \arcsin\frac{1}{1{,}5} \cong 41{,}8^o;$$

4. . Предельное значение угла для алмаза с показателем преломления $n_2 = 2{,}42$

$$\alpha_{0(1)} = \arcsin\frac{1}{2{,}42} \cong 24{,}4^o;$$

---

132. Предельный угол полного внутреннего отражения для некоторого вещества составляет $\alpha_0 = 30^o$. Определить показатель преломления вещества.

Решение

1. Для предельного угла полного отражения α_0 угол преломления $\gamma = 90^o$, другими словами, $\sin\gamma = 1$

$$\sin\alpha_0 = \frac{1}{n_2}; \quad \Rightarrow \quad n_2 = \frac{1}{\sin\alpha_0} = 2;$$

Близким показателем преломления обладает медь $n_2 \cong 2{,}05$.

---

133. Стеклянная прямоугольная призма поставлена на монету. Коэффициент преломления стекла равен 1,5. Показать, что монету нельзя увидеть через боковую грань призмы.

Решение

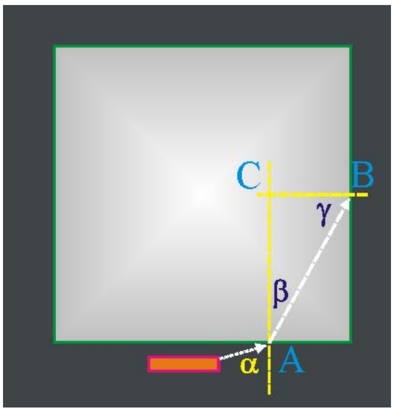


Рис. 133. Монета под призмой

1. Запишем закон преломления в виде

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n};$$

2. Из прямоугольного треугольника ΔABC следует:

$$\sin\gamma = \cos\beta;$$

3. Совмещая уравнения, получим:

$$\sin\gamma = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\alpha}{n^2}};$$

4. Анализируемый луч может выйти из призмы только в том случае, если:

$$\gamma \le \frac{1}{n}; \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}} \le \frac{1}{n},$$

или

$$\sin^2\alpha \ge n^2 - 1; \quad \sin^2\alpha \ge 1{,}4; \quad \sin\alpha \ge \sqrt{1{,}4}; \quad \sin\alpha \ge 1{,}18,$$

чего в принципе быть не может при любых значениях α.

134. Почему асфальт под дождём темнеет, а полированный гранит – нет?

Решение

1. Асфальт представляет собой шероховатую поверхность, углубления которой заполнены водой. В результате неоднократного отражения и преломления, в частности и под критическими углами, часть лучей падающих на мокрый асфальт в воздух не выдут. Такая же ситуация наблюдается и с мокрыми тканями, которые тоже кажутся темнее.

135. Задан ход лучей в соприкасающихся веществах I и II. В каком соотношении находятся оптические плотности веществ?

Решение

1. Из закона преломления следует:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{n_2}{n_1}; \quad n_1\sin\alpha = n_2\sin\gamma; \quad n_1 > n_2; \quad \Rightarrow \quad \sin\gamma > \sin\alpha;$$

2. В оптически более плотной среде луч света отклоняется от нормали на меньший угол, чем в оптически менее плотной среде. В более плотной среде луч, как бы «прижимается» к нормали.

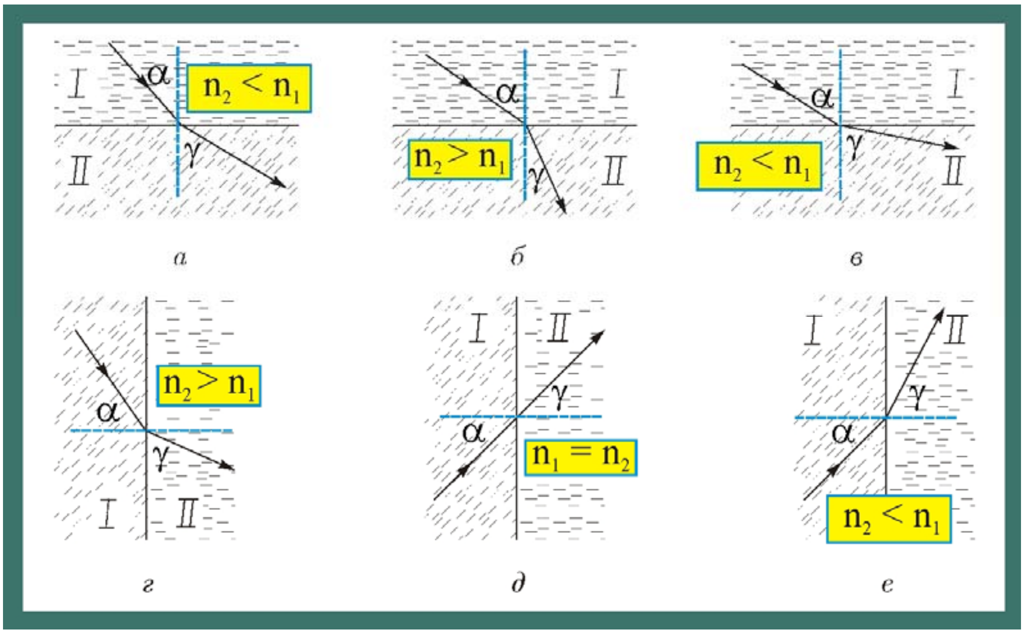


Рис. 135. Соотношение оптических плотностей

6. Прохождение света через пластинку

136. Луч света от точечного источника под углом $\alpha = 60^o$ падает на стеклянную пластинку и выйдя из пластинки смещается на a = 15 мм. Определить толщину пластинки.

Решение

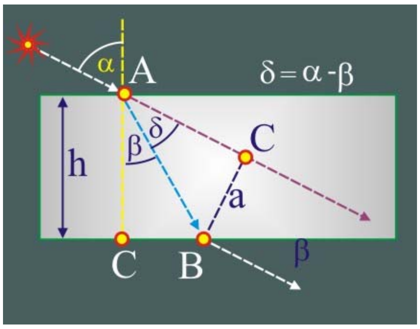


Рис. 136. Толщина пластинки

1. Из прямоугольного треугольника ΔABC выразим смещение a

$$a = AB\sin\delta = AB\sin(\alpha - \beta);$$

2. Определим угол преломления β из закона преломления

$$\beta = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right) = \arcsin\left(\frac{0{,}87}{1{,}5}\right) \cong 35{,}4^o;$$

3. Найдём величину угла δ

$$\delta = \alpha - \beta = 24{,}5^0;$$

4. Определим гипотенузу AB

$$\sin\delta = \frac{a}{AB}; \quad \Rightarrow \quad AB = \frac{a}{\sin\delta} = \frac{15}{0{,}4} \cong 37{,}5\ \text{мм};$$

5. Из ΔACB определим искомую величину h

$$h = AB\cos\beta = 37{,}5 \cdot 0{,}82 \cong 30\ \text{мм};$$

---

137. Луч света из точечного источника падает на стеклянную пластинку толщиной h = 10 см под углом $\alpha = 60^o$. Найти, под каким углом луч выйдет из пластинки и на сколько он сместится.

Решение

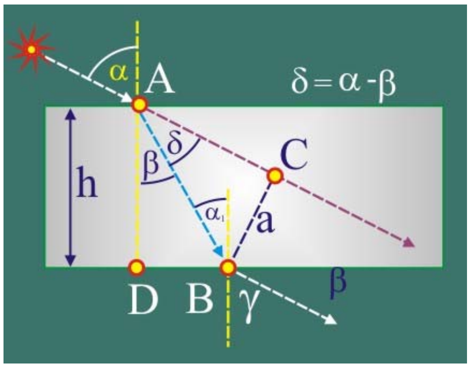


Рис. 137. Смещение луча

1. Запишем закон преломления света для точек A и B

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1} = n; \quad \frac{\sin\alpha_1}{\sin\gamma} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{n};$$

Совместное рассмотрение уравнений показывает, что входящий и выходящий лучи параллельны.

2. Определим из закона преломления величину угла преломления β

$$\beta = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right) = \arcsin\left(\frac{0{,}87}{1{,}5}\right) \cong 35{,}4^o;$$

3. Определим из ΔADB гипотенузу AB

$$h = AB\cos\beta; \quad AB = \frac{h}{\cos\beta} = \frac{10}{0{,}8} \cong 12{,}5\ \text{см};$$

4. Из ΔABC определим катет BC = a:

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{a}{AB}; \quad \Rightarrow \quad a=AB\cos(\alpha-\beta)\cong 12{,}2\cdot\cos 24{,}6^{\circ}\cong 11{,}3\text{ см};$$

138. Найти положение изображения S^* источника света S, расположенного на расстоянии y = 4 см от передней поверхности плоскопараллельной стеклянной пластинки толщиной h = 1 см, посеребренной с задней стороны. Изображение рассмотреть перпендикулярно плоскости пластинки.

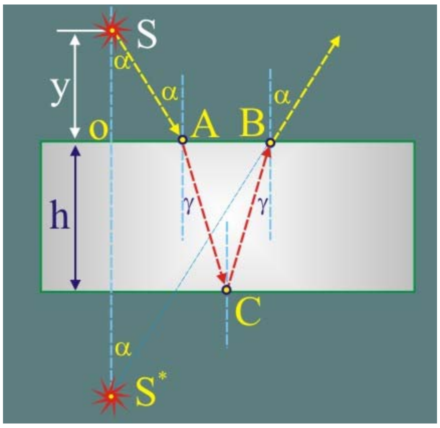


Рис. 138. Изображение источника

Решение

1. Для построения изображения используем два луча: один нормальный к поверхности пластинки, а второй, направленный под малым углом α к нормали. С учётом малости углов, будем далее считать

$$\sin\alpha\approx\alpha; \quad \sin\gamma\approx\gamma;$$

2. Анализ треугольников ΔSOA, ΔABC и ΔS^*OB лаёт основания записать следующие соотношения:

$$OA=SO\alpha=y\alpha; \quad AB=AC2\gamma=2h\gamma;$$

$$OB=OS^*\alpha;$$

3. Согласно закону преломления углы падения и преломления связаны отношением:

$$\alpha=n\gamma;$$

4. Совместное решение записанных выше уравнений с учётом OB = AO + AB

$$OS^*\alpha=\frac{2h\alpha}{n}+y\alpha=\alpha\left(\frac{2h}{n}+y\right); \quad OS^*=\frac{2h}{n}+y=\frac{2}{1{,}5}+4\cong 5{,}33\text{ см};$$

139. Луч света падает на плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной h = 2 см под углом α = 30°. Какое расстояние a будет между падающим лучом и лучом, претерпевшем двукратное отражение от противоположных поверхностей пластинки.

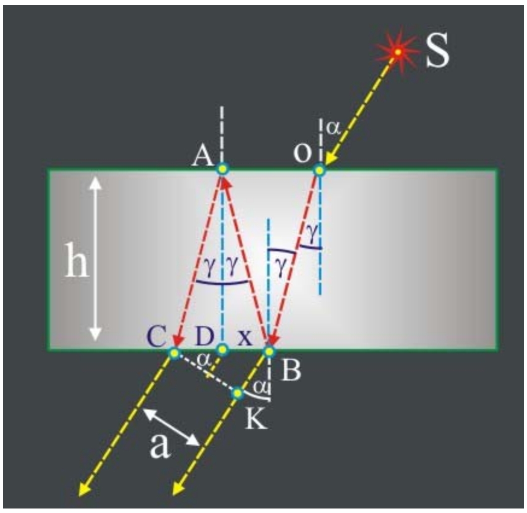


Рис. 139. Двойное отражение

Решение

1. Угол преломления γ можно определить из закона преломления света

$$\sin\gamma=\frac{\sin\alpha}{n}; \quad \gamma=\arcsin\left(\frac{0{,}5}{1{,}5}\right)\cong 19{,}5^{\circ};$$

2. Найдём величину отрезка DB = x из прямоугольного треугольника ΔADB

$$\frac{x}{h}=\text{tg}\gamma; \quad x=h\text{tg}\gamma=2\cdot 0{,}35=0{,}7\text{ см};$$

3. Рассмотрим далее прямоугольный треугольник ΔCBK

$$\sin\alpha=\frac{a}{2x}; \quad a=2x\sin\alpha=1{,}4\cdot 0{,}5=0{,}7\text{ см};$$

140. У плоскопараллельной пластинки, имеющей толщину h = 5 см, нижняя поверхность посеребрена. Луч света, падающий на пластинку под углом α = 30^o, частично отражается от поверхности, частично проникает внутрь пластинки, отразившись от нижней зеркальной поверхности этот луч преломляется и выходит в воздух параллельно первому отражённому лучу. Найти показатель преломления материала из которого изготовлена пластинка, если расстояние между падающим и выходящим лучами a = 2,5 см.

Решение

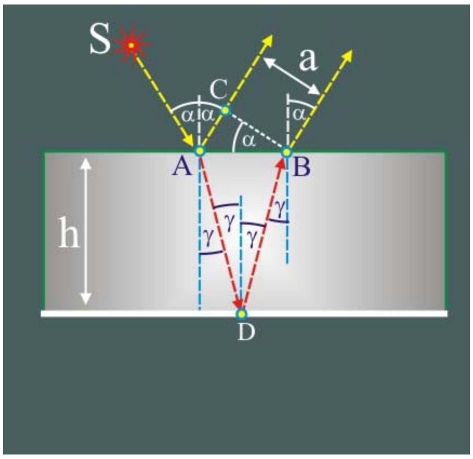


Рис. 140. Смещение лучей

1. Определим из ΔABC величину AB

$$AB = \frac{a}{\cos\alpha};$$

2. Эту же величину можно выразить из треугольника ΔADB, который состоит из двух равновеликих прямоугольных треугольников

$$AB = htg\gamma + htg\gamma = 2htg\gamma;$$

4. Углы α и γ связаны законом преломления

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n;$$

7. Решим совместно полученные уравнения

$$\frac{a}{\cos\alpha} = 2h\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = \frac{\sin\alpha}{n\sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}}}; \quad \Rightarrow \quad n = \sin\alpha\sqrt{1+\left(\frac{2h}{a}\cos\alpha\right)^2};$$

$$n = 0{,}5\sqrt{1+\left[\frac{10}{2{,}5}0{,}87\right]^2} \cong 1{,}81;$$

---

141. Определить толщину стеклянной плоскопараллельной пластинки h, если точку на задней поверхности наблюдатель видит на расстоянии x = 5 см от передней поверхности. Показатель преломления стекла n = 1,6. Луч зрения перпендикулярен поверхности.

Решение

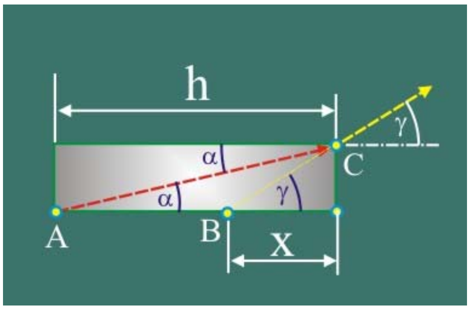


Рис. 141. Толщина пластинки

1. Выберем два луча, один нормальный к поверхности и второй − составляющий с поверхностью малый угол, чтобы

$$tg\alpha \approx \sin\alpha; \quad \sin\alpha \approx \alpha;$$

2. Построение хода таких лучей, даёт два прямоугольных треугольника из которых, в частности, следует:

$$xtg\gamma = htg\alpha; \quad \Rightarrow \quad \frac{tg\alpha}{tg\gamma} = \frac{x}{h};$$

3. Вместе с тем, по закону преломления

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{n}; \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{h} = \frac{1}{n}; \quad \Rightarrow \quad h = xn = 8\text{ см};$$

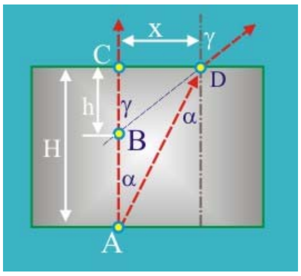


Рис. 142. Царапина

142. На нижнюю грань плоскопараллельной стеклянной пластинки нанесена царапина. Наблюдатель, глядя сверху, видит царапину на расстоянии h = 4 см от поверхности. Определить толщину пластинки.

Решение

1. Расположим царапину в точке A и построим её изображение, которое возникнет в точке B.

2. Рассмотрим прямоугольный треугольник ΔACD

$$AC = H = \frac{x}{tg\alpha}.$$

3. С другой стороны, из ΔBCD

$$x = htg\gamma;$$

4. Объединяя уравнения, получим:

$$H = \frac{htg\gamma}{tg\alpha};$$

5. Ввиду малости углов, заменим тангенсы синусами

$$H = h\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = hn = 4\cdot 1{,}5 = 6\text{ см};$$

---

143. На дне стакана, заполненного водой, на H = 10 см лежит монета. На каком расстоянии от поверхности видит её глаз наблюдателя?

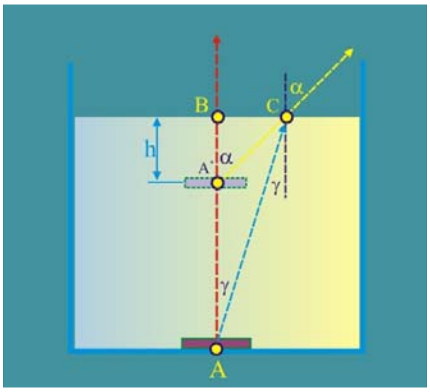


Рис. 143. Монета на дне стакана

Решение

1. Искомое расстояние h из ΔA*BC определится как:

$$h = \frac{BC}{tg\alpha};$$

2. Величину BC можно так же выразить из треугольника ΔABC

$$BC = Htg\gamma; \quad \Rightarrow \quad h = H\frac{tg\alpha}{tg\gamma};$$

3. Ввиду малости углов

$$h = H\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{1}{n}; \Rightarrow \quad h = \frac{H}{n} = \frac{10}{1{,}33} \cong 7{,}52\text{ см};$$

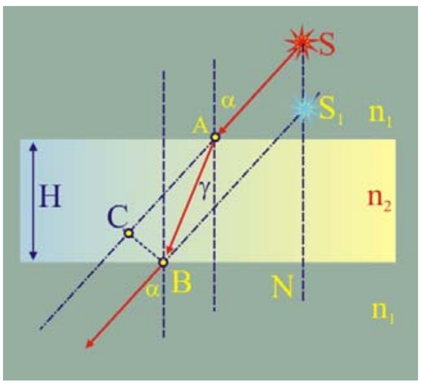


Рис. 144. Пластинка в среде

144. Плоскопараллельная пластинка толщиной H с показателем преломления n_2 расположена в среде с показателем преломления $n_1 < n_2$. Луч света из точки S падает на пластинку под углом α_1. Чему равен угол между падающим и преломлённым лучом, вышедшим из пластинки? Каково боковое смещение луча, прошедшего сквозь пластинку? На сколько ближе будет казаться точка S, если её рассматривать через пластинку под малым углом к нормали N?

Решение

1. Ввиду того, что $n_2 > n_1$ при проникновении в пластинку луч буден приближаться к нормали, т.к. скорость распространения в окружающей среде больше чем в материале пластинки, т.е. угол падения α будет больше угла преломления γ.

2. Запишем закон преломления для точек входа и выхода луча

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{n_2}{n_1}; \quad \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{n_1}{n_2};$$

3. Из ΔABC смещение луча BC определится как:

$$BC = AB\sin(\alpha - \gamma) = \frac{H}{\cos\gamma}\sin(\alpha - \gamma);$$

4. Образуем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} &= \frac{n_2}{n_1}; \\ BC &= \frac{\sin(\alpha-\gamma)}{\cos\gamma}; \end{aligned}\right\}$$

из которой исключим угол преломления γ

$$BC = H\sin\alpha - \frac{n_1\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\alpha}}H;$$

5. Определим далее расстояние SS_1

$$SS_1 = y = \frac{BC}{\sin\alpha} = H - \frac{n_1\cos\alpha}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\alpha}};$$

6. При малых значениях угла α

$$y = H\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right);$$

---

7. Прохождение света сквозь призму

145. Определить угол отклонения луча стеклянной призмой, преломляющий угол которой 3^o, если угол падения луча на переднюю грань призмы равен нулю.

Решение

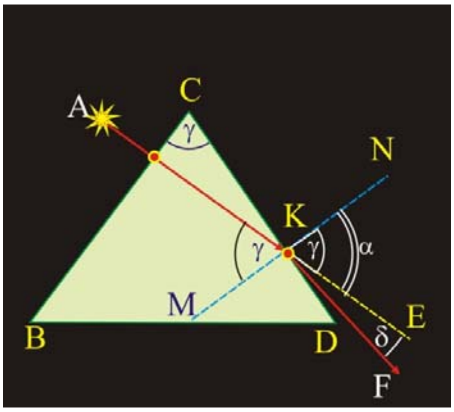


Рис. 145. Угол отклонения

1. Из построений хода заданного луча видно:

$$\angle AKM = \angle BCD = \angle NKE = \gamma\,;$$

2. Обозначив $\angle NKF = \alpha$, $\angle EKF = \gamma$, можно видеть, что

$$\delta = \alpha - \gamma\,;$$

3. Запишем закон преломления для грани призмы CD

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{1}{n}\,;$$

4. Вследствие малости углов α и γ закон преломления можно переписать в виде:

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{т}; \quad \Rightarrow \quad \alpha = \gamma n\,;$$

5. Подставим значение угла α в уравнение угла δ

$$\delta = \gamma n - \gamma = \gamma(n-1) = 3\cdot(1{,}5-1) = 1{,}5^o \cong 0{,}0261\ рад\,;$$

146. На стеклянную трехгранную призму с преломляющим углом 45^o падает луч света и выходит из неё под углом 30^o. Найти угол падения луча на призму.

Решение

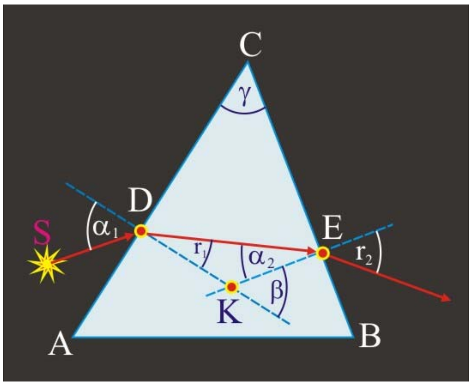


Рис. 146. Угол падения

1. Построение хода заданного луча внутри призмы позволяет получить ΔDKE у которого внешний угол β равен сумме двух его внутренних углов

$$\beta = r_1 + \alpha_2\,;$$

2. Угол β получен пересечением двух нормалей к граням призмы, следовательно:

$$\beta = \gamma\,;$$

3. Таким образом, для угла γ можно записать уравнение

$$\gamma = r_1 + \alpha_2; \quad \Rightarrow \quad r_1 = \gamma - \alpha_2\,;$$

4. Запишем далее закон преломления для грани CB

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin r_2} = \frac{1}{n}; \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha_2 = \frac{\sin r_2}{b} = \frac{\sin 30^o}{1{,}5} \cong 0{,}333; \quad \alpha_2 = \arcsin 0{,}333 \cong 19{,}5^o\,;$$

5. Определим далее величину угла r_1

$$r_1 = 45^\circ - 19{,}5^\circ = 25{,}5^\circ;$$

6. Из закона преломления для грани АС

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin r_1} = n; \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \arcsin(n\sin\alpha_1) \cong 40^\circ;$$

---

147. Луч света выходит из призмы под тем же углом, под каким входит в призму, отклоняясь от первоначального направления на угол θ = 15°. Преломляющий угол призмы γ = 45°. Найти показатель преломления материала призмы n.

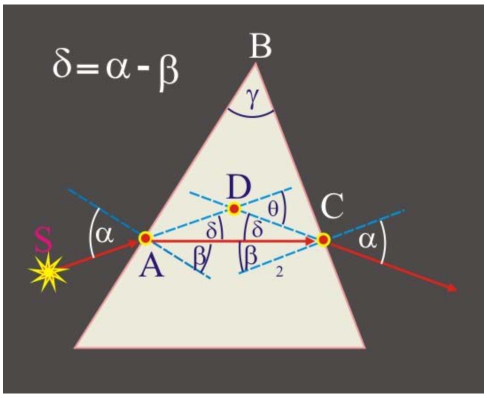


Рис. 147. Показатель преломления

Решение

1. Внешний угол равнобедренного треугольника ΔADC θ является внешним углом, поэтому

$$\theta = 2(\alpha - \beta);$$

2. Сумма углов в ΔABC равна π, тогда:

$$\gamma + 2\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \pi; \quad \Rightarrow \quad \gamma = 2\beta;$$

3. Взаимосвязь между углами α и β устанавливается законом преломления

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n;$$

4. Для коэффициента преломления можно записать уравнение

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\theta+\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos(\theta+\gamma)}{1-\cos\gamma}} = \sqrt{\frac{1-\cos 60^\circ}{1-\cos 45^\circ}} \cong 1{,}29;$$

---

148. Преломляющий угол γ трёхгранной призмы равен 45°. Луч света выходит из призмы под тем же углом, под каким он в неё и входит, при этом луч отклоняется на угол δ = 25°. Найти показатель преломления материала призмы.

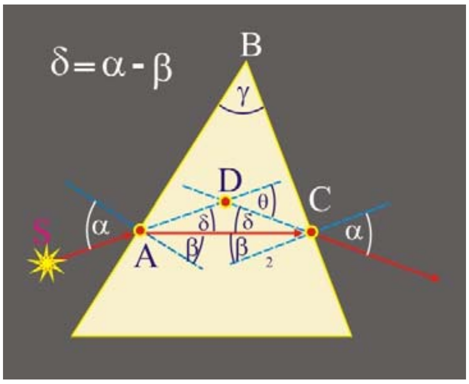


Рис. 148. Отклонение луча

Решение

1. При каждом из двух преломлений луч отклоняется на величину δ/2, другими словами,

$$\alpha - \beta = \delta;$$

2. Из построений хода заданного луча видно, что

$$\beta = \frac{\gamma}{2};$$

3. Из закона преломления следует:

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\frac{\gamma+\delta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \cong 1{,}5;$$

---

149. Преломляющий угол призмы равен $\gamma = 60^o$. Угол падения луча на грань призмы $\alpha = 30^o$. Определить угол отклонения луча δ от первоначального направления при его прохождении через призму. Показатель преломления материала призмы принять равным n = 1,5.

Решение

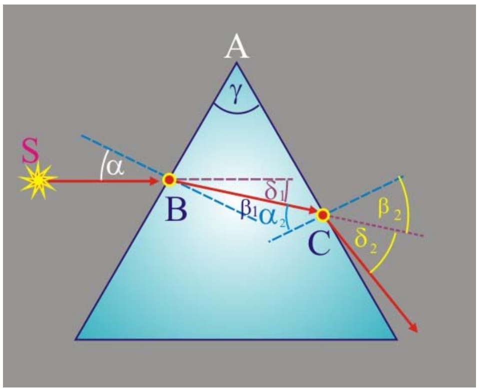


Рис. 149. Угол отклонения луча δ

1. Определим угол при первом преломлении луча

$$\beta_1 = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right) = \arcsin\frac{0,5}{1,5} \cong 19,5^o;$$

2. При первом преломлении луч отклонится на угол

$$\delta_1 = \alpha - \beta_1 = 10,5^o;$$

3. Из ΔABC имеем:

$$\gamma + (90^o - \beta_1) + (90^o - \alpha_2) = 180^o; \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = \gamma - \beta_1 = 40,5^o;$$

4. Угол преломления на второй грани призмы

$$\beta_2 = \arcsin(n \sin\alpha_2) = \arcsin(1,5 \cdot 0,65) \cong 77^o;$$

5. Угол отклонения луча при втором преломлении

$$\delta_2 = \beta_2 - \alpha_2 = 36,5^o;$$

6. Суммарный угол отклонения

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 47^o;$$

---

150. Найти угол θ отклонения луча в стеклянной призме с показателем преломления материала n = 1,8 и с отклоняющим углом $\gamma = 5^o$, если луч падает на грань призмы под малым углом.

Решение

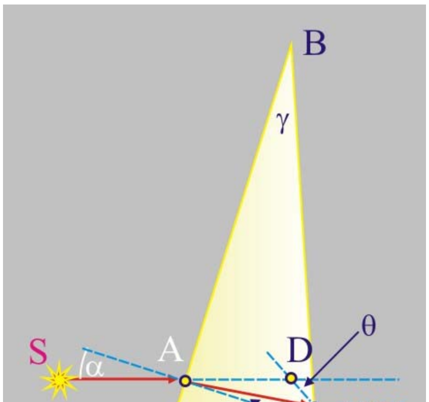


Рис. 150. Призма с $\gamma = 5^o$

1. Если луч падает на грань АВ под углом α, то преломляющий угол β может быть выражен законом преломления

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n;$$

2. Закон преломления для грани призмы CB

$$\frac{\sin\delta}{\sin\gamma} = \frac{1}{n};$$

3. Искомый угол θ является внешним для треугольника Δ ADC, поэтому

$$\theta = (\alpha - \beta) + (\gamma - \delta);$$

4. Угол $\angle AKC = \pi - \varphi$, откуда следует, что

$$\gamma = \beta + \delta;$$

5. Решая систему полученных выше четырёх уравнений, получим

$$\theta = (n-1)\gamma = 0,8 \cdot 5 = 4^o;$$

---

151. Луч падает на грань стеклянной призмы под прямым углом. Определить угол δ отклонения луча, если отклоняющий угол призмы равен: а) 30^o; б) 60^o.

Решение

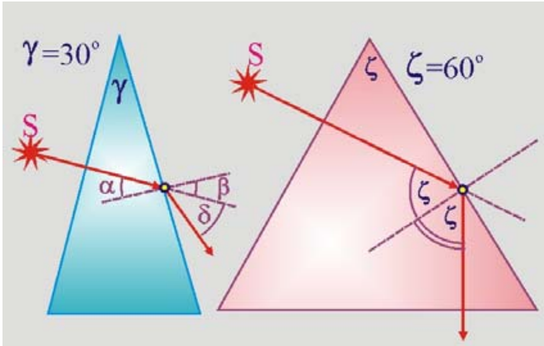


Рис. 151 Две призмы

1. При нормальном падении луча на грань левой призмы угол падения луча на вторую грань α равен преломляющему углу γ

$$\alpha = \gamma;$$

2. Угол преломления для случая *а* по закону преломления определится как

$$\beta = \arcsin(n\sin\alpha) = \arcsin(1,5 \cdot 0,5) \cong 48,6^o;$$

3. При этом угол отклонения призмой луча составит:

$$\delta = \beta - \alpha = 18,6^o;$$

4. Во втором случае будет наблюдаться полное внутренне отражение луча, т.е. преломления на противоположной грани не происходит, угол отклонения составит

$$\delta = \gamma = 60^o;$$

---

152. На боковую грань равнобедренной призмы падает луч, параллельный основанию призмы. При каком условии, луч, пройдя призму, не изменит своего направления?

Решение

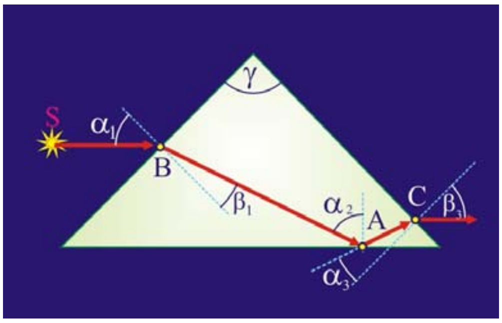


Рис. 152.1. Полное отражение

1. Луч при заданных условиях не именит своего первоначального направления, если, помимо двух преломлений на гранях призмы, он испытает полное внутреннее отражение от основания призмы, куда он должен попасть под углом, превышающим значение угла предельного отражения.

2. Закон отражения позволяет записать:

$$\beta_1 = \alpha_3; \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \beta_3;$$

3. Если точка отражения от основания будет расположена на его середине, то вышедший луч не только сохранит направление вошедшего луча, но и будет лежать на его продолжении.

4. Определим, при каких значениях показателя преломления материала призмы такое явление будет возможным. Полное внутреннее отражение происходит при

$$\alpha_2 \ge \arcsin\frac{1}{n};$$

5. Запишем соотношения между углами

$$90^o + \beta_1 = \frac{\gamma}{2} + \alpha_2; \quad \alpha_1 = \frac{\gamma}{2}; \quad \sin\beta_1 = \frac{\sin\alpha_1}{n}; \quad \Rightarrow \quad \beta_1 \ge \frac{\gamma}{2} + \arcsin\frac{1}{n} - 90^o;$$

$$\sin\frac{\gamma}{2} \ge -n\cos\left(\frac{\gamma}{2}+\arcsin\frac{1}{n}\right);$$

6. Чтобы последнее соотношение выполнялось необходимо, чтобы:

$$\frac{\gamma}{2}+\arcsin\frac{1}{n} \le 90^o; \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} \le \cos\frac{\gamma}{2};$$

7. Если использовать призму с $\gamma = 90^o$, что чаще всего и делается на практике, то:

$$n \ge \frac{1}{\cos 45^o} = \sqrt{2};$$

Последнее условие выполняется практически для всех сортов стекла. Поворотные призмы, они именно так называются, широко применяются в оптических устройствах, где необходимо переворачивать изображение, например в зеркальных фотокамерах и биноклях.

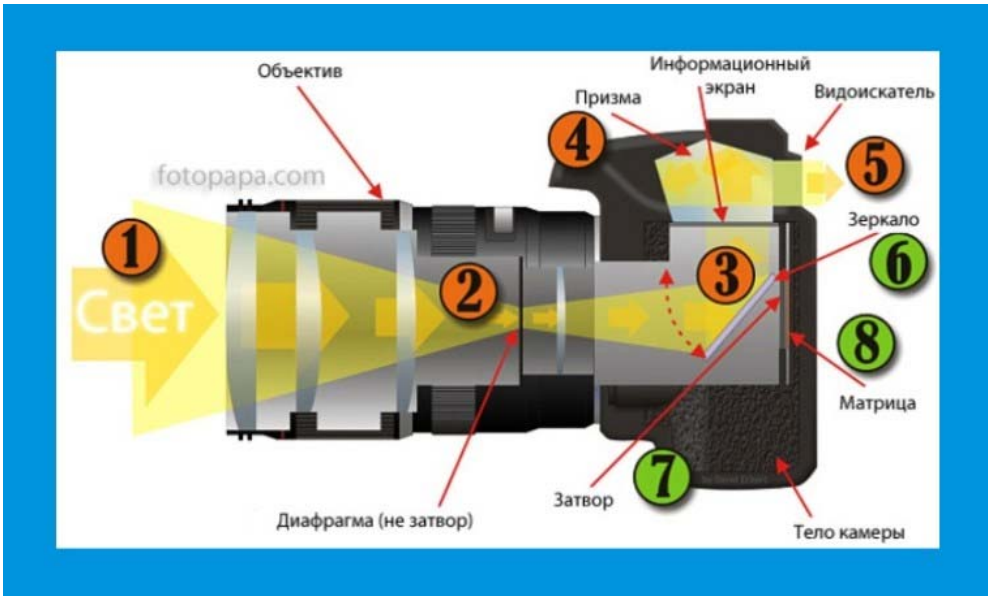


Рис. 152.2. Зеркальная фотокамера

---

153. Световой луч SD падает на правильную трёхгранную призму перпендикулярно грани АС. Определить дальнейший ход луча в призме и за гранью ВС, если показатель преломления стела n = 1,8.

Решение

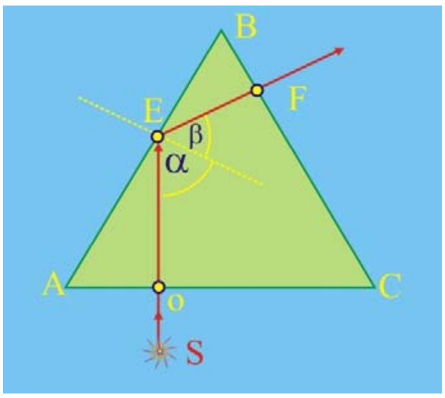


Рис. 153. Правильная призма

1. Исходный луч попадает в точку О будучи направленным перпендикулярно основанию призмы, поэтому не преломляясь на этой грани призмы следует в прежнем направлении далее до встречи с гранью АВ.

2. Из прямоугольного треугольника ΔАОЕ следует:

$$\angle AEO = 90^o - \angle OAE = 30^o;$$

3. Из этого следует, что угол $\alpha = 60^o$. Далее возможны три случая: а) угол падения α меньше предельного угла полного отражения α_0, в этом случае в точке Е луч раздвоится, одна его составляющая останется в пределах призмы, а вторая – выйдет в воздух, т.е. возникнут, как и положено, два луча: отражённый и пре-

ломлённый; б) когда $\alpha_0 = \alpha$ то тоже образуются два луча, отражённый и преломлённый, причём отражённый луч направится от точки Е к точке В; в) $\alpha > \alpha_0$ – на грани АВ будет иметь место полное отражение.

4. Определим далее угол α_0 для стекла

$$\alpha_0 = \arcsin\frac{1}{n} = \arcsin\frac{1}{1,8} = 33,7^{o};$$

5. Как видно, для данного сорта стекла $\alpha > \alpha_0$, т.е. в точке Е произойдёт полное отражение, причём угол отражения $\beta = \alpha = 60^{o}$.

6. Из анализа прямоугольного треугольника ΔEBF видно, что $\angle BEF = 30^{0}$, а $\angle EBF = 60^{o}$, следовательно, в точку F луч упадёт перпендикулярно грани ВС и не преломляясь торжественно выйдет из призмы.

---

154. Внутри стекла расположена воздушная полость в виде правильной треугольной призмы. Луч света из стекла падает на грань призмы параллельно её основанию. Попадёт ли луч снова в стекло, пройдя воздушную полость?

Решение

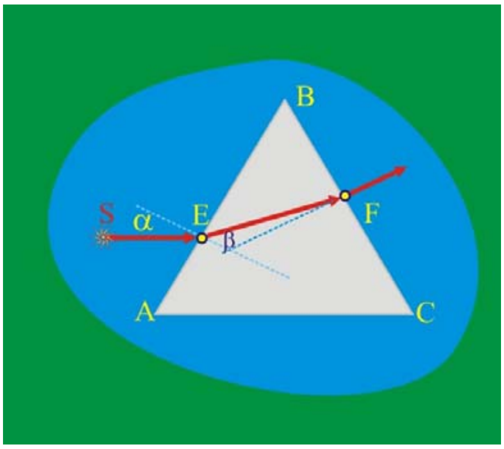


Рис. 154. Воздушная призма

1. Как выяснено в предыдущей задаче предельный угол полного отражения для стекла составляет $\alpha_0 \approx 34^{o}$. В рассматриваемом случае луч света падает на грань призмы пол углом $\alpha = 30^{o}$, что меньше α_0, т.е. в точке Е луч испытает преломление, под углом $\beta > \alpha$, переходя из оптически более плотной среды (стекло $n_1 > 1,4$) в менее оптически плотную среду, в воздух с $n_2 = 1$.

2. На грань ВС луч упадёт под углом $\alpha_2 = 30^{o}$, и без преломления снова попадёт в стекло.

---

8. Преломление света на сферических поверхностях

155. На поверхности воды плавает непрозрачный шар радиусом R = 1 м наполовину погруженный в воду. На какой максимальной глубине H_m нужно поместить точечный источник света, чтобы ни один световой луч не попал в воздух.

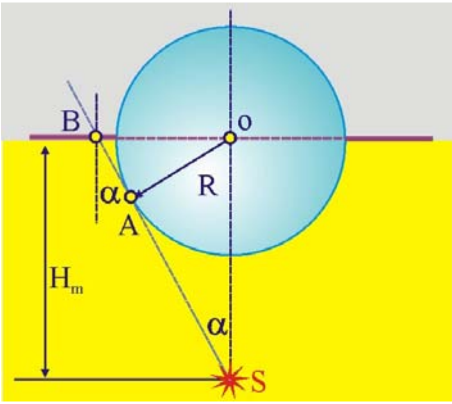


Рис. 155. Плавающий шар

Решение

1. Чтобы заданные условия выполнялись, лучи сета должны падать на поверхность воды под предельными углами полного отражения. В этом случае часть лучей будут перекрыты шаром, а остальная их часть станет распространяться по границе раздела «вода – воздух». Указанное условие будет выполняться при

$$\sin\alpha = \frac{R}{H_m};$$

2. Синус угла падения определится из закона преломления, записанного для предельных значений углов

$$\sin\alpha = \frac{1}{n}; \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} = \frac{R}{H_m}; \quad H_m = Rn = 1{,}33\text{ м};$$

156. Два параллельных луча, расстояние между которыми равно радиусу R круглого прямоугольного прозрачного цилиндра, падают на боковую поверхность этого цилиндра. Лучи параллельны основанию цилиндра. Определить величину показателя преломления материала цилиндра n, при котором лучи пересекаются на его поверхности.

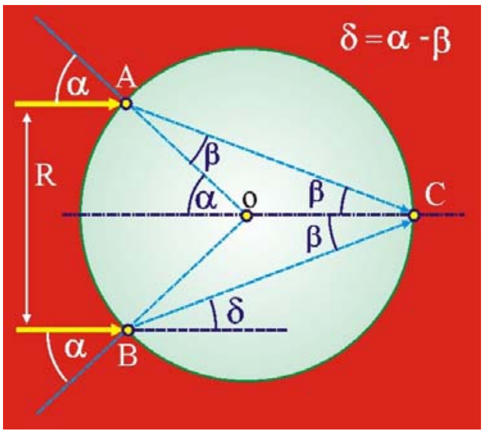


Рис. 156. Прозрачный цилиндр

Решение

1. Если расстояние между падающими лучами равно радиусу цилиндра, то угол падения будет равен $\alpha = 30^\circ$.

2. При пересечении лучей в точке C на диаметрально противоположной стороне цилиндра

$$\beta = \frac{\alpha}{2} = 15^\circ;$$

3. Запишем закон преломления

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n; \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 15^\circ} \cong 1{,}92;$$

157. Луч света падает на стеклянную полусферу радиуса R на расстоянии a от его оси симметрии параллельно ей. На какой угол α отклонится вышедший из полусферы луч, если a = 0,5 R, n = 1,414?

Решение

1. Угол преломления луча на границе «стекло – воздух», как видно из построения, определится как:

$$\gamma = \alpha + \beta,$$

где β – угол падения луча на эту границу.

2. Из прямоугольного треугольника ΔABO видно, что

$$\sin\beta = \frac{a}{R};$$

3. Запишем далее закон преломления

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha} = n,$$

откуда следует, что

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{na}{R};$$

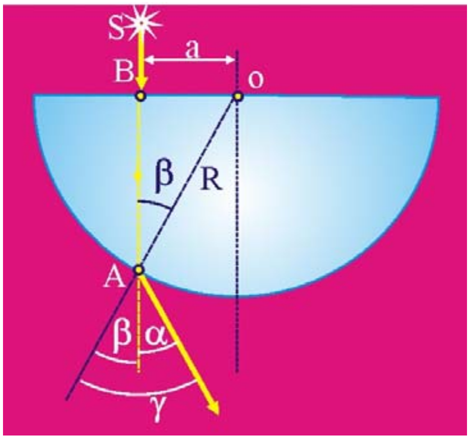


Рис. 157. Полусфера

4. Разрешим последнее уравнение относительно α

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{na}{R}\right) - \arcsin\left(\frac{a}{R}\right) = \arcsin(0{,}5\cdot 1{,}414) - \arcsin 0{,}5 = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ;$$

---

158. Световой луч падает на поверхность стеклянного шала. Угол падения α = 45°, показатель преломления материала шара n = 1,41. Определить угол γ между падающим и отраженным лучом.

Решение

1. Луч от источника S дважды испытывает преломление на границах раздела «воздух – стекло» и «стекло – воздух», нормаль в токах падения луча совпадает с радиусами шара.

2. Искомый угол можно записать в виде уравнения:

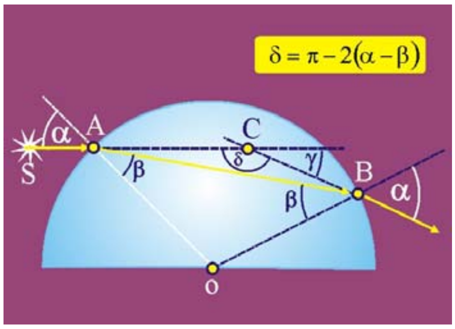


Рис. 158. Угол отклонения луча γ

$$\gamma = 2(\alpha - \beta),$$

где α – угол падения луча, β – угол преломления луча на границе сред.

3. Преломляющий угол определим из закона преломления

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}; \quad \Rightarrow \quad \beta = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right);$$

4. Подставляя значение β в первое уравнение, получим:

$$\gamma = 2\alpha - 2\arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right) = 90^\circ - 2\arcsin\left(\frac{0{,}707}{1{,}41}\right) = 30^\circ;$$

---

159. На стеклянный шар радиусом R с показателем преломления n падает узкий пучок света, образуя угол α с осью, проведенной через точку падения и центр шара. На каком расстоянии d от этой оси свет выйдет из шара?

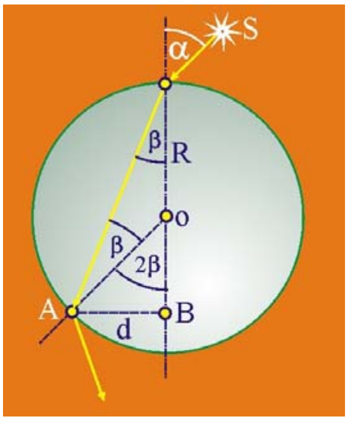


Рис. 159. Выход луча

Решение

1. Из прямоугольного треугольника ΔAOB видно, что

$$d = R\sin 2\beta = 2R\sin\beta\cos\beta;$$

2. Угол преломления β определим из закона преломления

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n};$$

3. Выражая косинус через синус, получим

$$\cos\beta = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha};$$

4. Решая полученные уравнения совместно, получим:

$$d = \frac{2R}{n^2}\sin\alpha\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha};$$

---

160. На поверхность стеклянного шара с показателем преломления n < 2 падает узкий пучок света, образуя малый угол α с осью шара, проведенной через точку падения и центр шара. Под каким углом γ е этой оси пучок выйдет из шара.

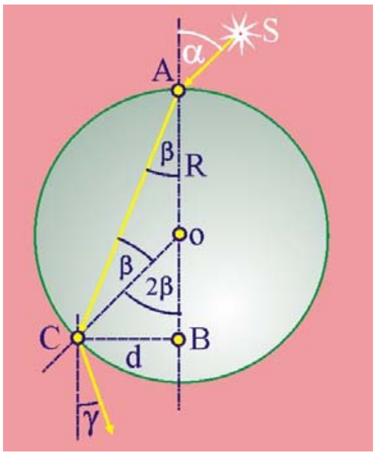


Рис. 160. Угол выхода луча

Решение

1. Если угол падения луча считать малым, то можно положить, что

$$\sin\alpha \approx \alpha; \quad \sin\beta \approx \beta;$$

2. Для равнобедренного треугольника ΔAOC угол ∠COB является внешним, поэтому:

$$\angle COB = 2\beta;$$

3. Построение преломлённого луча и его выход в точке C позволяют выразить угол γ следующим образом

$$\gamma = 2\beta - \alpha;$$

4. Запишем далее закон преломления с учетом малости углов

$$\beta \approx \frac{\alpha}{n};$$

5. Подставим значение β в уравнение угла γ

$$\gamma = \frac{2\alpha}{n} - \alpha = \alpha\frac{2-n}{n};$$

---

161. На внешней поверхности шара помещён точечный источник света. При каких значениях показателя преломления n все выходящие из шара лучи (за исключением луча, прошедшего через центр шара) будут наклонены относительно оси, проведенной через источник и центр шара?

Решение

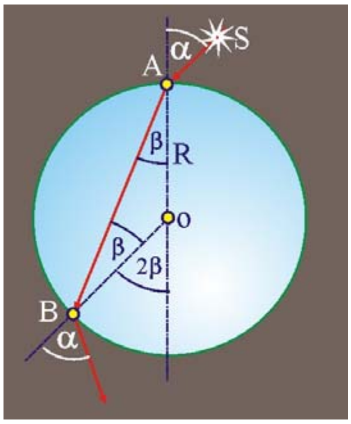


Рис. 161. Отклонение луча

1. Поскольку источник света расположенный на внешней поверхности шара испускает лучи во всех направлениях, то часть из них попадает внутрь шара. Из построения хода одного из лучей с углом падения α видно, что заданное условие выполняется при соотношении:

$$\alpha > 2\beta;$$

2. Как известно из тригонометрии:

$$\alpha \le \frac{\pi}{2}; \quad \Rightarrow \quad 2\beta \le \frac{\pi}{2},$$

что позволяет исходное уравнение переписать следующим образом

$$\sin\alpha > \sin 2\beta;$$

3. Закон преломления света

$$\sin\alpha = n\sin\beta, \quad \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}$$

и тригонометрическое тождество

$$\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta$$

позволяет перейти к следующему уравнению

$$\frac{2}{n^2}\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} < 1;$$

4. Для определения показателя преломления рассмотрим предельный случай $\alpha = 0$

$$\frac{2}{n^2}n < 1; \quad \Rightarrow \quad n > 2;$$

---

162. Тонкий пучок света, падающий на полушарие из стекла с показателем преломления n перпендикулярно его плоской грани, собирается на расстоянии S от выпуклой поверхности. На каком расстоянии S_1 от плоской поверхности полушария соберутся лучи, если пучок света пустить с обратной стороны?

Решение

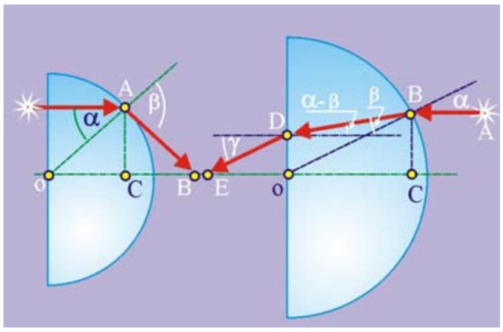


Рис. 162. Свет в стеклянном полушарии

1. При падении луча на плоскую грань полусферы луч преломившись на границе раздела, попадёт в точку В. Так как по условию луч тонкий, то

$$\beta \approx \tau = n\alpha;$$

2. Из геометрических соображений при условии малости углов

$$AC = OA\beta = BC(\alpha - \beta),$$

откуда:

$$BC = S \approx \frac{r}{n-1};$$

3. При распространении света в обратном направлении $\beta \approx \alpha n$ и $\gamma \approx (\alpha - \beta)n$, поэтому искомое расстояние можно записать уравнением:

$$S_1 = OE \approx \frac{OD}{\gamma} \approx \frac{OC[\alpha - (\alpha - \beta)]}{n(\alpha - \beta)} \approx \frac{r}{n(n-1)} = \frac{S}{n};$$

163. Тонкий пучок света, проходящий через центр стеклянного шара, фокусируется на расстоянии от центра шара, вдвое превышающем его радиус. Определить показатель преломления материала шара.

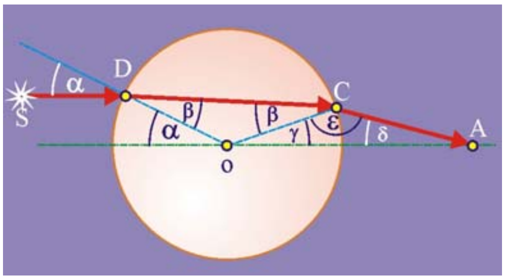


Рис. 163. Показатель преломления

Решение

1. Поскольку углы α, β, γ и δ малы, то закон преломления можно записать следующим образом

$$\alpha \approx \beta n;$$

2. Запишем соотношение между углами, выразив углы γ и δ через угол преломления β

$$\gamma = \pi - \alpha - (\pi = 2\beta) = 2\beta - \alpha = \beta(2 - n);$$

$$\delta = \alpha - \gamma = 2\beta(n-1);$$

3. Воспользуемся далее теоремой синусов для ΔOAC

$$\frac{OA}{OC} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\delta};$$

4. С учётом того, что

$$\sin\varepsilon = \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \approx \alpha \approx \beta n;$$

$$\frac{OA}{OC} = 2;$$

получаем окончательно

$$\frac{\beta n}{2\beta(n-1)} = 2; \quad \Rightarrow \quad n = 2;$$

164. Тонкий пучок света падает перпендикулярно на плоскую поверхность оптически прозрачной полусферы. Радиус полусферы равен R, расстояние от луча до оси a = 0,6 R, показатель преломления материала полусферы n = 4/3. Определить расстояние от точка O до точки A пересечения преломлённого луча с осью симметрии.

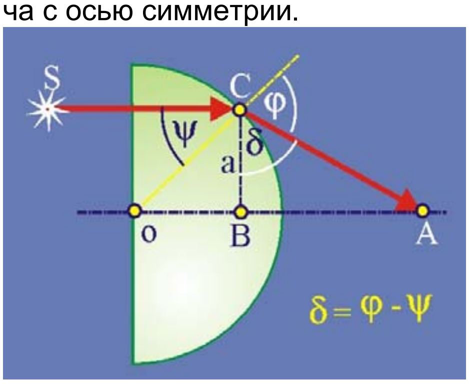


Рис. 164. Пересечение лучом оси

Решение

1. По условию задачи

$$\sin\psi = \frac{a}{R} = 0{,}6; \quad \psi \cong 37^\circ;$$

2. Запишем закон преломления

$$n\sin\psi = \sin\varphi;$$

$$\sin\varphi = \frac{4}{3}\cdot 0{,}6 = 0{,}8; \quad \varphi \cong 53^\circ;$$

3. Определим расстояния OB и BA. Из треугольника ΔABC

$$AB = a\,\mathrm{ctg}\delta \cong 2R;$$

$$OB = R\cos\psi \approx 0{,}8R; \quad OA = AB + OB \cong 2{,}8R;$$

9. Собирающие и рассеивающие линзы

165. Задана главная оптическая ось тонкой линзы MN, точка A и её изображение A_1. Определить местоположение линзы и её фокусов.

Решение

1. Необходимо построить три луча: 1 луч, исходит из заданной точки и соединяется с её изображением, этот луч не преломляется, потому что проходит через оптический центр линзы; 2 луч, падающий на плоскость линзы нормально, преломляется трансформируясь в луч 3, этот луч, пересекая изображение A_1, даёт точку пересечения с главной оптической осью MN, которая ха-

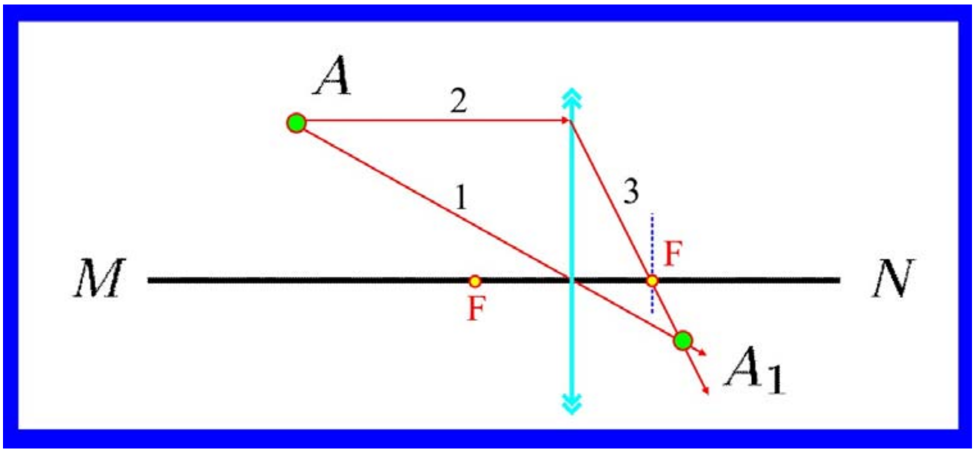


Рис. 165. Построение изображения в тонкой собирающей линзе

рак4теризует положение заднего фокуса линзы F.

166. Задана главная оптическая ось линзы, предмет AB и его изображение A_1B_1. Определить построением положение оптического центра линзы и её фокусов.

Решение

1. Задана оптическая схема лупы, построенной на тонкой собирающей линзе, предмет расположен между плоскостью линзы и фокусным расстоянием, изображение прямое и мнимое:

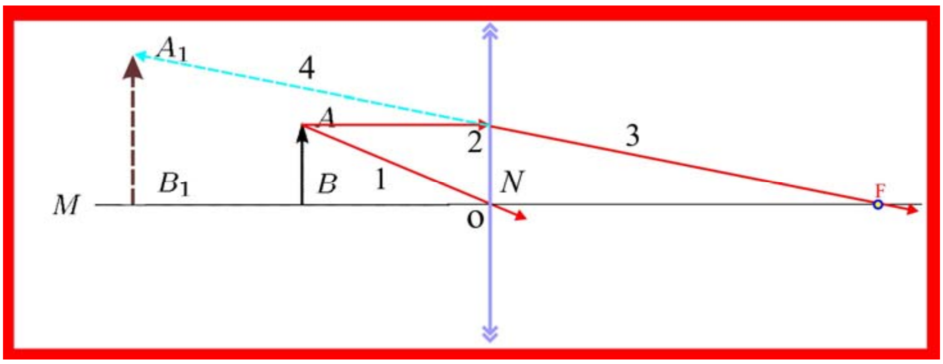


Рис. 166. Оптическая схема лупы

167. Перед двояковыпуклой линзой с фокусным расстоянием F = 1 м находится предмет высотой H = 2 м на расстоянии d = 3 м от линзы. Определить, на каком расстоянии f от линзы находится изображение предмета, линейное увеличение линзы Г, размер изображения h и оптическую силу линзы D.

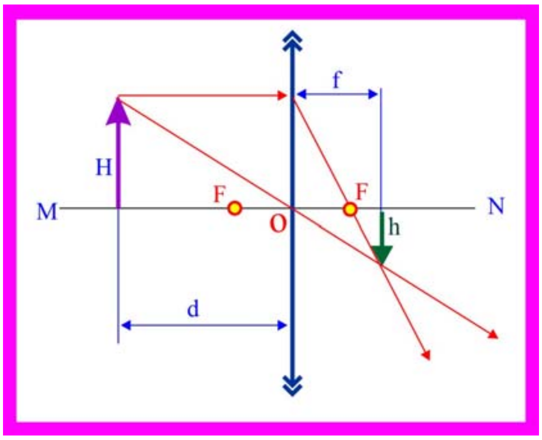


Рис. 167. Изображение в собирающей линзе

Решение

1. Расстояние от плоскости линзы до изображения:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f};\quad F=\frac{df}{d+f};$$

$$Fd+Ff=df;\quad f=\frac{Fd}{d-F}=1{,}5\text{м};$$

2. Линейное увеличение линзы:

$$\Gamma=\frac{f}{d}=\frac{1{,}5}{3}=0{,}5;$$

3. Размер изображения:

$$\Gamma=\frac{h}{H};\quad\Rightarrow\quad h=\Gamma H=1\text{м};$$

4. Оптическая сила линзы:

$$D=\frac{1}{F}=1\text{ дптр};$$

---

168. Перед линзой, оптическая сила которой D = + 2,5 дптр, на расстоянии d = 30 см находится предмет высотой H = 20 см. На каком расстоянии нужно поместить экран и каков будет размер изображения?

Решение

1. Фокусное расстояние линзы:

$$F=\frac{1}{D}=0{,}4\text{м};$$

2. Расстояние от плоскости линзы до изображения (расстояние от плоскости линзы до экрана):

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d}-\frac{1}{f};\quad F=\frac{df}{f-d};\quad Ff-Fd=df;$$

$$f=\frac{Fd}{F-d}=\frac{0{,}4\cdot 0{,}3}{0{,}1}=1{,}2\text{м};$$

3. Размер изображения:

$$\Gamma=\frac{f}{d}=\frac{h}{H};\quad\Rightarrow\quad h=\frac{fH}{d}=\frac{1{,}2\cdot 0{,}2}{0{,}3}=0{,}8\text{м};$$

---

169. Изображение предмета, помещённого пред собирающей линзой на расстоянии d = 0,4 м, получено по другую сторону линзы в натуральную величину. Определить: линейное увеличение линзы; расстояние от плоскости линзы до изображения предмета; фокусное расстояние; оптическую силу линзы. Построить ход лучей от предмета до изображения.

Решение

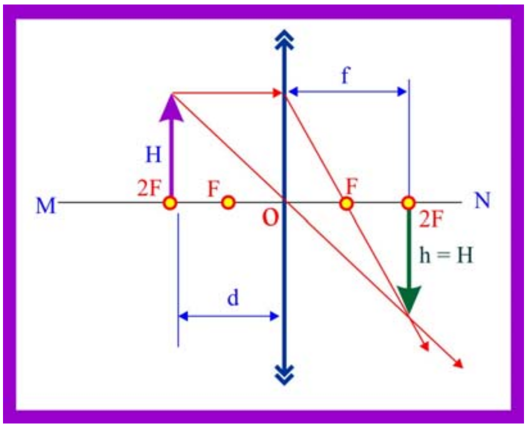


Рис. 169. Натуральное изображение

1. Изображение предмета в натуральную величину действительное и перевёрнутое получается при расположении го на удалении равном двойному фокусному расстоянию:

$$d = 2F; \quad \Rightarrow \quad F = \frac{d}{2} = 0{,}2м;$$

2. Линейное увеличение линзы:

$$\Gamma = \frac{h}{H} = 1;$$

3. Расстояние от изображения до плоскости линзы:

$$\Gamma = \frac{h}{H} = \frac{f}{d}; \quad \Rightarrow \quad f = d = 0{,}4м;$$

4. Оптическая сила линзы:

$$D = \frac{1}{F} = 5 \text{ дптр};$$

---

170. Перед двояковыпуклой тонкой линзой, оптическая сила которой D = + 2, 5 дптр, на расстоянии d = 0,3 м находится предмет высотой H = 0,2 м. Определить фокусное расстояние линзы, расстояние от линзы до изображения f, линейное увеличение линзы Г, высоту изображения h.

Решение

1. Фокусное расстояние линзы:

$$F = \frac{1}{D} = 0{,}4м;$$

2. Расстояние от изображения до плоскости линзы:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}; \quad F = \frac{df}{d+f}; \quad Fd + Ff = df; \quad f = \frac{Fd}{F-d} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}3}{0{,}1} = 1{,}2м;$$

3. Линейное увеличение линзы:

$$\Gamma = \frac{f}{d} = 4;$$

4. Высота изображения:

$$h = \Gamma H = 0{,}8м;$$

---

171. На каком расстоянии от собирающей линзы с фокусным расстоянием F = 0,2 м получится изображение предмета, если сам предмет находится от линзы на расстоянии d = 0,15 м?

Решение

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}; \quad F = \frac{df}{d+f}; \quad Fd + Ff = df; \quad f = \frac{Fd}{F-d} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}15}{0{,}05} = 0{,}6м;$$

---

172. Предмет находится на расстоянии d = 0,125 м от собирающей линзы, оптическая сила которой D = 10 дптр. На каком расстоянии от линзы получится изображение? Каково увеличение линзы?

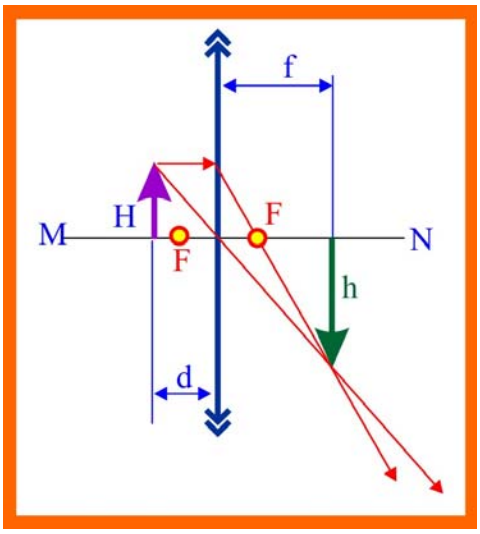


Рис. 172. Предмет за фокусом линзы

Решение

1. Фокусное расстояние:

$$F = \frac{1}{D} = 0{,}1\text{м};$$

2. Расстояние от линзы до изображения:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}; \quad F = \frac{df}{d+f}; \quad Fd + Ff = df;$$

$$f = \frac{Fd}{F-d} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}125}{0{,}025} = 0{,}5\text{м};$$

3. Линейное увеличение линзы:

$$\Gamma = \frac{f}{d} = \frac{0{,}5}{0{,}125} = 4;$$

4. При расположении предмета между фокусом линзы и её плоскостью изображение получается действительным, перевёрнутым, увеличенным.

---

173. При помощи собирательной линзы с фокусным расстоянием F = 6 см получают мнимое изображение предмета на расстоянии f = 18 см от линзы. Определить расстояние от линзы до предмета.

Решение

1. Уравнение тонкой собирательной линзы в случае мнимого изображения:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f}; \quad F = \frac{df}{f-d}; \quad Ff - Fd = df; \quad d = \frac{Fd}{F+f} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}15}{0{,}05} = 4{,}5\text{см};$$

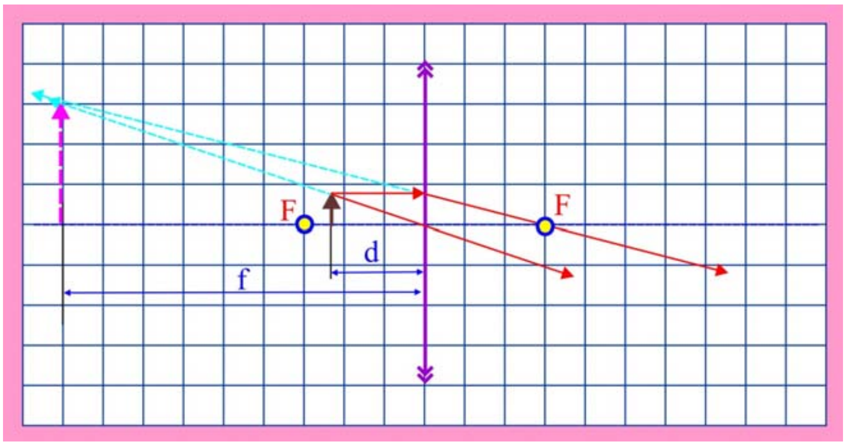


Рис. 173. Мнимое изображение предмета в собирающей линзе

---

174. Собирающая линза даёт действительное, увеличенное в Г = 2 раза изображение предмета. Определить фокусное расстояние линзы, если расстояние между линзой и изображением f = 24 см.

Решение

1. Расстояние от предмета до линзы:

$$\Gamma = \frac{f}{d}; \quad \Rightarrow \quad d = \frac{f}{\Gamma} = 12\text{см};$$

2. Фокусное расстояние линзы:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}; \quad F = \frac{df}{f+d} = \frac{12 \cdot 24}{12+24} = 8 \text{ см};$$

---

175. Изображение предмета, поставленного на расстоянии f = 40 см от собирающей линзы, получилось увеличенным в Г = 1,5 раза. Каково фокусное расстояние линзы?

Решение

1. Расстояние от предмета до линзы:

$$\Gamma = \frac{f}{d}; \quad \Rightarrow \quad d = \frac{f}{\Gamma} \approx 26{,}7 \text{ см};$$

2. Фокусное расстояние линзы:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}; \quad F = \frac{df}{f+d} = \frac{26{,}7 \cdot 40}{26{,}7+40} \approx 16 \text{ см};$$

---

176. Каково фокусное расстояние собирающей линзы и её оптическая сила, если линза даёт мнимое изображение предмета, помещённого перед ней на расстоянии d = 40 см, расстояние от линзы до изображения равно f = 1,2 м?

Решение

1. Фокусное расстояние линзы:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f}; \quad F = \frac{df}{f-d} = \frac{1{,}2 \cdot 0{,}4}{1{,}2-0{,}4} \approx 0{,}6 \text{ м};$$

2. Оптическая сила линзы:

$$D = \frac{1}{F} \approx 1{,}67\text{дптр};$$

---

177. Как надо поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием F = 13 см, предмет и экран, чтобы получить увеличение Г = 5?

Решение

1. Расстояние от предмета до линзы:

$$\Gamma = \frac{f}{d}; \quad f = \Gamma d; \quad \frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{\Gamma d}; \quad d = \frac{F(\Gamma+1)}{\Gamma} = \frac{0{,}13 \cdot 6}{5} = 0{,}156 \text{ м};$$

2. Расстояние от линзы до изображения:

$$f = \Gamma d = 0{,}78\text{м};$$

---

178. Собирающая линза, расположенная на расстоянии d = 4 см от предмета, даёт мнимое увеличение Г = 5. Какова оптическая сила линзы?

Решение

1. Расстояние от линзы до мнимого изображения:

$$\Gamma = \frac{f}{d}; \quad f = \Gamma d = 20 \text{ см};$$

2. Фокусное расстояние линзы:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f}; \quad F = \frac{df}{f-d} = \frac{4 \cdot 20}{20-4} = 5 \text{ см} \equiv 0{,}05\text{м};$$

3. Оптическая сила линзы:

$$D = \frac{1}{F} = 20 \text{ дптр};$$

---

179. Расстояние между лампой и экраном ζ = d + f = 3,2 м. На каком расстоянии от лампы надо установить линзу, чтобы получить чёткое изображение, увеличенное в Г = 3 раз?

Решение

1. Составим систему уравнений, из которых определим расстояние от линзы до лампочки d:

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= f + d; \\ \Gamma &= \frac{f}{d}; \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \zeta &= \Gamma d + d; \\ f &= \Gamma d; \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\zeta}{\Gamma + 1} = 0{,}8\text{м};$$

---

180. Расстояние между лампочкой и экраном ζ = 1 м. На каком расстоянии от лампочки нужно поместить линзу с фокусным расстоянием F = 9 см, чтобы на экране получилось чёткое изображение?

Решение

1. Фокусное расстояние линзы:

$$\zeta = f + d; \quad f = \zeta - d; \quad \frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{\zeta - d};$$

$$\frac{1}{F} = \frac{\zeta - d + d}{d(\zeta - d)} = \frac{\zeta}{d(\zeta - d)}; \quad F = \frac{d(\zeta - d)}{\zeta};$$

2. Расстояние между лампочкой и линзой:

$$F\zeta = \zeta d - d^2; \quad d^2 - d\zeta + F\zeta = 0; \quad d^2 - d + 0{,}09 = 0;$$

$$d = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 - 0{,}09} = 0{,}9\text{м};$$

---

181. Расстояние от предмета до экрана ζ = 0,9 м. Где надо поместить между ними линзу с фокусным расстоянием F = 0,2 м, чтобы получить на экране чёткое изображение предмета?

Решение

1. Фокусное расстояние линзы:

$$\zeta = f + d; \quad f = \zeta - d; \quad \frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{\zeta - d};$$

$$\frac{1}{F} = \frac{\zeta - d + d}{d(\zeta - d)} = \frac{\zeta}{d(\zeta - d)}; \quad F = \frac{d(\zeta - d)}{\zeta};$$

2. Расстояние между лампочкой и линзой:

$$F\zeta = \zeta d - d^2;\quad d^2 - 0{,}9d + 0{,}18 = 0;\quad d \approx 0{,}45 \pm \sqrt{0{,}2 - 0{,}18} = 0{,}6\text{м};$$

3. Расстояние между линзой и экраном:

$$f = \zeta - d \approx 0{,}3\text{м};$$

---

182. Расстояние от предмета до экрана ζ = 3 м. Какой оптической силы надо использовать линзу и как её разместить, чтобы линейное увеличение составило Г = 5?

Решение

1. Составим систему уравнений, из которых определим расстояние от линзы до лампочки d:

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= f + d; \\ \Gamma &= \frac{f}{d}; \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \zeta &= \Gamma d + d; \\ f &= \Gamma d; \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\zeta}{\Gamma + 1} = 0{,}5\text{м};$$

2. Фокусное расстояние линзы:

$$\zeta = f + d;\quad f = \zeta - d;\quad \frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{\zeta - d};$$

$$\frac{1}{F} = \frac{\zeta - d + d}{d(\zeta - d)} = \frac{\zeta}{d(\zeta - d)};\quad F = \frac{d(\zeta - d)}{\zeta} = \frac{0{,}5 \cdot 2{,}5}{3} \approx 0{,}42\text{м};$$

3. Оптическая сила линзы:

$$D = \frac{1}{F} \approx 2{,}4\text{дптр};$$

---

183. Фокусное расстояние собирающей линзы F = 30 см, расстояние от предмета до фокуса ξ = 10 см, линейные размеры предмета H = 5 см. Определить размеры изображения.

Решение

1. Расстояние от предмета до плоскости линзы:

$$d = F + \xi = 40\text{ см};$$

2. Расстояние от линзы до изображения:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f};\quad F = \frac{df}{f + d};\quad Ff + Fd = df;\quad f(F - d) = Fd;\quad f = \frac{Fd}{d - F} = 120\text{см};$$

3. Линейное увеличение линзы:

$$\Gamma = \frac{f}{d} = 3;$$

4. Размер изображения:

$$h = H\Gamma = 15\text{см};$$

---

184. Предмет находится на расстоянии a от переднего фокуса собирающей линзы, а экран расположен за задним фокусом на расстоянии b. Найти оптическую силу линзы и её линейное увеличение.

Решение

1. Фокусное расстояние из уравнения тонкой собирающей линзы, исходя из заданных по условию величин:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{F+a}+\frac{1}{F+b};\quad \frac{1}{F}=\frac{2F+a+b}{(F+a)(F+b)};$$

$$F^2+aF+bF+ab=2F^2+aF+bF;$$

$$ab=2F^2+aF+bF-F^2-aF-dF;\quad F=\sqrt{ab};$$

2. Оптическая сила линзы:

$$D=\frac{1}{F}=\frac{1}{\sqrt{ab}};$$

3. Линейное увеличение линзы:

$$d=F+a;\quad f=F+b;\quad \Gamma=\frac{f}{d}=\frac{F+a}{F+b}=\frac{\sqrt{ab}+a}{\sqrt{ab+b}};$$

---

185. Определить фокусное расстояние линзы, если предмет расположен перед ней на расстоянии a = 10 см от переднего фокуса, а изображение находится на расстоянии b = 55 см от заднего фокуса.

Решение

1. Фокусное расстояние из уравнения тонкой собирающей линзы, исходя из заданных по условию величин:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{F+a}+\frac{1}{F+b};\quad \frac{1}{F}=\frac{2F+a+b}{(F+a)(F+b)};$$

$$F^2+aF+bF+ab=2F^2+aF+bF;$$

$$ab=2F^2+aF+bF-F^2-aF-dF;\quad F=\sqrt{ab}=\sqrt{550}\approx 23{,}45\text{ см};$$

---

186. Найти фокусное расстояние линзы, если светящаяся точка и её изображение лежат на главной оптической оси на расстояниях больших фокусного на a = 16 см и b = 100 см, соответственно.

Решение

1. Фокусное расстояние из уравнения тонкой собирающей линзы, исходя из заданных по условию величин:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{F+a}+\frac{1}{F+b};\quad \frac{1}{F}=\frac{2F+a+b}{(F+a)(F+b)};$$

$$F^2+aF+bF+ab=2F^2+aF+bF;$$

$$ab=2F^2+aF+bF-F^2-aF-dF;\quad F=\sqrt{ab}=\sqrt{1600}\approx 40\text{ см};$$

---

187. Точечный предмет движется по дуге окружности с линейной скоростью v = 3 см/с вокруг главной оптической оси собирающей линзы в плоскости, перпендикулярной оси и отстоящей на расстоянии d = 1,5F от плоскости линзы. В каком направлении и с какой скоростью движется изображение точечного предмета:

Решение

1. Расстояние от линзы до изображения точечного предмета:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{1{,}5F}+\frac{1}{f};\quad 1=\frac{1}{1{,}5}+\frac{1}{Ff};\quad f\approx\frac{F}{0{,}33};$$

2. Линейное увеличение линзы:

$$\Gamma = \frac{f}{d} \approx \frac{F}{0{,}33 \cdot 1{,}5F} \approx 2;$$

3. В соответствии с теоремой Эйлера угловая скорость точки и её изображения будет одинакова $\omega = \omega^*$, а радиус окружности увеличится в два раза, следовательно, линейная скорость изображения $v^* = 2v$, вращение будет происходить в обратном направлении, т.к. изображение перевёрнутое.

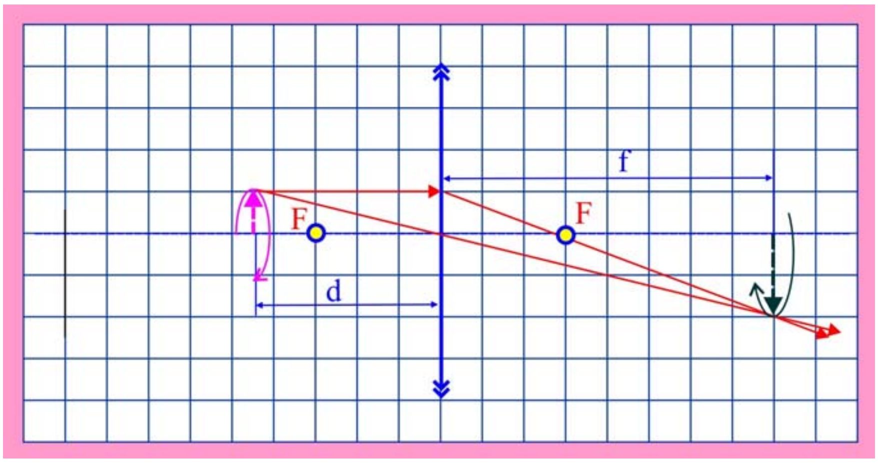


Рис. 187. Вращение светящейся точки

---

188. Светящаяся точка описывает окружность радиусом r в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси собирающей линзы с оптической силой D, а её изображение описывает на экране окружность радиусом R. На каком расстоянии от линзы находится экран?

Решение

1. Фокусное расстояние линзы:

$$F = \frac{1}{D};$$

2. Линейное увеличение линзы:

$$\Gamma = \frac{R}{r} = \frac{f}{d}; \quad \Rightarrow \quad Rd = rf; \quad d = \frac{fr}{R};$$

3. Из уравнения тонкой собирающей линзы:

$$D = \frac{R}{fr} + \frac{1}{f}; \quad \Rightarrow \quad Df = \frac{R}{r} + 1; \quad f = \frac{1}{D}\left(\frac{R}{r} + 1\right) = \frac{R + r}{Dr};$$

---

189. Собирающая линза даёт на экране чёткое изображение предмета, которое в Г = 2 раза больше этого предмета. Расстояние от предмета до линзы на Δx = 6 см превышает её фокусное расстояние. Найти расстояние до экрана f.

Решение

1. Линейное увеличение линзы:

$$\Gamma = \frac{f}{d} = 2; \quad \Rightarrow \quad f = 2d; \quad d = F + \Delta x; \quad f = 2(F + \Delta x;)$$

2. Уравнение тонкой рассеивающей линзы:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{F+\Delta x}+\frac{1}{2(F+\Delta x)}; \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{F}=\frac{3}{2(F+\Delta x)}; \quad \Rightarrow \quad F=2\Delta x=12см;$$

3. Расстояние от плоскости линзы до предмета:

$$d=F+\Delta x=18см;$$

4. Расстояние от плоскости линзы до изображения:

$$f=2d=36см;$$

---

190. Возможно ли получить изображение в линзе, у которой области C и D затемнены?

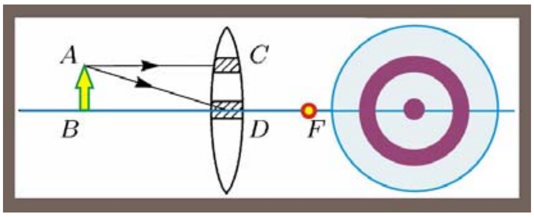


Рис. 190. Линза с затемнениями

Решение

1. Изображение формируется не только показанными на рис. 190 лучами, в формировании изображения участвует световой поток, состоящий из множества лучей. Некоторые из них, попадая на затемнённые участки линзы, участия в формировании изображения не принимают, отчего изображение будет менее ярким.

---

191. Построить изображение точечного источника света S, получаемого с помощью тонкой собирающей линзы. Источник расположен за фокусным расстоянием на некотором расстоянии от оптической оси.

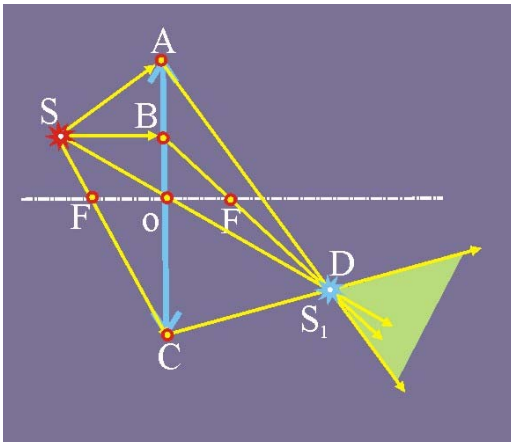


Рис. 191. Изображение источника

Решение

1. Строим первый луч от источника S через оптический центр O

2. Второй луч проводим параллельно оси линзы до точки B, этот луч, преломившись должен пройти через фокус линзы.

3. Первый и второй лучи пересекутся в точке D, в которой и возникнет изображение S_1

4. Для получения области, в которой изображение видно, необходимо построить вначале лучи SA и SC, преломить их, так чтобы преломлённые лучи прошли через точку изображения. Зелёный треугольник показывает область видимости изображения заданного источника.

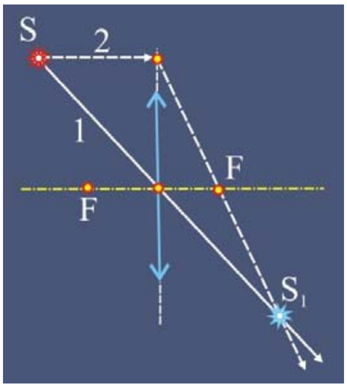


Рис. 192. Размеры линзы

192. Точечный источник света удалён от главной оптической оси на расстояние, значительно превышающее радиус тонкой собирающей линзы. Возникнет ли изображение источника в такой ситуации?

Решение

1. Изображение создаётся лучами, проходящими через линзу, однако положение изображения не зависит от выбора лучей, используемых для построе-

ния, следовательно, положение изображения не зависит от размеров линзы.

2. Часть сферической поверхности (обломок линзы) при сохранении его сферичности создаст изображение там же, где его следовало ожидать и для целой линзы.

3. Размер линзы определяет яркость получаемого изображения.

193. Получить изображение точечного источника, расположенного на главной оптической оси тонкой собирающей линзы за двойным фокусном расстоянием.

Решение

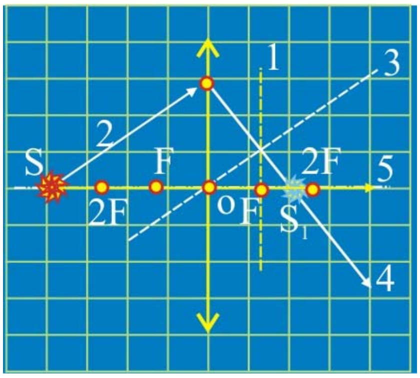


Рис. 193. Источник на главной оптической оси линзы

1. Построим фокальную плоскость 1.

2. Выбираем произвольный луч 2.

3. Через оптический центр линзы проводим побочную оптическую ось 3 параллельную выбранному направлению луча 2.

4. Луч 2 после преломления в линзе должен пройти через точку пересечения фокальной плоскости и побочной оптической оси. Через точку пересечения фокальной плоскости и вспомогательной оси проводим луч 4, который укажет положение изображения источника. В качестве второго луча используем луч 5, идущий вдоль главной оси и не испытывающий преломления ввиду нормального падения.

194. Построить и охарактеризовать изображение предмета, полученное с помощью собирающей линзы, если расстояние от предмета до линзы: а) $d \to \infty$; б) $\infty > d > 2F$; в) $d = 2F$; г) $2F > d > F$; д) $d = F$; е) $F > d > 0$.

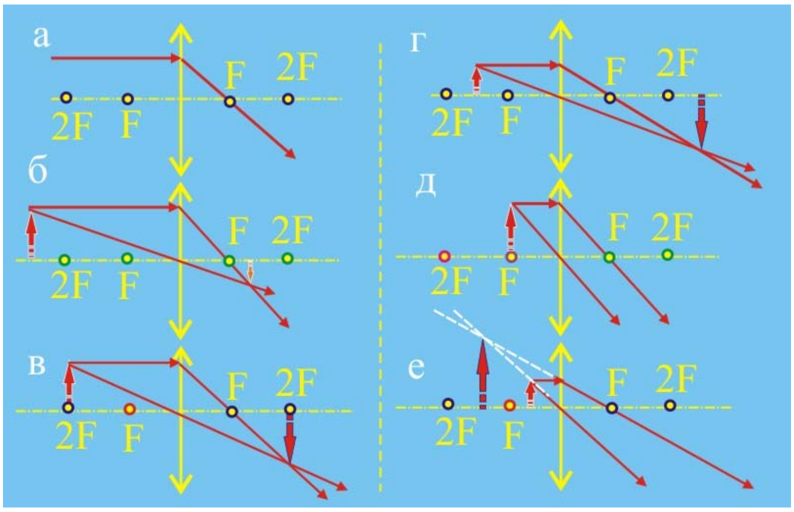


Рис. 194. Построение изображений в линзе

195. Построить изображение источника света S, которое даёт рассеивающая линза. Источник расположен на расстоянии d > F.

Решение

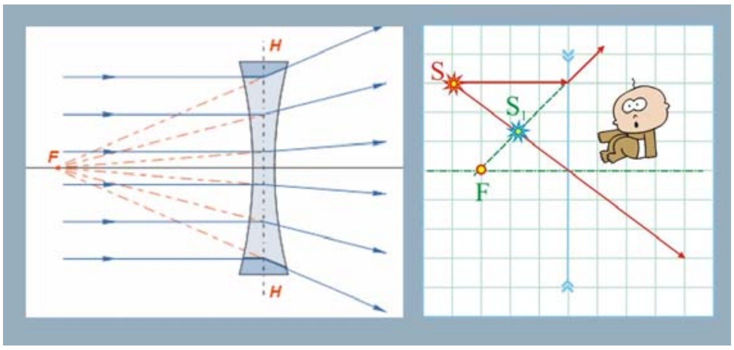


Рис. 195. Изображение источника света в рассеивающей линзе

---

196. Построить изображение предмета АВ, получаемое в рассеивающей линзе при его расположении в d > F. Зависит ли размер изображения от расстояния d?

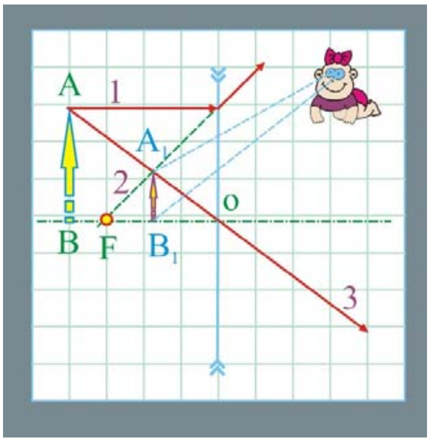


Рис. 196. Изображение предмета в рассеивающей линзе

Решение

1. Проводим луч 1 нормально к поверхности рассеивающей линзы. Этот луч будет преломляться в линзе под определённым углом.

2. Аз точки А предмета проводим луч 3 через главный оптический центр

3. Соединяем точку пересечения лучом 1 линзы с точкой на главной оптической оси, соответствующей фокусному расстоянию. Линия 2 покажет направление преломлённого луча, а пересечение линии 2 с не преломлённым лучом 3 укажет положение изображения точки A_1.

3. Изображение B_1 будет располагаться на пересечении главной оптической оси с перпендикуляром, опущенным на неё из A_1.

4. Изображение предмета в рассеивающей линзе будет мнимым, т.к. получается не на пересечении двух действительных лучей, а на пересечении действительного луча и продолжении рассеянного луча.

5. Изображение при любых значениях d будет получаться мнимым, прямым и уменьшенным. Чем ближе предмет к линзе, тем сокращение масштаба меньше.

---

197. Построить изображение точечного источника в тонкой линзе для следующих случаев:

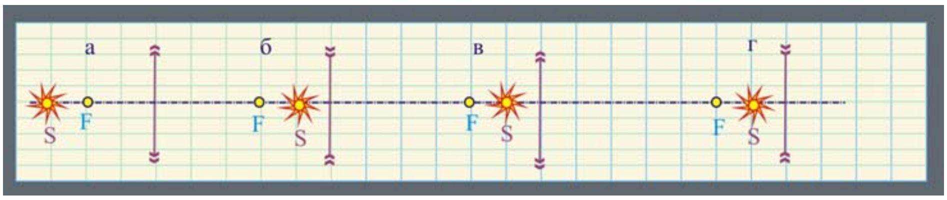


Рис. 197.1. Заданные положения линз и источников

Решение

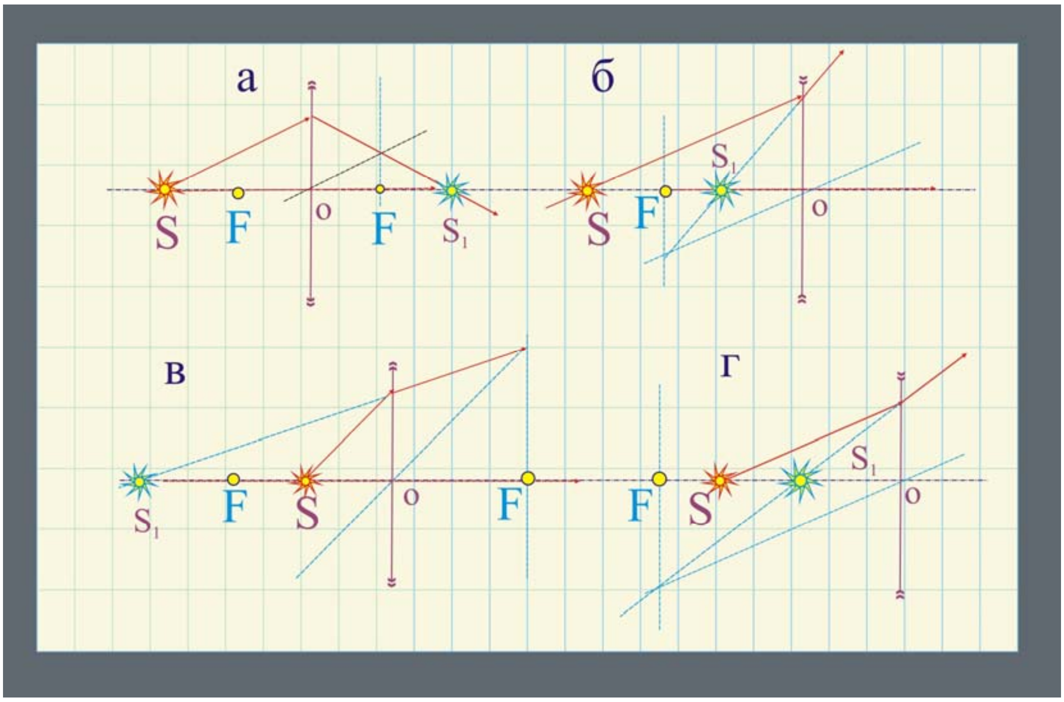


Рис. 191.2. Построение изображений в линзах

---

192. Определить графически и аналитически положение источника света, если известно положение его изображения: а) S_1O = 15 см, F = 10 см, б) S_1O = 40 см, F = 20 см, в) S_1O = 8 см. F = 10 см.

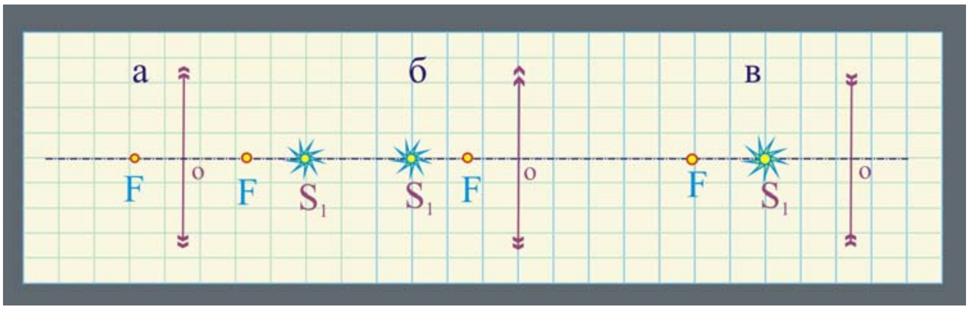


Рис. 192.1. Положение изображений точечного источника света

Решение

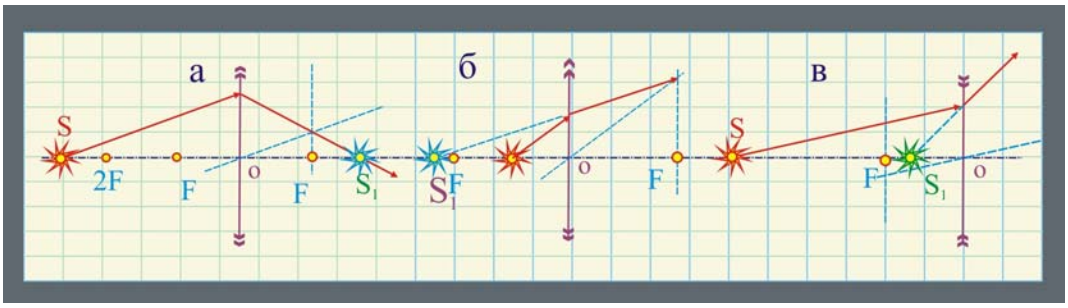


Рис. 192.2. Положение точечного источника света

1. Аналитическое определение положения источника света производится при использовании формулы линзы. По условию заданы расстояния от изобра-

жения до линзы, которая принимается тонкой, т.е. $OS_1 \equiv d$, $SO \equiv f$. Применяя формулу линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$$

для заданных вариантов получим:

$$\text{а) } SO \equiv d = \frac{F \cdot f}{f - F} = \frac{10 \cdot 15}{15 - 10} \cong 30 \text{ см } - \text{изображение действительное;}$$

$$\text{б) } SO \equiv d = \frac{F \cdot f}{f + F} = \frac{40 \cdot 20}{40 + 20} \cong 13{,}3 \text{ см } - \text{изображение мнимое;}$$

$$\text{в) } SO \equiv d = \frac{F \cdot f}{f - F} = \frac{10 \cdot 8}{10 - 8} \cong 40 \text{ см } - \text{изображение мнимое.}$$

---

193. Определить графически и аналитически положение фокусов линзы, если известны положения оптического центра O, источника S и его изображения S_1: а) OS = 5 см, OS_1 = 15 см, б) OS = 20 см, OS_1 = 10 см, в) OS = 20 см, OS_1 = 5см. Определить тип линзы и охарактеризовать изображения.

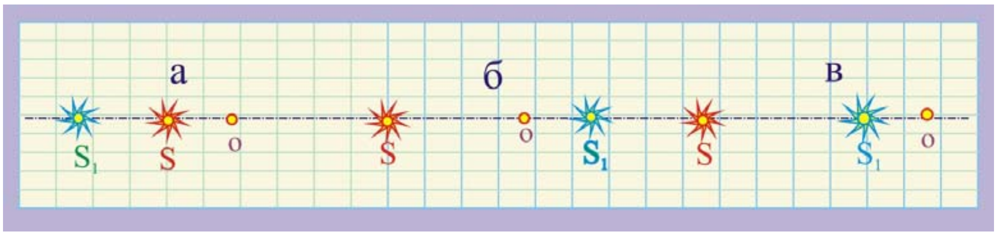


Рис. 193.1. Взаимное расположение источников, изображений и оптических центров

Решение

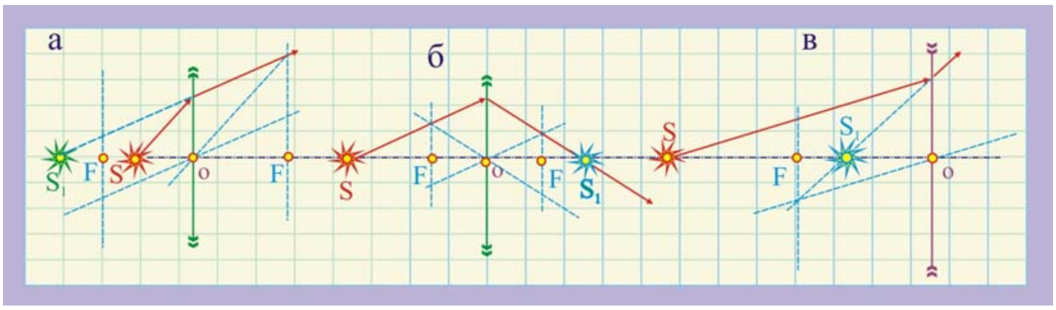


Рис. 193.2. Положение фокусов при данном положении источников и изображений

1. Аналитическое определение положения фокуса определяется формулой линзы. По условию заданы расстояния от источника и изображения до линзы, которая принимается тонкой, т.е. $OS_1 \equiv d$, $SO \equiv f$. Применяя формулу линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$$

для заданных вариантов получим:

$$\text{а) } F = \frac{d \cdot f}{f - d} \cong 7{,}5 \text{ см } - \text{собирающая линза, изображение мнимое;}$$

$$\text{б) } F = \frac{d \cdot f}{f + d} \cong 6{,}7 \text{ см } - \text{линза собирающая, изображение действительное;}$$

$$\text{в) } F = \frac{d \cdot f}{f - d} \cong -6{,}7 \text{ см } - \text{Линза рассеивающая, изображение мнимое.}$$

---

194. Задано положение главной оптической оси линзы и положение точечных источников света и их изображений. Определить построением положение линзы и её фокусов. Определить тип линзы и изображения.

Решение

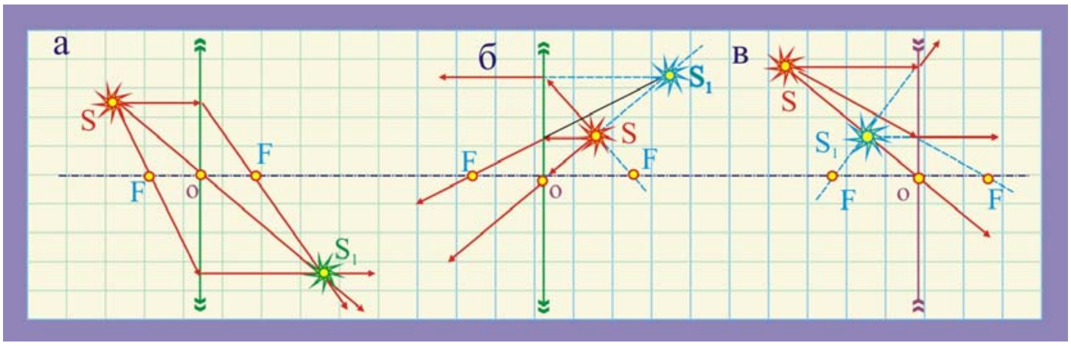


Рис. 194. Положение линз и их фокусов

а) Изображение действительное, линза собирающая.
б) Изображение мнимое, линза собирающая.
г) Изображение мнимое, линза рассеивающая.

---

195. Задано прохождение светового луча после прохождения линзы. Построить прохождение луча до линзы, считая положение фокусов известным.

Решение

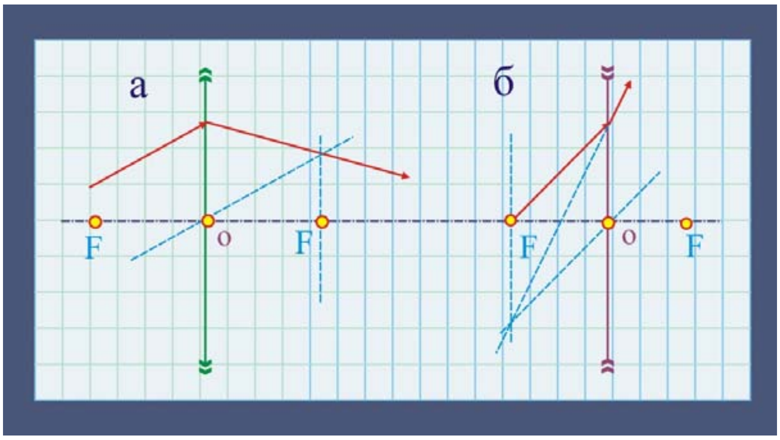


Рис. 195. Ход лучей до попадания в линзу

196. Фокусное расстояние линзы F = 20 см, расстояние от предмета до линзы d = 10 см. Определить расстояние f от изображения до линзы, если: а) линза собирающая; б) линза рассеивающая. Какое получается изображение?

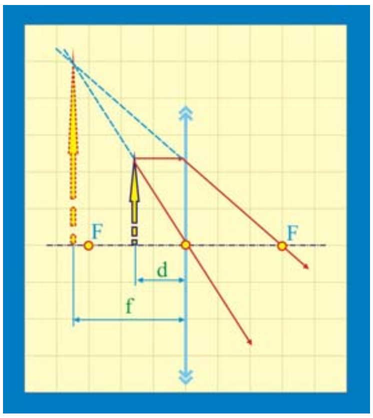


Рис. 196.1. Собирающая линза

Решение

1. Запишем формулу собирающей линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f};$$

2. Разрешим это уравнение относительно ис-

комого расстояния f

$$\frac{1}{F}=\frac{f+d}{d\cdot f};\quad df=Ff+Fd;$$

$$df-Ff=Fd;$$

$$f(d-F)=Fd;\quad f=\frac{Fd}{d-F}=\frac{20\cdot 10}{-10}=-20\ \text{см}.$$

Знак минус показывает, что изображение предмета будет мнимым, как видно из построения – увеличенным.

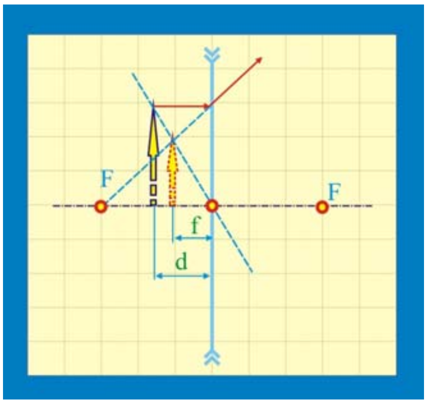


Рис. 196.2. Рассеивающая линза

3. Запишем уравнение рассеивающей линзы и решим его, как и в предыдущем случае, относительно расстояния до изображения f

$$-\frac{1}{F}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f},$$

$$-\frac{1}{F}=\frac{f+d}{d\cdot f};\quad df=-Ff+=-Fd;$$

$$f(d+F)=Fd;\quad f=-\frac{Fd}{d+F}=-\frac{20\cdot 10}{30}=-6{,}7\ \text{см};$$

Изображение в рассеивающей линзе получается мнимым и уменьшенным.

---

197. Мнимое изображение предмета получено в фокальной плоскости собирающей линзы. На каком расстоянии от линзы находится предмет?

Решение

1. В данном случае расстояние от линзы до изображения равно фокусному расстоянию, т.е.

$$f=F;\quad \Rightarrow\quad \frac{1}{F}=\frac{1}{d}-\frac{1}{F};\quad \Rightarrow\quad \frac{1}{F}+\frac{1}{F}=\frac{1}{d};\quad \frac{2}{F}=\frac{1}{d};\quad d=\frac{F}{2};$$

---

198. Некая точка А находится на главной оптической оси собирающей линзы на расстоянии x = 5 см от фокуса. Где находится изображение точки, если фокусное расстояние F = 20 см? Возможны ли варианты?

Решение

1. По условию задачи исследуемая точка может находиться как ближе фокусного расстояния относительно плоскости линзы, так дальше фокусного расстояния, т.е. при заданных условиях можно получить как действительное, так и мнимое изображение.

2. Если точка А располагается перед фокусом, то изображение будет действительным. Формула линзы запишется следующим образом:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{F+x}+\frac{1}{f};\quad \Rightarrow\quad \frac{1}{F}-\frac{1}{F+x}=\frac{1}{f};\quad \frac{F-F+x}{F(F+x)}=\frac{1}{f};$$

$$f=\frac{F(F+x)}{x}=\frac{20\cdot 25}{5}=100\ \text{см};$$

3. При расположении точка А между фокусом и линзой изображение будет мнимым

$$f = -\frac{F(F-x)}{x} = -\frac{20\cdot 15}{5} = -60\ \text{см};$$

15.166. На расстоянии d от тонкой собирающей линзы с оптической силой D, находится светящаяся точка. На каком расстоянии f от линзы находится её изображение?

Решение

1. Для определения искомого расстояния используем формулу тонкой линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}; \quad D = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}; \quad D = \frac{d+f}{df}; \quad Ddf = d + f;$$

$$Ddf - f = d; \quad f = \frac{d}{dD - 1};$$

---

199. Необходимо изготовить плосковыпуклую линзу с оптической силой D = 4 дптр. Определить радиус кривизны выпуклой поверхности линзы, если показатель преломления материала линзы равен n = 1,6.

Решение

1. Запишем формулу линзы через показатель преломления и радиусы кривизны ограничивающих поверхностей

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right); \quad R_1 \to \infty; \quad R_2 = R;$$

$$D = \frac{n-1}{R}; \quad \Rightarrow \quad R = \frac{n-1}{D} = \frac{0{,}6}{4} = 0{,}15\ \text{м};$$

---

200. На каком расстоянии от собирающей линзы с фокусным расстоянием F = 30 см надо расположить предмет, чтобы иго изображение было увеличено по сравнению с предметом в 10 раз?

Решение

1. Как известно, собирающая линза может давать увеличенное изображение, как действительное, так и мнимое. Всё зависит от взаимного расположения Предмета и линзы. Таким образом, задача предполагает два варианта решения.

2. Для действительного изображения формула тонкой линзы примет вид:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f};$$

3. Запишем уравнение увеличения линзы

$$\Gamma = \frac{f}{d}; \quad \Rightarrow \quad f = \Gamma d;$$

4. Решим уравнения совместно:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{\Gamma d} = \frac{\Gamma + 1}{\Gamma d}; \quad \Rightarrow \quad d = \frac{F(\Gamma+1)}{\Gamma} = \frac{30(10+1)}{10} = 33\ \text{см}; \quad f = 3{,}3\ \text{м};$$

5. При мнимом изображении уравнение собирающей линзы примет вид:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d}-\frac{1}{f},$$

тогда

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d}-\frac{1}{\Gamma d}; \quad \Rightarrow \quad d=\frac{F(\Gamma-1)}{\Gamma}=\frac{30\cdot 9}{10}=0{,}27\ \text{м}; \quad f=\Gamma d=2{,}7\ \text{м};$$

6. На рис. 200 приведены построения изображения для рассмотренных выше случаев:

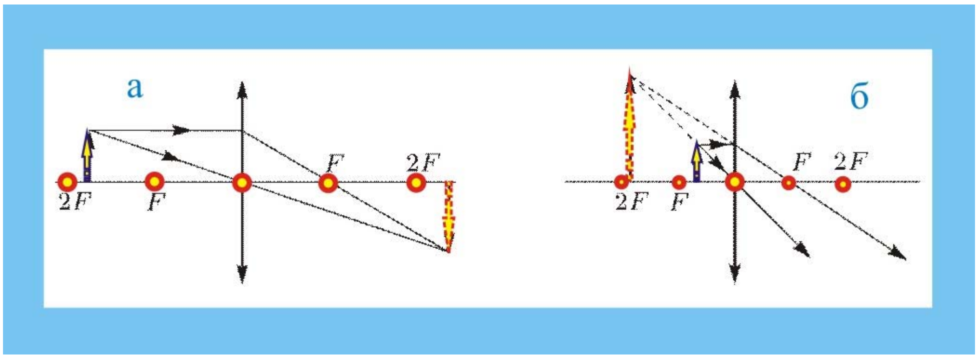


Рис. 200. Построение действительного и мнимого изображения

---

201. Определить оптическую силу рассеивающей линзы, у которой изображение предмета, расположенного на расстоянии 1 м от линзы в 5 раз меньше размеров самого предмета.

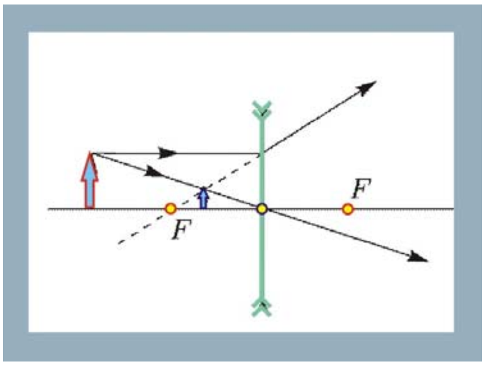


Рис. 201. Оптическая сила линзы

Решение

1. Для рассеивающей линзы оптическая сила определяется уравнением:

$$D=-\frac{1}{F};$$

2. Фокусное расстояние определим, воспользовавшись формулой линзы

$$-\frac{1}{F}=\frac{1}{d}-\frac{1}{f};$$

$$F=\frac{df}{d-f}.$$

3. Величину f найдём из уравнения увеличения линзы

$$f=\Gamma d; \quad \Rightarrow \quad f=0{,}2\ \text{м};$$

4. Определим фокусное расстояние

$$F=0{,}25\ \text{м}; \quad D=-4\ \text{дптр};$$

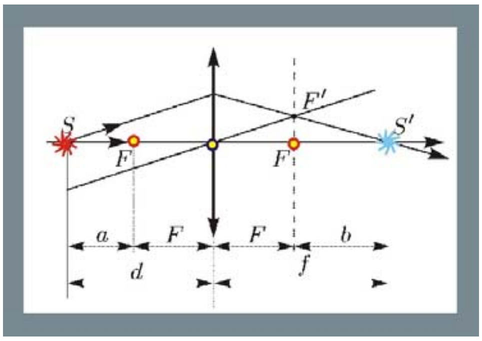


Рис. 202. Точка на оптической оси

202. Светящаяся точка находится на главной оптической оси на расстоянии 20 см от переднего фокуса. Какое фокусное расстояние имеет собирающая линза, если изображение предмета располагается на расстоянии 80 см за её задним фокусом?

Решение

1. Выполнив построение, определим, что

$$d = a + f; \quad f = b + f\,;$$

2. Запишем формулу линзы применительно к заданным условиям

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a+F} + \frac{1}{b+F}\,;$$

3. В уравнении линзы одна неизвестная величина f

$$\frac{1}{F} - \frac{1}{a+f} - \frac{1}{b+F} = 0\,;$$

$$\frac{(a+F)(b+F) - F(b+F) - F(a+F)}{F(a+F)(b+F)} = 0\,;$$

4. Знаменатель дроби явно не равен нулю, поэтому:

$$(a+F)(b+F) - F(b+F) - F(a+F) = 0; \quad \Rightarrow \quad F = \sqrt{ab} = 0{,}4\ \text{м}\,;$$

---

203. Расстояние между предметом и экраном равно 1 м. Между ними находится собирающая линза, которая даёт на экране уменьшенное изображение. Если линзу придвинуть на 60 см к предмету, то на экране появится его увеличенное изображение. Найти фокусное расстояние линзы.

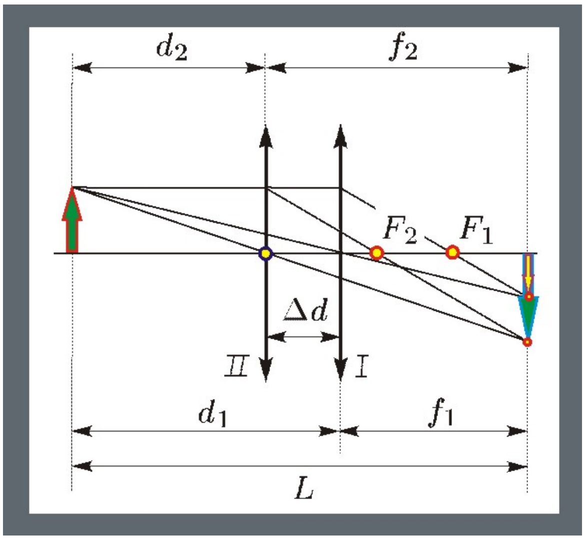


Рис. 203. Перемещение линзы

Решение

1. Изображение в обоих случаях по условию задачи воспроизводится на экране, значит оно действительное.

2. Запишем формулу линзы для заданных положений линзы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{F} &= \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}; \\ \frac{1}{F} &= \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2}; \end{aligned}\right\}$$

3. В системе уравнений все величины неизвестны, поэтому необходимо дополнительно записать соотношение между величинами в соответствие с принятыми на рис. 203 обозначениями:

$$\left.\begin{aligned} d_1 + f_1 &= L; \\ d_2 + f_2 &= L; \\ d_2 + \Delta d &= d_1; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad f_1 = L - d_1; \quad d_2 = d_1 - \Delta d; \quad f_2 = L - d_2 = L - d_1 + \Delta d\,;$$

4. При подстановке f_1, d_2 и f_2 из трёх последних уравнений в формулы линзы придём к двум уравнениям с двумя неизвестными d_1 и F. Равенство правых частей исходных уравнений даёт основание приравнять их левые части

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{L - d_1} = \frac{1}{d_1 - \Delta d} + \frac{1}{L - d_1 + \Delta d}\,;$$

5. Приведя последнее равенство к общему знаменателю, получим

$$d_1 = \frac{L + \Delta d}{2} = 0{,}8\ м\ ;$$

6. Определим далее величину f_1

$$f_1 = L - d_1 = 0{,}2\ м\ ;$$

7. Из первого уравнения исходной системы найдём фокусное расстояние

$$F = \frac{d_1 f_1}{d_1 + f_1} = 0{,}16\ м\ ;$$

---

204. Изображение предмета на дисплее цифрового фотоаппарата при съёмке с расстояния 18 м получилось высотой 6 мм, а при съёмке с расстояния 10 м – высотой 11 мм. Определить фокусное расстояние используемого объектива.

Решение

1. Будем считать для упрощения анализа, что в фотоаппарате используется собирающая линза, перемещающаяся относительно матрицы, поэтому для заданных условий можно записать следующие уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F};\\ &\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} - \frac{1}{F};\\ &\frac{f_1}{d_1} = \frac{H_1}{h};\\ &\frac{f_1}{d_2} = \frac{H_2}{h}; \end{aligned}\right\}$$

Рис. 204. Дисплей фотоаппарата

Полученная система четырёх уравнений содержит четыре неизвестных величины.

2. Решим систему уравнений:

$$f_1 = \frac{d_1 H_1}{h};\quad f_2 = \frac{d_2 H_2}{h};$$

$$\frac{1}{d_1} + \frac{h}{d_1 H_1} = \frac{1}{F};\quad \frac{1}{d_2} + \frac{h}{d_2 H_2} = \frac{1}{F};$$

Перепишем два последние уравнения:

$$\frac{1}{F} - \frac{1}{d_1} = \frac{h}{d_1 H_1};\quad \frac{1}{F} - \frac{1}{d_2} = \frac{h}{d_2 H_2};$$

$$\frac{d_1 - F}{d_1 F} = \frac{h}{d_1 H};\quad \frac{d_2 - F}{d_2 F} = \frac{h}{d_2 H_2};$$

Разделим уравнения почленно:

$$\frac{d_1 - F}{d_2 - F} = \frac{H_2}{H_1};\quad \Rightarrow\quad F = \frac{d_2 H_2 - d_1 H_1}{H_2 - H_1} \cong 0{,}4\ м\ .$$

---

205. С какой выдержкой следует фотографировать велосипедиста, едущего со скоростью $v = 5$ м/с перпендикулярно оптической оси фотоаппарата, чтобы размытость изображения не превышала 0,1 мм? Расстояние от фотографа до велосипеда составляет $d = 10$ м. Фокусное расстояние объектива $F = 5$ см.

Решение

1. За время открытия затвора предмет, которому принадлежит некая точка, перемещается, оставляя на фотоплёнке или матрице линию, вследствие чего изображение приобретает размытость. Будем считать, что размытость не должна превышать размеров предмета H.

2. Если велосипедист движется без ускорения прямолинейно, то пройденный им за время экспозиции путь равен

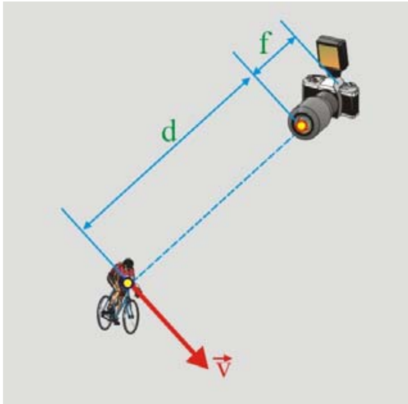


Рис. 205. Съёмка велосипедиста

$$h = v\Delta t; \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{h}{v};$$

3. Длину пройденного пути h примем за размеры предмета и запишем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{F} &= \frac{1}{f} + \frac{1}{d}; \\ \frac{f}{d} &= \frac{H}{h}; \end{aligned}\right\}$$

4. Выразим из первого уравнения системы f и подставим полученное значение во второе уравнение

$$f = \frac{Fd}{d - F}; \quad \frac{Fd}{d(d - F)} = \frac{H}{h}; \quad \frac{F}{d - F} = \frac{H}{h};$$

$$h = \frac{H(d - F)}{F}; \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{h}{v} = \frac{H(d - F)}{Fv} \cong 0{,}04 \text{ c}.$$

---

206. На экран проецируется диапозитив, площадь изображения которого в 25 раз больше площади предмета на диапозитиве. Расстояние от объектива проекционного аппарата до диапозитива d = 40 см. Найти фокусное расстояние объектива и расстояние от объектива (отражательного зеркала) до экрана, считая диапозитив квадратным.

Решение

1. Ввиду квадратности диапозитива и его изображения можно записать следующие соотношения

$$s_1 = H^2; \quad s_2 = h^2,$$

где H и h характерные размеры изображения и диапозитива. По условию задачи


Рис. 206. Проекционный аппарат

$$\frac{H^2}{h^2} = 25; \quad \Rightarrow \quad \frac{H}{h} = \Gamma = 5;$$

2. Запишем формулу линзы для действительного изображения

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f};$$

3. Так как увеличение объектива равно:

$$\Gamma = \frac{f}{d}; \quad \Rightarrow \quad f = \Gamma d = 2\text{ м};$$

$$F = \frac{df}{d+f} \cong 0{,}33\text{ м}.$$

---

207. Определить расстояние a от двояковыпуклой линзы до предмета, при котором расстояние от предмета до действительного изображения будет минимальным.

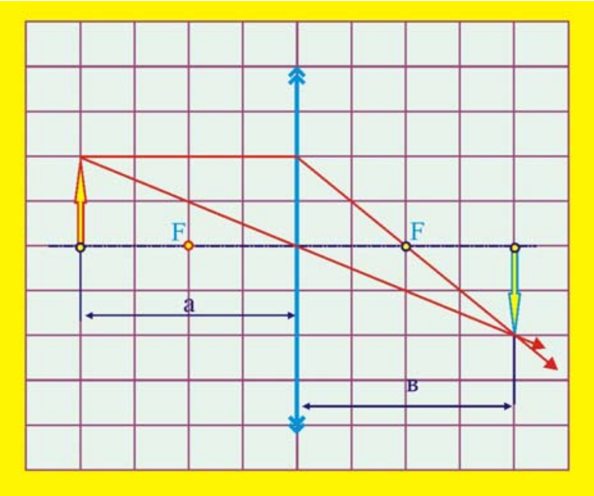


Рис. 207. Минимизация расстояния

Решение

1. Введём обозначение

$$a + b = \ell; \quad b = \ell - a;$$

2. Запишем формулу линзы и выполним следующие преобразования

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b};$$

$$\frac{1}{F} = \frac{a+b}{ab};$$

3. Введём в последнее уравнение величину ℓ

$$\ell F = a\ell - a^2;$$

$$\ell = \frac{a^2}{a-F};$$

4. Определим минимальное значение ℓ

$$\frac{d\ell}{da} = 0; \quad \frac{d\ell}{da} = \frac{2a(a-F) - a^2}{(a-F)^2} = 0; \quad 2a(a-F) - a^2 = 0; \quad \Rightarrow \quad a = 2F;$$

---

208. Определить фокусное расстояние двояковыпуклой стеклянной линзы, погруженной в воду, если известно, что её фокусное расстояние в воздухе равно 20 см.

Решение

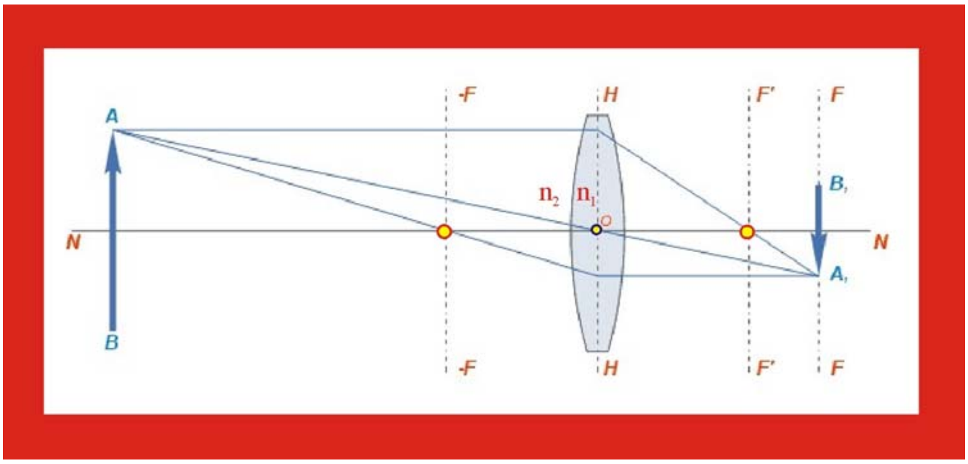


Рис. 208. Двояковыпуклая стеклянная линза

1. Запишем формулу линзы через показатели преломления линзы n_1, среды n_2 и радиусы кривизны ограничивающих поверхностей R_1, R_2

$$\frac{1}{F}=\left(\frac{n_1}{n_2}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right);$$

2. Для линзы, находящейся последовательно в воздухе и воде можно записать следующие уравнения

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{F_1}=(n_1-1)\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right);\\[2ex] \dfrac{1}{F_2}=\left(\dfrac{n_1}{n_2}-1\right)\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right);\end{array}\right\}$$

3. Разделим уравнения почленно

$$\frac{F_2}{F_1}=\frac{(n_1-1)n_2}{n_1-n_2}; \quad \Rightarrow \quad F_2=\frac{F_1 n_2(n_1-1)}{n_1-n_2}=\frac{0{,}2\cdot 1{,}33(1{,}5-1)}{1{,}5-1{,}33}\cong 0{,}8\ \text{м};$$

---

209. Определить главное фокусное расстояние плосковыпуклой стеклянной линзы, помещённой в скипидар. Радиус кривизны выпуклой поверхности 25 см.

Решение

Рис. 209. Плосковыпуклые линзы

1. Фокусное расстояние определится непосредственно из формулы линзы

$$\frac{1}{F}=\left(\frac{n_1}{n_2}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right);$$

2. Для плоской поверхности линзы $R\to\infty$, поэтому

$$\frac{1}{R}\to 0,$$

формула линзы примет вид

$$\frac{1}{F}=\left(\frac{n_1}{n_2}-1\right)\frac{1}{R_2}; \quad \Rightarrow \quad F=\frac{R_2}{\dfrac{n_1}{n_2}-1}=\frac{R_2 n_2}{n_1-n_2}=\frac{0{,}25\cdot 1{,}47}{1{,}5-1{,}47}=12{,}25\ \text{м};$$

---

210. Найти фокусное расстояние тонкой стеклянной собирающей линзы, расположенной в воздушной среде, одна из поверхностей которой – плоскость, а вторая – сфера радиусом R. Показатель преломления материала линзы n.

Решение

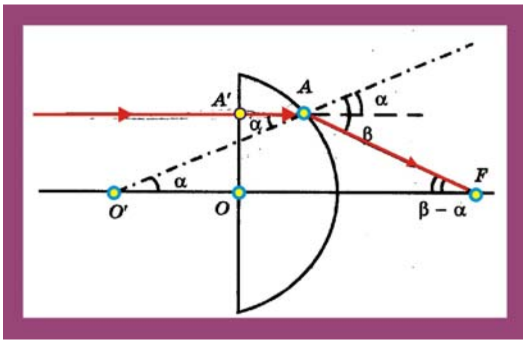


Рис. 210. Ход лучей в плосковыпуклой линзе

1. При построении хода лучей в плосковыпуклой линзе будем считать, что углы α и β малые, т.е.

$$\sin\alpha\approx\alpha; \quad \Rightarrow \quad \beta=n\alpha;$$

2. Полагая линзу тонкой, можно считать, что точки A и A^* совпадают.

Из треугольников ΔO^*A^*O и ΔA^*OF, с учётом малости углов, имеем:

$$A^*O = \alpha R; \quad A^*O = F(\alpha - \beta);$$

3. Приравняем далее уравнения и подставим значение β

$$\alpha R = F(\alpha - n\alpha); \quad \Rightarrow \quad F = \frac{R}{n-1};$$

---

211. Определить фокусное расстояние линзы F, составленной из двух собирающих линз с фокусными расстояниями F_1 и F_2, плотно прилегающих друг к другу. Главные оптические оси линз совпадают.

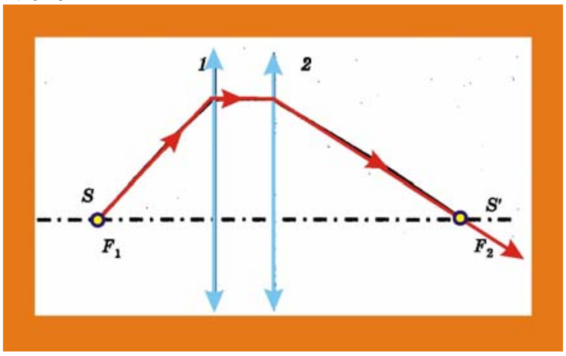


Рис. 211. Сдвоенные собирающие линзы

Решение

1. Наиболее просто ответить на поставленный вопрос можно поместив точечный источник света в фокус первой линзы. В этом случае изображение источника окажется в фокусе второй линзы. Величина F_1 в данном случае будет являться аналогом d, а F_2 – аналогом f.

2. Запишем далее формулу линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2}; \quad \Rightarrow \quad F = \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2};$$

---

212. Расстояние от заднего фокуса собирающей линзы до изображения в девять раз больше расстояния от переднего фокуса до предмета. Определить увеличение линзы.

Решение

1. Запишем формулу линзы и соотношение для её увеличения

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}; \quad \Gamma = \frac{H}{h} = \frac{f}{d}; \quad f = \Gamma d;$$

2. Согласно заданным условиям:

$$9(d - F) = f - F;$$

3. Выразим из последнего уравнения F

$$9d - 9F - f + F = 0; \quad 9d - 8F - f = 0; \quad F = \frac{9d - f}{8} = \frac{9d - \Gamma d}{8};$$

4. Перепишем формулу линзы следующим образом

$$\frac{8}{9d - \Gamma d} = \frac{1}{d} - \frac{1}{\Gamma d}; \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{9 - \Gamma} = 1 - \frac{1}{\Gamma}; \quad \frac{8}{9 - \Gamma} = \frac{\Gamma - 1}{\Gamma};$$

$$8\Gamma = (9 - \Gamma)(\Gamma - 1) = 9\Gamma - \Gamma^2 - 9\Gamma + \Gamma; \quad \Gamma = \sqrt{9} = 3;$$

---

213. Плоская поверхность плосковыпуклой линзы с фокусным расстоянием F, посеребрена. Найти фокусное расстояние F^* получившегося зеркала.

Решение

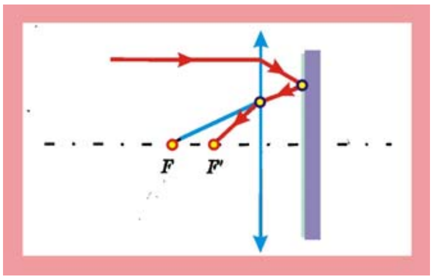


Рис. 213. Посеребренная линза

1. Если на линзу направить пучок света, параллельный главной оптической оси, то сразу после отражения от зеркальной плоской поверхности он попадёт в точку F, однако после преломления в линзе луч попадёт в точку F^*, т.е. в точку, которая будет являться фокусным расстоянием оптической системы линза – зеркало.

2. Точка F в данном случае является мнимым изображением точки F^*, что позволяет формулу данной оптической системы записать следующим образом:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{F^*} - \frac{1}{F^*}; \quad \Rightarrow \quad F^* = \frac{F}{2};$$

---

214. Две линзы с фокусным расстоянием F = 30 см находятся на расстоянии ℓ = 15 см друг от друга. При каких положениях предмета система линз даст действительное изображение предмета?

Решение

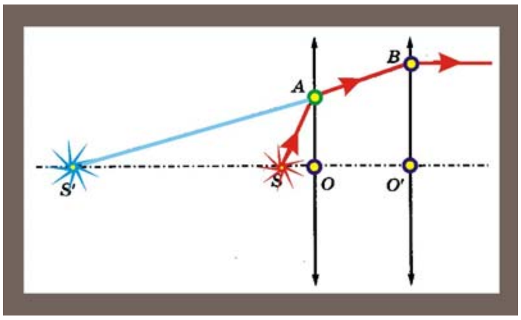


Рис. 214. Действительное изображение

1. Расположим предельное положение предмета S когда линза даёт изображение на бесконечности. Исходящие от предмета лучи после прохождения линз идут параллельно их общей оптической оси. При удалении предмета от линз получается действительное изображение, а если приблизить предмет к линзам, то изображение будет, соответственно, мнимым.

2. В данном случае расстояние $OS \equiv d, OS^* \equiv f$, поэтому формула линзы представится следующим образом:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{OS} - \frac{1}{OS^*};$$

3. По условию задачи:

$$OS^* = F - \ell,$$

поэтому:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{OS} - \frac{1}{(F-\ell)}; \quad \frac{1}{F} = \frac{(F-\ell) - OS}{OS(F-\ell)}; \quad OS(F-\ell) = F[(F-\ell) - OS];$$

$$OS \cdot F - OS \cdot \ell = F^2 - F\ell - F \cdot OS; \quad 2F \cdot OS - OS \cdot \ell = F^2 - F\ell;$$

$$OS(2F-\ell) = F^2 - F\ell; \quad OS = \frac{F^2 - F\ell}{2F - \ell} = \frac{900-450}{60-15} = 10\ \text{см};$$

---

215. Объектив состоит из двух линз: собирающей с фокусным расстоянием F = 15 см и рассеивающей в таким же фокусным расстоянием. Линзы расположены на расстоянии ℓ = 10 см друг от друга. Найти положение главных фокусов объектива.

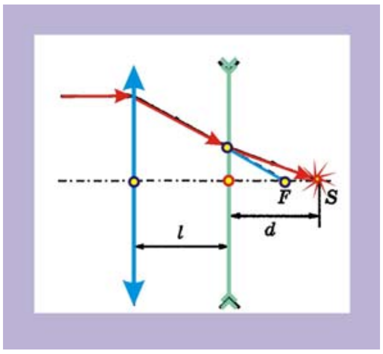


Рис. 215.1. Правый фокус

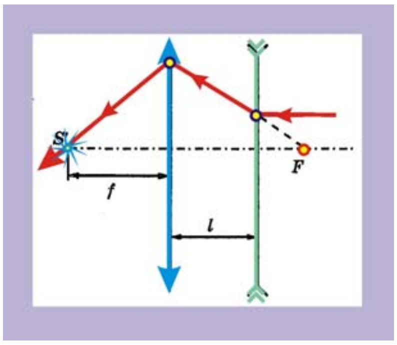


Рис.215.2. Левый фокус

Решение

1. Для определения правого главного фокуса рассмотрим поведение луча параллельного главной оптической оси, который пересечётся с главной оптической осью в точке S, которая даёт фокусное расстояние.

2. Запишем формулу линзы с учётом полученных результатов построения

$$-\frac{1}{F}=\frac{1}{d}-\frac{1}{F-\ell},$$

откуда определяется величина d

$$d=\frac{(F-\ell)F}{\ell}=\frac{75}{10}=7{,}5\text{ см};$$

3. Определение левого фокусного расстояния проедём по анализу луча параллельного главной оптической оси, но идущего к объективу со стороны рассеивающей линзы. Продолжение преломлённого луча при его пересечении с осью даст фокус рассеивающей линзы. Помещая источник в точку F и удалив рассеивающую линзу, запишем формулу линзы для изображения источника в точке S^*, даваемое собирающей линзой:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{F+\ell}+\frac{1}{f};\quad \frac{1}{F}=\frac{F+f+\ell}{(F+\ell)f};,$$

откуда

$$f=\frac{(F+\ell)F}{\ell}=\frac{(15+10)15}{10}=37{,}5\text{ см};$$

---

216. Предмет в виде тонкого стержня длиной x расположен вдоль оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием F, дающей действительное изображение всех точек предмета. Середина стержня расположена на расстоянии d от линзы. Определить продольное увеличение предмета.

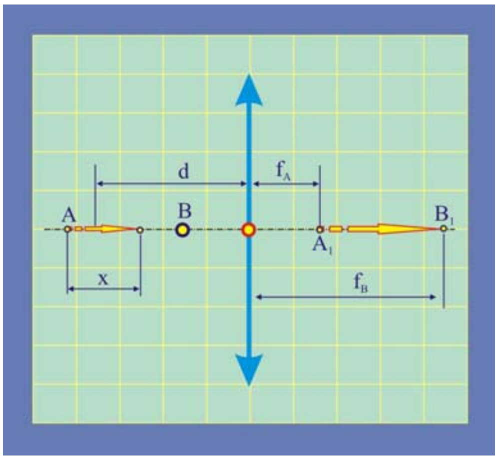


Рис. 216. Продольное увеличение

Решение

1. Запишем формулу линзы для конечных точек стержня A и B

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d+\frac{x}{2}}+\frac{1}{f_A};$$

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d-\frac{x}{2}}+\frac{1}{f_B};$$

2. Продольное увеличение линзы в данном случае может быть представлено следующим образом

$$\Gamma=\frac{f_B-f_A}{x};$$

3. Решая совместно записанные выше уравнения, получим:

$$\Gamma = \frac{F^2}{(d-F)^2 - \frac{x^2}{4}};$$

217. Изображение предмета на матовом стекле студийного пластиночного фотоаппарата с расстояния 15 м получилось высотой 30 мм, а с расстояния 9 м – высотой 51 мм. Найти фокусное расстояние объектива фотокамеры.

Рис. 217. Студийная фотокамера

Решение

1. Образуем систему уравнений, используя заданные расстояния

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}; \\ \frac{1}{F} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2}; \end{aligned}\right\}$$

2. Запишем уравнения увеличения объектива

$$\left.\begin{aligned} \frac{h}{h_1} = \frac{d_1}{f_1}; \\ \frac{h}{h_2} = \frac{d_2}{f_2}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} f_1 = \frac{h_1 d_1}{h}; \\ f_2 = \frac{h_2 d_2}{h}; \end{aligned}\right\}$$

3. Подставим значения f_1 и f_2 в исходную систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{h}{h_1 d_1}; \\ \frac{1}{F} = \frac{1}{d_2} + \frac{h}{h_2 d_2}; \end{aligned}\right\}$$

4. Совместное решение уравнений даёт:

$$F = \frac{h_2 d_2 - h_1 d_1}{h_2 - h_1} = \frac{9 \cdot 5{,}1 \cdot 10^{-2} - 15 \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{-2} - 3 \cdot 10^{-2}} 0{,}43 \text{ м}.$$

218. Посредствам зрительной трубы с фокусным расстоянием объектива 50 см, чётко наблюдается предмет, находящийся на расстоянии 50 м от объектива. В какую сторону и насколько надо сдвинуть окуляр, чтобы сфокусировать трубу на бесконечность?

Решение

1. Запишем формулу линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f_1},$$

из которой определим расстояние от объектива до изображения

$$f_1 = \frac{dF}{d-F} = 0{,}505 \text{ м};$$

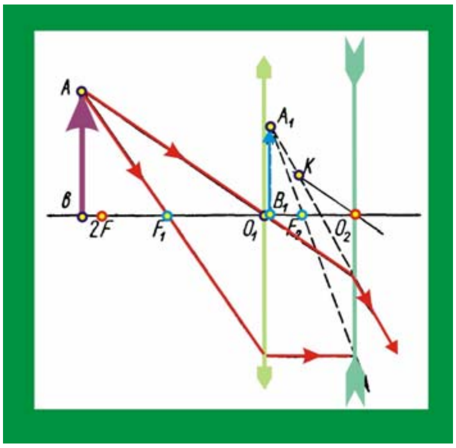


Рис. 218. Зрительная труба

2. При наведении трубы на бесконечность изображение должно быть расположено в фокальной плоскости, т.е. $f_2 = 0,5$ м, следовательно окуляр нужно сместить в сторону объектива на расстояние

$$x = f_1 - f_2 = 0,005\ \text{м} = 5\ \text{мм}.$$

---

219. Микроскоп состоит из окуляра и объектива расстояние между которыми составляет 18 см. Определить увеличение микроскопа, если фокусные расстояния объектива и окуляра соответственно равны 2 и 40 мм.

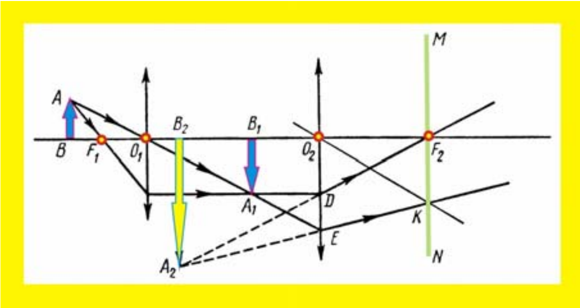


Рис. 219. Фокусное расстояние микроскопа

Решение

1. Построим изображение предмета AB в микроскопе, расположенного вблизи фокальной плоскости. Традиционно рассмотрим два луча, один из которых пройдя через фокус станет далее распространяться параллельно главной оптической оси до пересечения окуляра в точке D. После преломления в окуляре этот луч пройдёт через его фокус F_2. Второй луч направим через оптический центр объектива, который пройдёт линзу не преломляясь до точки E, принадлежащей окуляру. Продолжение лучей позволит получить мнимое изображение точки A_2. Опуская перпендикуляр из точки A_2 на главную оптическую ось найдём изображение B_2.

2. Микроскоп состоит в данном случае из двух линз, поэтому его увеличение определится как:

$$\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2,$$

где Γ_1, Γ_2 – увеличение объектива и окуляра, соответственно.

3. Увеличение объектива

$$\Gamma_1 = \frac{f_1}{d_1},$$

с другой стороны $f_1 \approx x$, $d_1 \approx F_1$, поэтому $\Gamma_1 \approx x/F_1$ и $\Gamma_2 = L/F_2$, где $L \approx 0,25$ м – расстояние наилучшего зрения.

4. Совмещая уравнения, получим:

$$\Gamma = \frac{xL}{F_1 F_2} = \frac{0,18 \cdot 0,25}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-2}} = 562;$$

---

220. На рассеивающую линзу с главным фокусным расстоянием F_1 падает пучок лучей, параллельных главной оптической оси. На каком расстоянии от центра рассеивающей линзы нужно поместить собирающую линзу, чтобы выходящие лучи снова пошли параллельно главной оптической оси? Фокусное расстояние F_2 собирающей линзы в два раза больше, чем рассеивающей линзы.

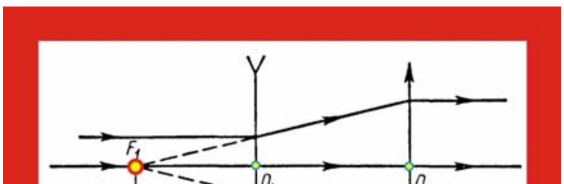


Рис.220. Рассеивающая и собирающая линза

Решение

1. Формула для рассеивающей линзы

$$-\frac{1}{F_1}=\frac{1}{d}-\frac{1}{f_1};$$

2. Будем считать, что источник параллельных световых лучей находится на бесконечном удалении от линзы, т.е.

$$\frac{1}{d}\to 0; \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{F_1}=\frac{1}{f_1}; \quad F_1=f_1;$$

3. Мнимое изображение в рассеивающей линзе находится в её мнимом фокусе и является источником для собирающей линзы, формула которой будет иметь вид:

$$\frac{1}{F_2}=\frac{1}{d_1}=\frac{1}{f_1};$$

4. Из построения хода лучей следует, что

$$d_2=F_1+\ell;$$

5. Условие параллельности выходящих лучей можно представить как:

$$\frac{1}{f_2}\to 0;$$

6. Подставляя значения F_2, d_2 и f_2 в формулу собирающей линзы, получим

$$\frac{1}{2F_1}=\frac{1}{F_1+\ell}; \quad \Rightarrow \quad \ell=F_1;$$

---

221. В вогнутое зеркало радиусом кривизны 50 см наливают воду. Оптическая сила полученной оптической системы составляет D = 5,3 дптр. Определить главное фокусное расстояние получившейся линзы.

Решение

1. Заданную конструкцию можно рассматривать как вогнутое зеркало и плосковыпуклую линзу, совмещённые вплотную. Оптическая сила такой системы определится как

$$D=D_1+2D_2,$$

где

$$D_1=\frac{1}{F_1}=\frac{2}{R},$$

оптическая сила вогнутого зеркала, D_2 − оптическая сила плосковыпуклой линзы. Коэффициент «2» обусловлен двойным прохождением световых лучей через линзу при падении и отражении от зеркала.

2. Определим величину D_2 из следующих соображений:

$$D_2=\frac{D-\frac{2}{R}}{2};$$

$$F_2=\frac{1}{D_2}=\frac{2}{D-\frac{2}{R}}\cong 1{,}54 \text{ м}.$$

---

222. Две собирающие линзы с фокусными расстояниями 3 см и 5 см расположены на расстоянии 12 см друг от друга соосно. Определить фокусное расстояние системы линз.

Решение

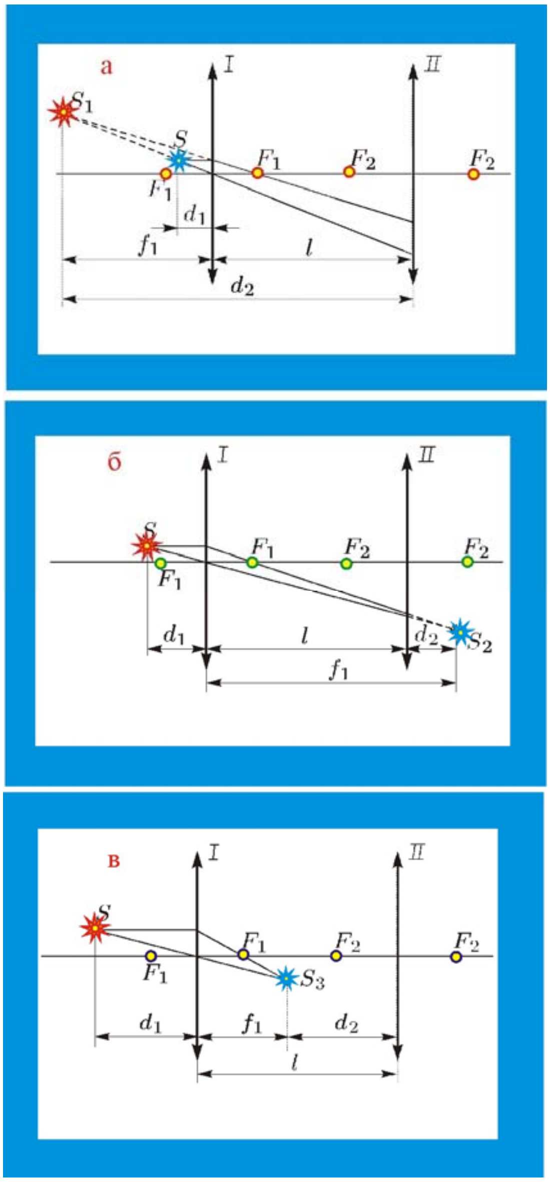


Рис. 222. Фокусное расстояние

1. Фокусом системы линз будет являться точка на главной оптической оси, в которой сходятся световые лучи от источника света, расположенного на значительном удалении. Для решения задачи необходимо получить уравнение, связывающее расстояние d_1 от источника до линзы I и расстояние f_2 от линзы II до изображения, которое она даёт. После чего необходимо перейти к пределу при:

$$d_1 \to \infty, \quad f_2 \to F;$$

2. Пусть первоначально источник света находится на расстоянии d_1 от линзы I. Будем постепенно удалять источник от линзы. При этом возможны следующие характерные случаи.

3. Если источник света S движется от линзы к её фокусу, то

$$d_1 \le F$$

и изображение S_1будет, как известно, мнимым (рис. 222.а). Точка S_1 для второй линзы является действительным предметом. Лучи не неё падают расходящимся пучком, находящимся от линзы на расстоянии

$$d_2 = f_1 + \ell;$$

4. Если точка S находится в фокусе F_1, то её изображение S_2 будет мнимым и будет удалено от линзы I бесконечно далеко. При удалении S от фокуса дальше, d_1 её изображение S_2 будет минимально и от линзы I удалено бесконечно далеко. Если же S движется от фокуса дальше, то d_1 увеличивается, а f_1 уменьшается; действительное изображение S_2 станет находиться за второй линзой (рис. 222. б). При этом на линзу II падает сходящийся пучок света, пересечение продолжения лучей дадут S_2, которое является для линзы II мнимым источником света, находящимся на расстоянии

$$d_2 = f_1 - \ell;$$

5. Начиная с некоторой величины d_1 действительное изображение S_3 точки S станет находиться в промежутке между двумя линзами (рис. 222. в), при этом:

$$d_2 = \ell - f_1;$$

При этом S_3 является действительным источником света для второй линзы.

5. Рассмотрим более подробно случай «а». Ввиду того, что $d_1 < F_1$, то изображение точки S_1 будет мнимым. Запишем для этого случая формулу линзы

$$\frac{1}{F_1} = \frac{1}{d_1} - \frac{1}{f_1}; \quad \Rightarrow \quad f_1 = \frac{f_1 d_1}{F_1 - d_1};$$

Из построения «а» видно, что

$$d_2 = f_1 + \ell; \quad \Rightarrow \quad d_2 = \frac{F_1 d_1}{(F_1 - d_1) + \ell};$$

6. Запишем формулу для второй линзы и определим f_2

$$\frac{1}{F_2} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2}; \quad \Rightarrow \quad f_2 = \frac{d_2 f_2}{d_2 - F_2};$$

7. Напомним, что при $d_1 \to \infty; \quad f_2 \to F$, в этой связи необходимо рассмотреть предел

$$\lim_{d_1 \to \infty} = \lim_{d_1 \to \infty}\left(\frac{F_1 d_1}{F_1 - d_1}\right) + \ell = F_1 \lim_{d_1 \to \infty}\left(\frac{d_1}{F_1 - d_1}\right) + \ell = \ell - F_1;$$

8. Определим величину F

$$F = \lim_{d_1 \to \infty} f_2 = \frac{F_2(\ell - F_1)}{\ell - F_1 - F_2} = 11{,}25 \text{ см};$$

---

223 Две тонкие собирающие линзы с фокусными расстояниями 20 и 15 см, плотно прижатые друг к другу, дают резкое изображение предмета на экране, если предмет расположен на расстоянии 15 см от первой линзы. На сколько необходимо отодвинуть экран для получения чёткого изображения, если вторую линзу удалить от первой линзы на расстояние 5 см?

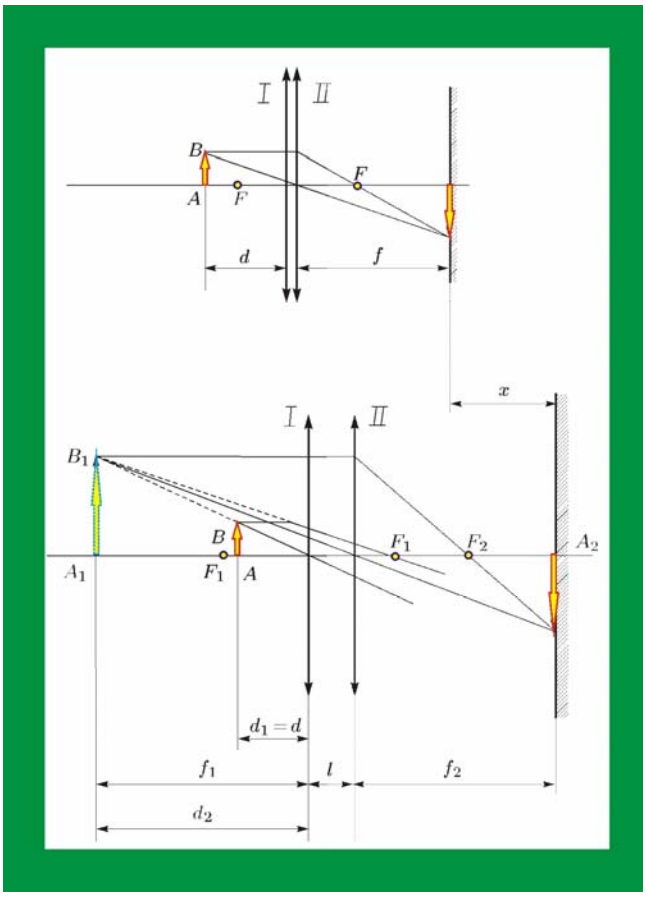


Рис. 223. Сдвоенные линзы

Решение

1. Запишем уравнение оптической силы сдвоенной линзы

$$D = D_1 + D_2,$$

или

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2};$$

2. Поскольку фокусные расстояния линз F_1, F_2 заданы, то можно найти F

$$F = \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2} \cong 8{,}6 \text{ см}.$$

3. Определим положение экрана при действии одновременно двух линз

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f};$$

$$f = \frac{Fd}{d - F};$$

$$f = \frac{F_1 F_2 d}{(F_1 + F_2)d - F_1 F_2} \cong 20 \text{ см};$$

4. Когда вторую линзу отодвигают, то изменяется фокусное расстояние данной оптической системы. Определим расстояние, на котором находится изображение A_1B_1, даваемое только первой линзой ($d_1 = d$):

$$\frac{1}{F_1} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}; \quad \Rightarrow \quad f_1 = \frac{F_1 d_1}{d_1 - F} = -60 \text{ см};$$

Знак «–» указывает на то, что изображение будет мнимым: $d_1 < F_1$.

5. Мнимое изображение A_1B_1 для второй линзы является предметом, который расположен на расстоянии $d_2 = f_1 + \ell = 65$ см от второй линзы (рис. 15.176)

6. Определим расстояние f_2 от второй линзы до изображения A_2B_2

$$f_2 = \frac{F_2 d_2}{d_2 - F_2} = 19{,}5 \text{ см};$$

7. Из построений можно видеть, что

$$f + x = \ell + f_2; \quad \Rightarrow \quad x = \ell + f_2 - f = 4{,}5 \text{ см}.$$

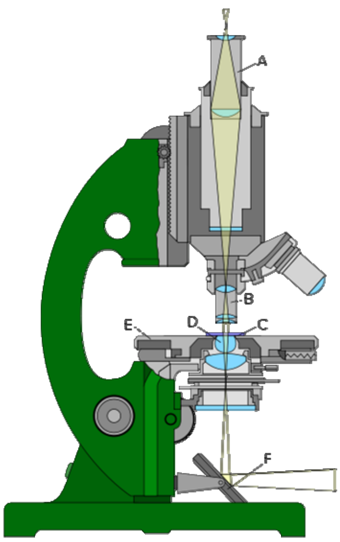


Рис. 224. Схема микроскопа

224. В микроскопе фокусное расстояние объектива равно 5,4 мм, окуляра 20 мм. Каково будет увеличение предмета, находящегося от объектива на расстоянии 5,6 мм, если его рассматривать глазами с нормальным зрением? Какова при этом будет длина тубуса?

Решение

1. По условию задачи заданы величины F_1 и d_1, что позволяет записать следующие соотношения

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{f_1}{d_1}; \\ \frac{1}{F_1} &= \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}; \end{aligned}\right\}$$

2. Определим из системы уравнений величины f_1 и Γ_1

$$f_1 = \frac{F_1 d_1}{d_1 - F_1}; \quad \Gamma_1 = \frac{F_1}{d_1 - F_1};$$

3. Увеличение микроскопа можно определить через длину тубуса

$$\Gamma_1 = \frac{\ell}{F_1},$$

тогда уравнение увеличения можно переписать следующим образом

$$\frac{\ell}{F_1} = \frac{F_1}{d_1 - F_1}; \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{F_1^2}{d_1 - F_1} = 145{,}8\ \text{мм}.$$

4. Определим увеличение микроскопа

$$\Gamma = \frac{\ell L}{F_1 F_2} = 337{,}5.$$

---

225. Читающий книгу, держит её на расстоянии 16 см от глаз. Какой оптической силы очки он при этом использует?

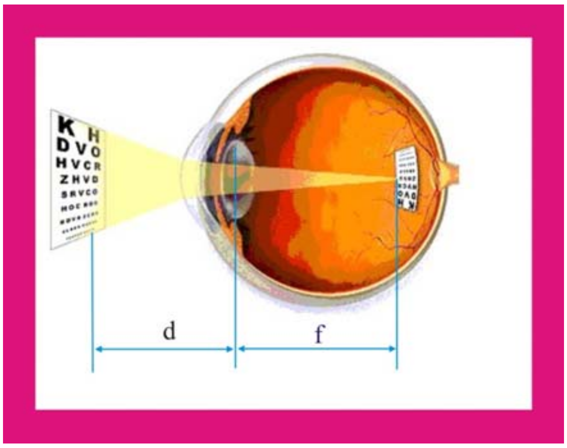


Рис. 225. Оптическая система глаза

Решение

1. Формула линзы для невооружённого глаза

$$D_1 = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f};$$

2. Расстояние наилучшего зрения для среднестатистического глаза берётся равным $d_0 \approx 25$ см, а поскольку текст книги располагается на расстоянии 16 см, то читающему необходимо корректировать расстояние фокусировки изображения на сетчатку очками. Вормула линзы в этом случае примет вид:

$$D_1 + D_2 = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{d_1};$$

3. Решая уравнения совместно, получим:

$$D_0 = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{d_1} \cong \frac{1}{0{,}25} - \frac{1}{0{,}16} \cong 4 - 6{,}25 = -2{,}25\ \text{дптр}.$$

---

226. Близорукий человек различает мелкие предметы на расстоянии, не превышающем 15 см. На каком расстоянии он сможет видеть эти предметы хорошо в очках, если их оптическая сила составит – 3 дптр?

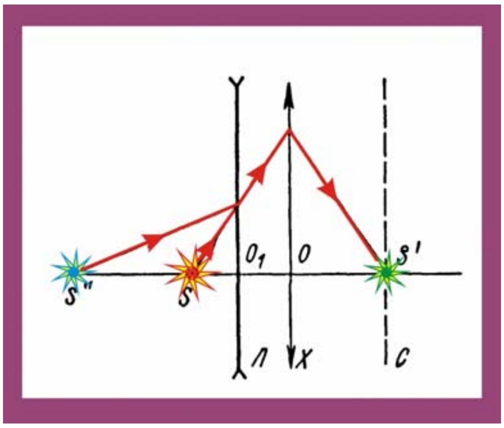


Рис. 226. Исправление близорукости

Решение

1. Оптическая сила глаза без очков

$$D_1 = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f},$$

в данном случае: $d_1 = |SO|$ − расстояние от предмета до хрусталика, $f = |OS^*|$ – расстояние от хрусталика до сетчатки.

2. Оптическая сила близорукого глаза (в очках)

$$D = D_1 + D_2 = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f},$$

где D_2 – оптическая сила очков, $d_2 = |S^{**}O|$ – расстояние от предмета до хрусталика при наличии очков.

3. Решая уравнен6ие для невооружённого и вооружённого глаза совместно, получим:

$$\frac{1}{d_1} + D_2 = \frac{1}{d_2}; \quad \Rightarrow \quad d_1 = \frac{d_1}{1 + D_2 d_1} = \frac{0{,}15}{1 - 3 \cdot 0{,}15} \cong 0{,}27 \text{ м}.$$

4. В очках близорукий человек видит мнимое изображение S предмета S^{**}, находящегося на большем расстоянии от глаза, чем невооружённым глазом. В это весь фокус с очками.

---

227. Телескоп, созданный Галилео Галилеем состоял из объектива с фокусным расстоянием $F_1 \approx 50$ см и рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F_2 = -5$ см, которая использовалась в качестве окуляра. Окуляр был расположен на расстоянии x = 45 см от объектива. На каком расстоянии f_2 от окуляра надо было располагать экран, чтобы получить изображение Солнца?

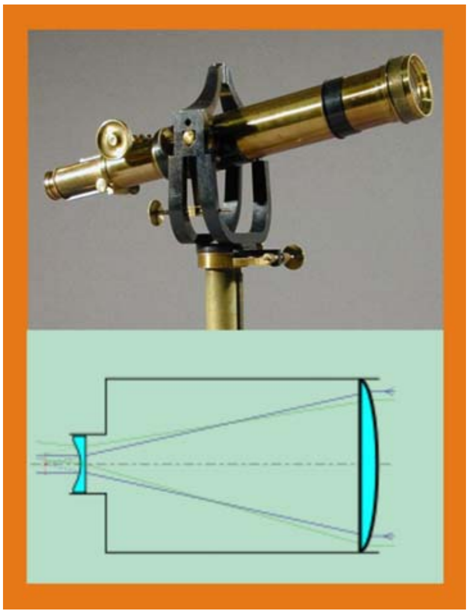


Рис. 227. Телескоп Галилея

Решение

1. Изображение Солнца выстраивается в фокальной плоскости, а изображение на экране выстраивает окуляр. Расстояние от объектива до окуляра меньше фокусного расстояния, изображение будет мнимым, поэтому формулу линзы нужно записать следующим образом:

$$-\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F_2},$$

2. Запишем заданные соотношения между величинами

$$d_2 = F_1 - x;$$

3. Перепишем формулу линзы относительно f_2

$$f_2 = \frac{d_2 F_2}{d_2 + F_2} = \frac{(F_1 - x)F_2}{F_1 - x + F_2};$$

$$f_2 = \frac{(0{,}5 - 0{,}45)(-0{,}05)}{0{,}5 - 0{,}45 - 0{,}05} \cong 0{,}2 \text{ м}.$$

---

228. Объектив состоит из трёх тонких контактирующих друг с другом линз с фокусными расстояниями F_1 = 12,5 см, F_2 = – 10 см и F_3 = 5 см. Определить фокусное расстояние объектива.

Решение

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{F_1} - \frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_3}; \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{F} = \frac{1}{12{,}5} - \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = 0{,}08 - 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}18\frac{1}{\text{м}}; \quad F = 5{,}56\text{см};$$

---

229. Какое увеличение даст лупа с фокусным расстоянием F = 7,7 см, если глаз аккомодирован на бесконечность?

Решение

1. Линейное увеличение лупы Г определяется отношением расстояния наилучшего зрения d_0 = 0,25 м к фокусному расстоянию F:

$$\Gamma = \frac{d_0}{F} = \frac{0{,}25}{0{,}077} \approx 3{,}33;$$

---

230. Лупа имеет увеличение Г = 8 при аккомодации на расстояние наилучшего зрения d_0 = 0,25 м. Найти фокусное расстояние линзы и её оптическую силу.

Решение

$$\Gamma = \frac{d_0}{F}; \quad \Rightarrow \quad F = \frac{d_0}{\Gamma} = \frac{0{,}25}{8} \approx 0{,}031\text{м}; \quad D = \frac{1}{F} \approx 32 \text{ дптр};$$

---

231. Фокусное расстояние объектива проекционного фонаря F = 0,25 м. Какое увеличение даёт фонарь, если экран удалён от объектива на расстояние f = 2 м?

Решение

1. Расстояние от предмета до объектива проекционного фонаря:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}; \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{d} = \frac{1}{F} - \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}25} - \frac{1}{2} = 3{,}5\frac{1}{\text{м}}; \quad d \approx 0{,}286\text{м};$$

2. Увеличение оптической системы:

$$\Gamma = \frac{f}{d} \approx 7;$$

---

232. Диапозитив имеет размер S = 64 см^2. Определить фокусное расстояние объектива проекционного аппарата, если на экране, отстоящем от него на расстоянии f = 4 м, получается изображение размером s = 4 м^2.

Решение

1. Увеличение оптической системы проекционного аппарата:

$$\Gamma = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{64 \cdot 10^{-4}}} = 25;$$

2. Расстояние от диапозитива до объектива:

$$\Gamma = \frac{f}{d}; \quad \Rightarrow \quad d = \frac{f}{\Gamma} = 0{,}16\text{м};$$

3. Фокусное расстояние объектива:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}16} + \frac{1}{4} = 6{,}5\frac{1}{\text{м}}; \quad \Rightarrow \quad F \approx 0{,}153\text{м};$$

---

233. На экран проецируют диапозитив, площадь изображения которого в ζ = 100 раз больше площади диапозитива. Расстояние до объёктива d = 0,25 м. Определить фокусное расстояние F и расстояние от объектива до экрана f.

Решение

1. Увеличение объектива:

$$\Gamma = \sqrt{\zeta} = 10;$$

2. Расстояние от объектива до экрана:

$$\Gamma = \frac{f}{d}; \quad f = \Gamma d = 2{,}5\text{м};$$

3. Фокусное расстояние объектива:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}25} + \frac{1}{2{,}5} = 4{,}4\frac{1}{\text{м}}; \quad \Rightarrow \quad F \approx 0{,}23\text{м};$$

---

234. На каком расстоянии f от объектива проекционного аппарата нужно поместить экран, чтобы на экране изображение предмета было в Г = 50 раз больше размеров самого предмета на диапозитиве, если фокусное расстояние объектива F = 0,1 м?

Решение

1. Соотношение между размерами предмета и его изображения:

$$\Gamma = \frac{f}{d}; \quad \Rightarrow \quad f = \Gamma d = 50d;$$

2. Расстояние от объектива до изображения на экране:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{50d}; \quad \Rightarrow \quad d = \frac{51F}{50} = 0{,}102\text{м}; \quad f = 50d = 5{,}1\text{м},$$

---

235. На экране, отстоящем от объектива с оптической силой D = 5 дптр на расстоянии f_1= 4 м, получено чёткое изображение диапозитива. Экран отодвигают на расстояние Δx = 0,2 м. На сколько нужно переместить объектив относительно диапозитива, чтобы получить чёткое изображение?

Решение

1. Фокусное расстояние объектива:

$$F = \frac{1}{D} = 0{,}2\text{м};$$

2. Расстояние от объектива до диапозитива в начальном положении экрана:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}; \quad \frac{1}{d_1} = \frac{1}{F} - \frac{1}{f_1} = \frac{1}{0{,}2} - \frac{1}{4} = 3{,}75\frac{1}{\text{м}}; \quad d_1 \approx 0{,}2667\text{м};$$

3. Расстояние от экрана до объектива после перемещения экрана:

$$f_2 = f_1 + \Delta x = 4{,}2\text{м};$$

4. Расстояние от объектива да диапозитива после перемещения экрана:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2}; \quad \frac{1}{d_2} = \frac{1}{F} - \frac{1}{f_2} = \frac{1}{0{,}2} - \frac{1}{4{,}2} \approx 3{,}762\frac{1}{\text{м}}; \quad d_2 \approx 0{,}2658;$$

5. Требуемое перемещение экрана:

$$\Delta y = d_1 - d_2 \approx 9 \cdot 10^{-4}\text{м};$$

---

236. Определить оптическую силу объектива проекционного фонаря, если он даёт увеличение Г = 24, когда диапозитив помещён на расстоянии d = 20,8 см от объектива.

Решение

1. Расстояние от объектива до экрана:

$$\Gamma = \frac{f}{d}; \quad \Rightarrow \quad f = \Gamma d = 499{,}2 \text{ см};$$

2. Фокусное расстояние объектива:

$$F = \frac{df}{d+f} = \frac{20{,}8 \cdot 499{,}2}{20{,}8 + 499{,}2} \approx 20\text{см} \equiv 0{,}2 \text{ м};$$

3. Оптическая сила объектива:

$$D = \frac{1}{F} = 5 \text{ дптр};$$

---

237. Какое увеличение даёт проекционный фонарь, если его объектив с главным фокусным расстоянием F = 0,18 м расположен от экрана на расстоянии f = 6 м?

Решение

1. Расстояние от диапозитива до объектива:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}; \quad \frac{1}{d} = \frac{1}{F} - \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}18} - \frac{1}{6} \approx 5{,}389\frac{1}{\text{м}}; \quad d_2 \approx 0{,}185 \text{ м};$$

2. Увеличение проекционного фонаря:

$$\Gamma = \frac{f}{d} = \frac{6}{0{,}185} \approx 32{,}4;$$

---

238. При помощи проекционного фонаря, имеющего объектив с фокусным расстоянием F = 0,2 м, проецируют слайд размером S = 9 × 12 см^2 на экран с размерами s = 3 × 4 м^2. На каком расстоянии от экрана следует поставить проекционный фонарь, чтобы изображение полностью уместилось на экране?

Решение

1. Увеличение оптической системы проекционного аппарата:

$$\Gamma = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{1{,}08 \cdot 10^{-2}}} = 33{,}33;$$

2. Расстояние од диапозитива до объектива:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{\Gamma d} = \frac{1}{d}\left(1 + \frac{1}{\Gamma}\right); \quad \frac{1}{F} = \frac{1{,}03}{d}; \quad d = 1{,}03F \approx 0{,}206\text{м};$$

3. Расстояние от объектива до экрана:

$$f = \Gamma d \approx 6{,}86\text{м};$$

---

239. Объектив кинопроекционного аппарата имеет фокусное расстояние F = 5 см. Размер кадра на киноплёнке A × B =18 × 24 мм^2. Изображение проецируется на экран размерами a × b = 100 × 120 см^2. На каком расстоянии от экрана нужно расположить кинопроектор, чтобы получить максимальное изображение?

Решение

1. Максимальное, действительное, перевёрнутое изображение получается при расположении предмета в фокусе объектива:

$$F = d = 5\ \text{см};$$

2. Линейное горизонтальное увеличение:

$$\Gamma_g = \frac{b}{B} = \frac{120}{2{,}4} = 50;$$

3. Расстояние от проектора до экрана:

$$f = \Gamma_g d \approx 2{,}5\text{м};$$

---

240. Диаметр циферблата часов ζ = 12 см. Часы находятся на расстоянии d = 170 см от глаза, главное фокусное расстояние которого в данный момент равно F = 1,7 см. Определить диаметр изображения циферблата на сетчатке глаза.

Решение

1. Линейное уменьшение размеров предмета глазом:

$$\Gamma^* = \frac{d}{F} = 100;$$

2. Размеры изображения циферблата на сетчатке глаза:

$$\xi = \frac{\zeta}{\Gamma^*} = \frac{12}{100} = 1{,}2\ \text{мм};$$

---

241. Зрительная труба, объектив которой имеет фокусное расстояние F = 30 см, сфокусирована для наблюдения Луны. В какую сторону и насколько нужно передвинуть окуляр, чтобы рассмотреть предмет, находящийся на расстоянии d = 10 м от объектива?

Решение

Рис. 241. Зрительная труба

1. Изображение луны располагается в фокальной плоскости объектива, а изображение предмета в соответствие с формулой линзы будет располагаться на расстоянии

$$f = \frac{dF}{d = F},$$

т.е. дальше изображения Луны на расстоянии

$$\Delta f = f - F = \frac{F^2}{d - F} \cong 0{,}93\ \text{см}.$$

2. Для получения «резкого» изображения предмета окуляр нужно приблизить к объективу, что позволяет конструкция зрительной трубы (рис. 241).

---

10. Фотометрия

242. Электрические лампы с криптоновым наполнением мощностью 40,100 и 1000 Вт обладают световой отдачей соответственно 11,5; 13,5; 18,6 лм/Вт. Найти полный световой поток, излучаемый каждой лампой и силу из света.

Решение

1. Световая отдача определяется в виде отношения светового потока излучаемого лампой к её электрической мощности

$$\eta = \frac{\Phi}{N}; \quad \Rightarrow \quad \Phi = \eta N;$$

$$\Phi_1 = 460 \text{ лм}; \quad \Phi_2 = 1350 \text{ лм}; \quad \Phi_3 = 18600 \text{ лм};$$

2. Для определения силы света воспользуемся уравнением светового потока

$$\Phi = 4\pi I; \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\Phi}{4\pi};$$

$$I_1 \cong 36{,}6 \text{ кд}; \quad I_2 \cong 107{,}5 \text{ кд}; \quad I_3 \cong 1481 \text{ кд}.$$

---

243. Сила света точечного источника I = 200 кд. Найти освещённость поверхности, нормальной к направлению лучей, находящейся на расстоянии R = 5 м от источника.

Решение

1. На основании первого закона освещённости с учётом $i = 0^{\circ}$

$$E = \frac{I}{R^2} = 8 \text{ лк}.$$

---

244. На столбе высотой h = 8 м подвешена электрическая лампочка, сила света которой I = 300 кд. Определить освещённость поверхности земли вблизи основания столба на расстоянии x = 4 м от его основания.

Решение

1. Найдём величину освещённости в точке А у основания фонарного столба

$$E_A = \frac{I}{h^2} \cong 4{,}7 \text{ лк};$$

2. В заданную точку поверхности земли В лучи попадают под углом j, причём

$$\cos j = \frac{SA}{SB} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + x^2}} = \frac{8}{\sqrt{64 + 16}} \cong 0{,}9$$

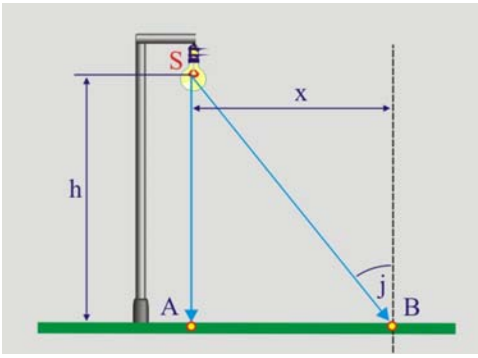


Рис. 244. Уличный фонарь

3. Используя закон освещённости, запишем:

$$E_B = \frac{I\cos j}{\left(h^2 + x^2\right)} \cong \frac{300 \cdot 0{,}9}{80} \cong 3{,}375 \text{ лк};$$

---

245. Свет от электрической лампочки, обладающей силой света I = 400 кд падает на лист бумаги под углом j = 60°, создавая освещённость E = 150 лк. Найти на каком расстоянии от листа расположена лампа, и на какой высоте она подвешена.

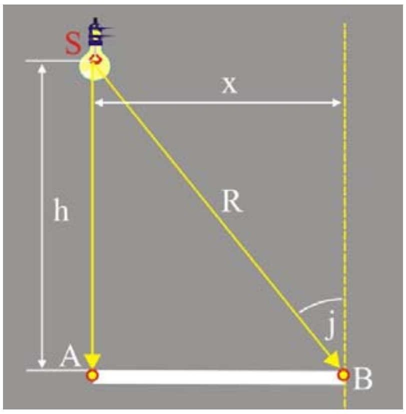


Рис. 245. Координаты осветителя

Решение

1. Заданная заданную по условию задачи освещённость в точке B позволяет, используя закон освещённости, определить величину R

$$E = \frac{I}{R^2}\cos j; \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{\frac{I\cos j}{E}} \cong 1{,}2\ \text{м}.$$

2. В прямоугольном ΔASB, по сути, известны все три угла. Дело в том, что $\angle ASB$ является смежным с известным углом j, поэтому из тригонометрических соображений:

$$h = R\cos j = 0{,}6\ \text{м}.$$

246. Электрическая лампа накаливания мощностью N = 40 Вт излучает световой поток Ф = 415 лм. Лампа подвешена над центром круглого стола диаметром D = 2 м на высоте относительно крышки h = 1,5 м. Определить световую отдачу лампы, силу света источника и освещённость в центре стола и на его периферии.

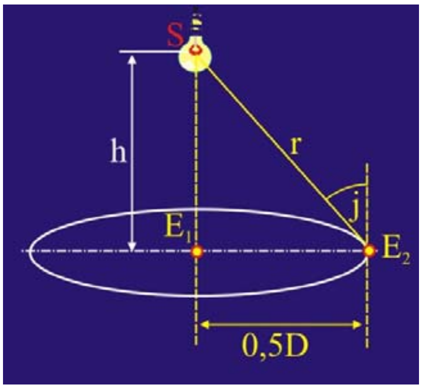


Рис. 246. Освещённость стола

Решение

1. Найдём световую отдачу лампы

$$\eta = \frac{\Phi}{N} \cong 10{,}4\frac{\text{лм}}{\text{Вт}};$$

2. Сила света источника

$$I = \frac{\Phi}{4\pi} \cong 33\ \text{кд};$$

3. Освещённость в центре стола E_1 при j = 0° (cosj = 1)

$$E_1 = \frac{I}{h^2} = \frac{\Phi}{4\pi h^2} \cong 14{,}7\ \text{лк};$$

4. Величина освещённости на периферии стола:

$$E_2 = \frac{I}{r^2}\cos j = \frac{\Phi}{4\pi r^2}\cos j;$$

$$r = \sqrt{h^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2}; \quad \cos j = \frac{h}{r};$$

$$E_2 = \frac{\Phi h}{4\pi\sqrt[3]{\left(h^2 + \frac{D^2}{4}\right)^2}} \cong 12{,}7\ \text{лк};$$

247. Какую среднюю освещённость создаёт электрическая лампа мощностью N = 100 Вт, световая отдача которой η = 13,5 лм/Вт, если на освещаемую поверхность величиной S = 6 м^2 падает 50% всего светового потока, излучаемого лампой?

Решение

1. Запишем величину освещённости следующим образом

$$E = \frac{\Delta\Phi}{S},$$

где

$$\Delta\Phi = 0{,}5\Phi_0 = 0{,}5\eta N;$$

2. Уравнение средней освещённости примет вид:

$$E = \frac{0{,}5\eta N}{S} = 112{,}5 \text{ лк}.$$

---

248. Какой мощности необходимо взять электрическую лампочку, чтобы в точке, отстоящей от осветителя на расстоянии R = 0,5 м создать нормальную освещённость E = 100 лк, если световая отдача лампочки равна η = 13,5 лм/Вт?

Решение

1. Запишем уравнения силы света и светового потока излучаемого лампой

$$I = ER^2; \quad \Phi = 4\pi I = 4\pi ER^2;$$

2. Мощность лампочки определим через её световую отдачу

$$\eta = \frac{\Phi}{N}; \quad \Rightarrow \quad N = \frac{4\pi ER^2}{\eta} \cong 23 \text{ Вт}.$$

---

249. На каком расстоянии необходимо поместить электрическую лампочку мощностью N = 200 Вт, со световой отдачей η = 13,5 лм/Вт, чтобы она в заданной точке создавала освещённость E = 360 лк?

Решение

1. Расстояние от осветителя до заданной, точки, расположенной на расстоянии R можно представить следующим образом:

$$E = \frac{I}{R^2}; \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{\frac{I}{E}};$$

2. Силу света лампы определим из формулы полного светового потока

$$\Phi = 4\pi I; \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\Phi}{4\pi} = \frac{\eta N}{4\pi},$$

откуда

$$R = \sqrt{\frac{\Phi}{4\pi E}} = \sqrt{\frac{\eta N}{4\pi E}} \cong 0{,}6 \text{ м}.$$

---

250. На каком расстоянии друг от друга необходимо подвешивать люминесцентные лампы мощностью N = 80 Вт со светоотдачей η = 65,3 лм/Вт, чтобы освещённость на заданной поверхности в точке, лежащей посередине между двумя лампами, была не меньше E = 100 лк? Высота поверхности над полом h_1 = 0,7 м, расстояние от поверхности до лампы h_2 = 3,5 м, лампы подвешены на расстоянии h_3 = 0,3 м от потолка.

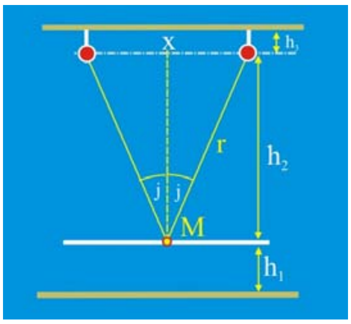


Рис. 250. Две лампы

Решение

1. В исследуемой точке М освещённость представится в виде суммы

$$E_1 + E_2 \geq E,$$

где E – величина нормальной освещённости 100 лк.

2. Так как одинаковые люминесцентные лампы относительно точки М расположены симметрично, то $E_1 = E_2$, или $E = 2E_1 = 2E_2$.

3. Определим освещённость создаваемую одной лампой

$$E_1 = \frac{I}{r^2}\cos j\,;$$

4. Определим из прямоугольного треугольника величину r

$$r = \frac{h_2}{\cos j}\,;$$

5. Перепишем уравнение освещённости

$$E_1 = \frac{I}{h_2^1}\cos^3 j\,;$$

6. Расстояние между соседними лампами

$$x = 2h_2 \mathrm{tg} j\,;$$

7. Косинус угла падения j

$$\cos j = \sqrt[3]{\frac{2\pi E_1 h_2^2}{2I}} = \sqrt[3]{\frac{E h_2^2}{2I}}\,;$$

8. Выразим освещённость через величину светового потока

$$\Phi = \eta N; \quad I = \frac{\Phi}{4\pi} = \frac{\eta N}{4\pi}\,;$$

9. Подставим значение I в уравнение cosj

$$\cos j = \sqrt[3]{\frac{2\pi E h_2^2}{\eta N}} \cong 0{,}9; \quad \Rightarrow \quad j \cong 25{,}7^0\,;$$

10. Расстояние между лампами

$$x = 2h_2 \mathrm{tg} j \cong 1{,}7\ \text{м}\,;$$

---

251. Прожектор даёт пучок света в виде узкого конуса с телесным углом Ω = 0,03 ср. Какую освещённость обеспечит прожектор на расстоянии R = 2 км при использовании в нём ксеноновой лампы мощностью N = 100 кВт со светоотдачей η = 50 лм/Вт при отсутствии поглощения света в воздухе?

Решение

1. Освещённость, создаваемая прожектором

$$E = \frac{\Phi}{S}\cos j = \frac{\eta N}{S}\cos j\,;$$

2. Освещённость в данном случае рассматривается на поверхности радиусом R, т.е.

$$S = \Omega R^2\,;$$

3. На удалении R = 2000 м можно принять $j \approx 0$, т.е. $\cos j \approx 1$

$$E = \frac{\eta N}{\Omega R^2} \cong 83\ \text{лк}\,;$$

---

252. Точечный источник света S, обладающего силой света I = 50 кд, находится над поверхностью стола на высоте R = 1 м. Определить освещённость в некоторой точке M, в которую лучи падают нормально. Как изменится освещённость в этой точке, если сбоку от источника света на расстоянии R поместить плоское зеркало Z с коэффициентом отражения 1?

Решение

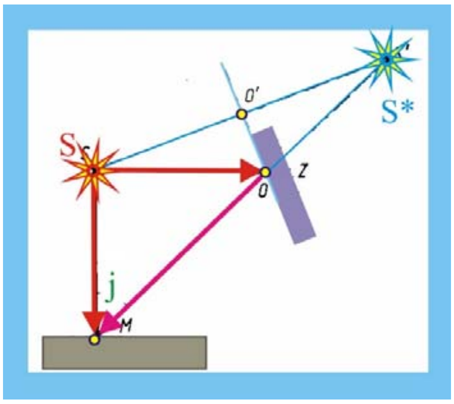


Рис. 252. Источник с зеркалом

1. Освещённость в точке M в отсутствии зеркала

$$E_1 = \frac{I}{R^2} = 50 \text{ лк};$$

2. При установке зеркала Z возникнет мнимый источник света S^*, т.е. исследуемая точка будет освещаться двумя источниками света. Освещённость от мнимого источника определится как:

$$E_2 = \frac{I}{r^2}\cos j,$$

где

$$r = OM + OS^*; \quad j = 45^o;$$

3. Из построений видно, что ΔSOS^* равнобедренный, кроме того

$$SO = SM; \quad OS^* = SM.$$

4. Из ΔOSM

$$OM = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}; \quad \Rightarrow \quad r = R + R\sqrt{2} = R\left(\sqrt{2}+1\right) \cong 2{,}41R;$$

$$r^2 \cong 5{,}8R^2;$$

5. Освещённость точки M при использовании зеркала

$$E = E_1 + E_2 = \frac{I}{R^2} + \frac{I\cos 45^o}{5{,}8R^2} = 50 + \frac{50\cdot 0{,}707}{5{,}8} \cong 56{,}1 \text{ лк} = 1.12E_1.$$

---

253. Экран с расстояния 1 м освещается двумя одинаковыми лампочками, поставленными рядом. Одна лампочка гаснет. На сколько нужно приблизить экран, чтобы его освещённость сохранилась?

Решение

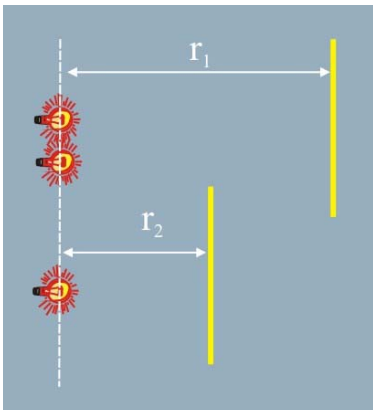


Рис. 253. Приближение экрана

1. Освещённость, создаваемая двумя лампочками

$$E_2 = \frac{2I}{r_1^2};$$

2. При работе одной лампочки неизменность освещённости будет иметь место при:

$$E_1 = \frac{I}{r_2^2};$$

3. Приравняем освещённости

$$E_2 = E_2 = \frac{2I}{r_1^2} = \frac{I}{r_2^2}; \quad \Rightarrow \quad r_2 = r_1\sqrt{2};$$

4. Расстояние, на которое нужно приблизить экран

$$\Delta r = r_1 - r_2 = r_1 - \frac{r_1}{\sqrt{2}} \cong 0{,}3\ \text{м};$$

---

254. По обе стороны от точечного источника света силой I = 2 кд, на одинаковых расстояниях r = 1 м расположены экран и плоское зеркало с коэффициентом отражения равным 1. Плоскости экрана и зеркала параллельны. Какова величина освещённости, создаваемая в в центре экрана?

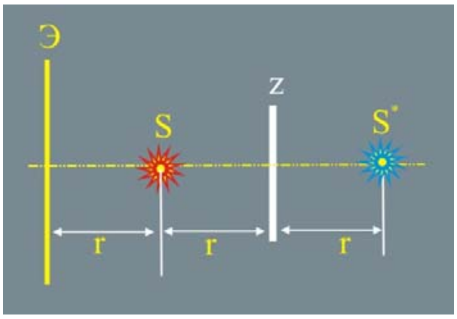


Рис. 254. Отражение света

Решение

1. Зеркало обеспечит возникновение мнимого источника света S_1 с такой же силой, как и источник света S, поэтому

$$E = E_1 + E_2 = \frac{I}{r_1^2} + \frac{I}{r_2^2} = \frac{I}{r_1^2} + \frac{I}{(3r)^2};$$

$$E = \frac{I}{r^2} + \frac{I}{9r^2} = \frac{10I}{9r^2} \cong 2{,}2\ \text{лк};$$

---

255. На какой угол необходимо повернуть площадку, чтобы её освещённость уменьшилась вдвое по сравнению с освещённостью при нормальном падении лучей?

Решение

1. Запишем освещённости при нормальном падении света и под некоторым углом j

$$E_1 = \frac{I}{r^2};\quad E_2 = 0{,}5\frac{I}{r^2} = \frac{I}{r^2}\cos j;$$

$$\cos j = 0{,}5;\quad j = \arccos 0{,}5 = 60^\circ.$$

---

256. На высоте h = 5 м висит лампа и освещает горизонтальную площадку на поверхности земли. На каком расстоянии от центра площадки освещённость поверхности земли будет в два раза меньше, чем в центре?

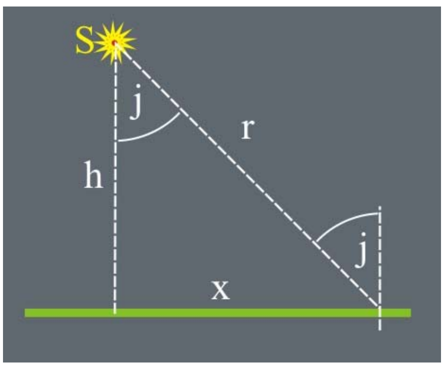


Рис. 256. Освещённость поверхности

Решение

1. Уравнения освещённости нормально под источником света и в искомой точке поверхности

$$E_0 = \frac{I}{h^2};\quad E_x = \frac{I}{r^2}\cos j;$$

2. Определим величину угла j

$$\cos j = \frac{h}{r};$$

3. Расстояние от источника света до искомой точки

$$r = \sqrt{h^2 + x^2};$$

4. Перепишем уравнение освещённости и определим расстояние x

$$E = \frac{Ih}{\left(\sqrt{h^2 + x^2}\right)^3}; \quad \Rightarrow \quad \frac{I}{h^2} = 2I\frac{h}{\left(\sqrt{h^2 + x^2}\right)^3};$$

$$x = h\sqrt{\sqrt[3]{4} - 1} \cong 3{,}83\ \text{м}.$$

---

257. Определить освещённость поверхности Земли, создаваемую нормально падающими солнечными лучами, приняв: яркость Солнца равной $1{,}2\cdot10^9$ кд/м^2; расстояние от Солнца до Земли $1{,}5\cdot10^8$ км, радиус Солнца $7\cdot10^5$ км.

Решение

1. Учитывая величину расстояния от Солнца до Земли и размеры нашей планеты, можно считать, что падающие лучи параллельны, а Солнце можно принять за светящийся диск, яркость которого определится как:

$$B = \frac{2I}{S},$$

где $S = \pi R^2$ – площадь диска Солнца, коэффициент 2 учитывает, что у диска две излучающих поверхности.

2. Перепишем уравнение яркости

$$B = \frac{2I}{\pi R^2}; \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\pi B R^2}{2};$$

3. Так как cosj = 1, то

$$E = \frac{\pi B R^2}{2r^2} = \frac{3{,}14\cdot 1{,}2\cdot 10^9\cdot\left(7\cdot 10^8\right)}{2\left(1{,}5\cdot 10^{11}\right)^2} \cong 8\cdot 10^4\ \text{лк};$$

---

258. Электрическая лампочка с силой света 100 кд заключена в матовый сферический плафон диаметром 5 см. Пренебрегая поглощением света материалом плафона, определить светимость и яркость лампочки.

Решение

1. Запишем уравнение светимости источника

$$R = \frac{\Phi}{S},$$

где $\Phi = I\Omega = I\cdot 4\pi$ – световой поток, $S = \pi D^2$ – площадь излучателя.

2. Перепишем уравнение светимости

$$R = \frac{4\pi I}{\pi D^2} = \frac{4I}{D^2} = \frac{4\cdot 100}{\left(5\cdot 10^{-2}\right)^2} \cong 1{,}6\cdot 10^5\ \frac{\text{лм}}{\text{м}^2};$$

3. Яркость лампочки

$$B = \frac{R}{\pi} = \frac{1{,}6\cdot 10^5}{3{,}14} \cong 5{,}1\cdot 10^4\ \frac{\text{кд}}{\text{м}^2}.$$

---

259. Лампа силой света I_1 = 60 кд используется при фотопечати. При расположении лампы на расстоянии r_1 = 1,5.м от негатива, время экспозиции составляет τ_1 = 2,5 с. Найти время экспозиции при использовании лампочки с силой света I_2 = 40 кд, расположенной на расстоянии r_2 = 2 м от негатива.

Решение

1. Энергия светового потока, получаемая фотобумагой за время τ, равна произведению величины светового потока Ф на время экспозиции

$$W = \Phi\tau = ES\tau;$$

2. Для каждого случая экспонирования фотобумаги можно записать следующие соотношения

$$W_1 = E_1S\tau_1; \quad W_2 = E_2S\tau_2;$$

3. Поскольку на фотобумагу должно попадать одинаковое количество световой энергии, то

$$W_1 = W_2; \quad \Rightarrow \quad E_1S\tau_1 = E_2S\tau_2; \quad \Rightarrow \quad \tau_2 = \frac{E_1\tau_1}{E_2};$$

4. Используя закон освещённости, запишем

$$E_1 = \frac{I_1}{r_1^2}; \quad E_2 = \frac{I_2}{r_2^2};$$

5. Подставим E_1 и E_2 в уравнение времени экспозиции

$$\tau_2 = \frac{I_1 r_2^2 \tau_1}{I_2 r_1^2} \cong 6{,}4 \text{ с}.$$

---

260. Лампа с силой света I = 200 кд укреплена под потолком комнаты. Определить полный световой поток Ф, падающий на стены и пол комнаты.

Решение

1. Стены и пол комнаты видны из точки подвеса лампы под углом

$$\Omega = 2\pi;$$

2. Определим величину светового потока

$$\Phi = I\Omega = 200 \cdot 6{,}28 = 1256 \text{ лм}.$$

---

261. Фотоснимок печатается «контактным способом», с использованием электрического осветителя, расположенного на расстоянии r_1 = 60 см от снимка при времени экспозиции τ_1 = 16 с. Какое время экспозиции следует установить τ_2 при использовании осветителя втрое меньшей мощности при расстоянии r_2 = 45 см?

Решение

1. Фотографическое действие света на фоточувствительный слой фотобумаги пропорционально световой энергии и времени экспозиции

$$W_1 = W_2; \quad \Rightarrow \quad E_1S\tau_1 = E_2S\tau_2; \quad \Rightarrow \quad \tau_2 = \frac{E_1\tau_1}{E_2};$$

Для получения фотоснимков одинаковой плотности необходимо выполнение условия:

$$\frac{I_1}{r_1^2}\tau_1 = \frac{I_2}{r_2^2}\tau_2; \quad \Rightarrow \quad \tau_2 = \frac{I_1}{\frac{I_1}{3}}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\tau_1 = 3\left(\frac{45}{60}\right)^2 16 = 27 \text{ с}.$$

---

262. Электрические осветители, обладающие силой света I_1 = 75 кд и I_2 = 48 кд, находятся на одной линии на расстоянии r = 1,8 м. Где, между ними следует поместить экран, чтобы его освещённость с обеих сторон была одинаковой?

Решение

1. Одинаковая освещённость экрана будет наблюдаться при выполнении условия

$$\frac{I_1}{r_1^2} = \frac{I_2}{r_2^2}; \quad I_1 r_2^2 = I_2 r_1^2;$$

2. Образуем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} I_1 r_2^2 - I_2 r_1^2 = 0; \\ r_1 + r_2 = r; \end{aligned}\right\} \quad r_2 = r - r_1; \quad I_1(r - r_1)^2 - I_2 r_1^2 = 0; \quad I_1(r^2 - 2rr_1 + r_1^2) - I_2 r_1^2 = 0;$$

$$I_1 r^2 - 2rr_1 I_1 + I_1 r_1^2 - I_2 r_1^2 = 0; \quad r_1^2(I_1 - I_2) - 2r_1 r I_1 + I_1 r^2 = 0; \quad r_1^2 - r_1\frac{2rI_1}{I_1 - I_2} + \frac{I_1 r^2}{I_1 - I_2} = 0;$$

3. Полученное квадратное уравнение имеет удовлетворяющий условиям задачи корень

$$r_1 = \frac{I_1 - \sqrt{I_1 I_2}}{I_1 - I_2} r = 1\ \text{м};$$

4. Экран нужно расположить на расстоянии r_2 = 0,8 м от маломощного осветителя и на расстоянии r_1 = 1 м от более мощного осветителя.

---

263. На горизонтальном столе лежит раскрытый фолиант, корешок которого имеет длину ℓ = 52 см. Книга освещается лампой. Линия, соединяющая верх страницы с нитью накаливания лампы, имеет такую же длину ℓ и наклонена под углом φ = 60° к поверхности стола. Определить разницу освещённостей верха и низа страницы, если лампа обеспечивает силу света I = 60 кд.

Решение

1. Принимая нить накаливания лампы за точечный источник света, освещённость верха и низа книги можно представить следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \frac{I\cos\alpha}{\ell^2} = \frac{I\sin\varphi}{\ell^2}; \\ E_2 &= \frac{I\cos\alpha}{r^2} = \frac{I\sin\frac{\varphi}{2}}{r^2}; \end{aligned}\right\}$$

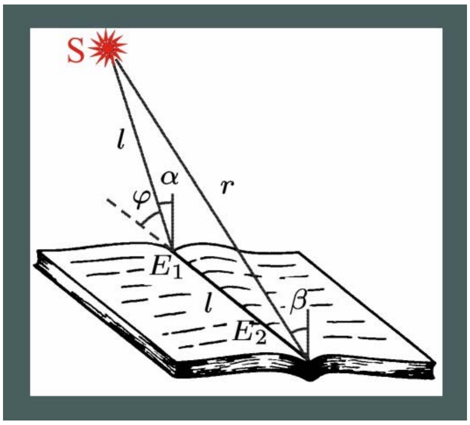


Рис. 263. Раскрытая книга

2. Расстояние r определим из равнобедренного треугольника по теореме о внешнем угле

$$r = 2\ell\cos\frac{\varphi}{2} = 104 \cdot 0{,}87 \cong 90\ \text{см};$$

3. Разность освещённостей

$$\Delta E = E_1 - E_2 = I\left(\frac{\sin\varphi}{\ell^2} - \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{r^2}\right) = 60\left(\frac{0{,}87}{0{,}27} - \frac{0{,}5}{0{,}81}\right) \cong 155\ \text{лк};$$

---

264. Определить величину полного светового потока Ф, создаваемого источником света, помещённым на мачте высотой h = 12 м, если на расстоянии x = 16 м от основания мачты он создаёт освещённость E_1 = 3 лк.

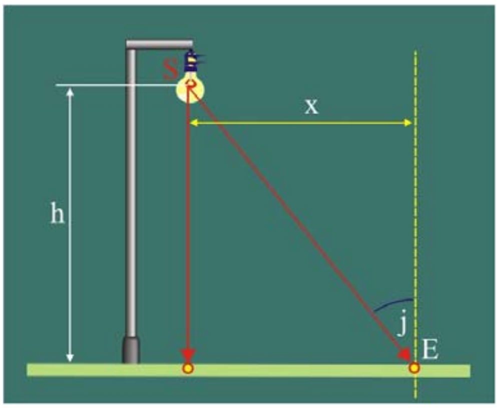


Рис. 16.22. Световой поток

Решение

1. Запишем уравнения освещённостей

$$E_1 = \frac{I}{h^2}; \quad \Rightarrow \quad I = E_1 h^2;$$

$$E_2 = \frac{I}{h^2 + x^2} = \frac{E_1 h^2}{h^2 + x^2};$$

2. Из определения светового потока следует:

$$\Phi = E_2 S = E_2 \pi x^2;$$

$$\Phi = \frac{\pi E_1 h^2 x^2}{h^2 + x^2} \cong \frac{3{,}14 \cdot 3 \cdot 144 \cdot 256}{144 + 256} \cong 868 \text{ лк.}$$

265. На какой высоте над чертёжной доской нужно повесить лампу мощностью N = 200 Вт, чтобы получить освещённость доски под лампой E = 50 лк? Доска наклонена к горизонту под углом α = 30°, светоотдача лампы составляет L = 12 лм/Вт.

Решение

1. Светоотдачей лампы L называется отношение полного светового потока Ф, излучаемого лампой, к её электрической мощности

$$L = \frac{\Phi}{N};$$

2. Если лампу рассматривать как точечный источник света, то световой поток можно выразить через силу света лампы I и телесный угол Ω

$$\Phi = I\Omega = 4\pi I;$$

3. Освещённость E определим как:

$$E = \frac{I\cos\alpha}{h^2},$$

4. Объединяя записанные выше уравнения, получим:

$$h = \sqrt{\frac{LN\cos\alpha}{4\pi E}} = \sqrt{\frac{12 \cdot 200 \cdot 0{,}87}{12{,}56 \cdot 50}} \cong 1{,}82 \text{ м};$$

266. На высоте h >> 1 м от поверхности стола расположен точечный источник света силой I = 25 кд. Какова будет освещённость в точке, расположенной под источником, если на пути лучей поместить горизонтально линзу с оптической силой 1 дптр так, чтобы источник света находился в фокусе?

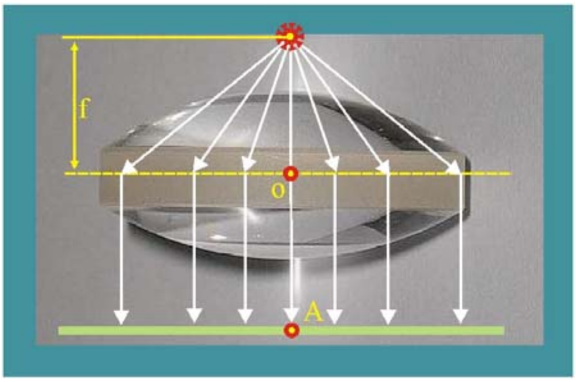


Рис. 266. Источник света с линзой

Решение

1. Луч света от источника, про-

ходящий через оптический центр линзы не меняет своих свойств, т.е. освещённость точки O и A будет одинаковой.

2. Оптическая сила линзы в 1 дптр соответствует фокусному расстоянию F = 1 м, в этом случае освещённость в точке O можно записать уравнением

$$E_o = \frac{I}{r^2} = \frac{I}{F^2}; \quad \Rightarrow \quad E_A = E_o;$$

---

267. В зимний период времени под солнечными лучами снег на крышах зданий тает более интенсивно, чем на поверхности земли. Почему?

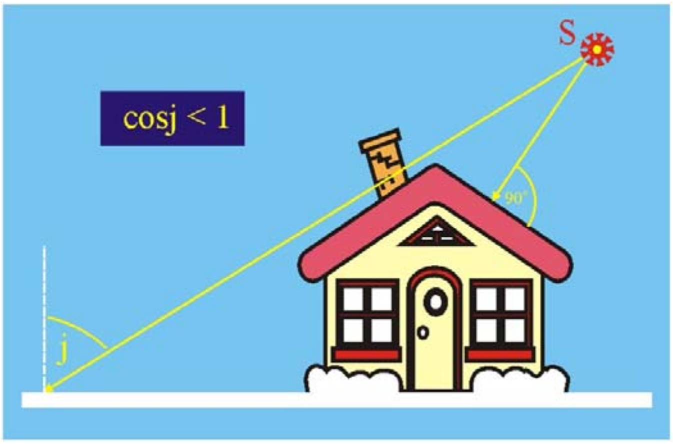


Рис. 16.25. Таяние снега на крыше

Решение

1. Освещённость поверхности в общем случае определяется уравнением

$$E = \frac{I}{r^2}\cos j,$$

где I – сила светового потока, одинаковая для всех точек земной поверхности в данной местности, r – расстояние до Солнца, тоже величина постоянная, j – угол между нормалью к данной поверхности и направлением солнечных лучей.

2. Крыши строений, как правило делаются покатыми, поэтому для поверхностей крыш угол j меньше, чем для земной поверхности. Например при $j = 0^o$, $\cos j = 1$.

Волновая оптика

11. Скорость света и показатель преломления

1. В астрономии расстояния ввиду их огромной величины измеряют в световых годах. Выразить световой год в километрах.

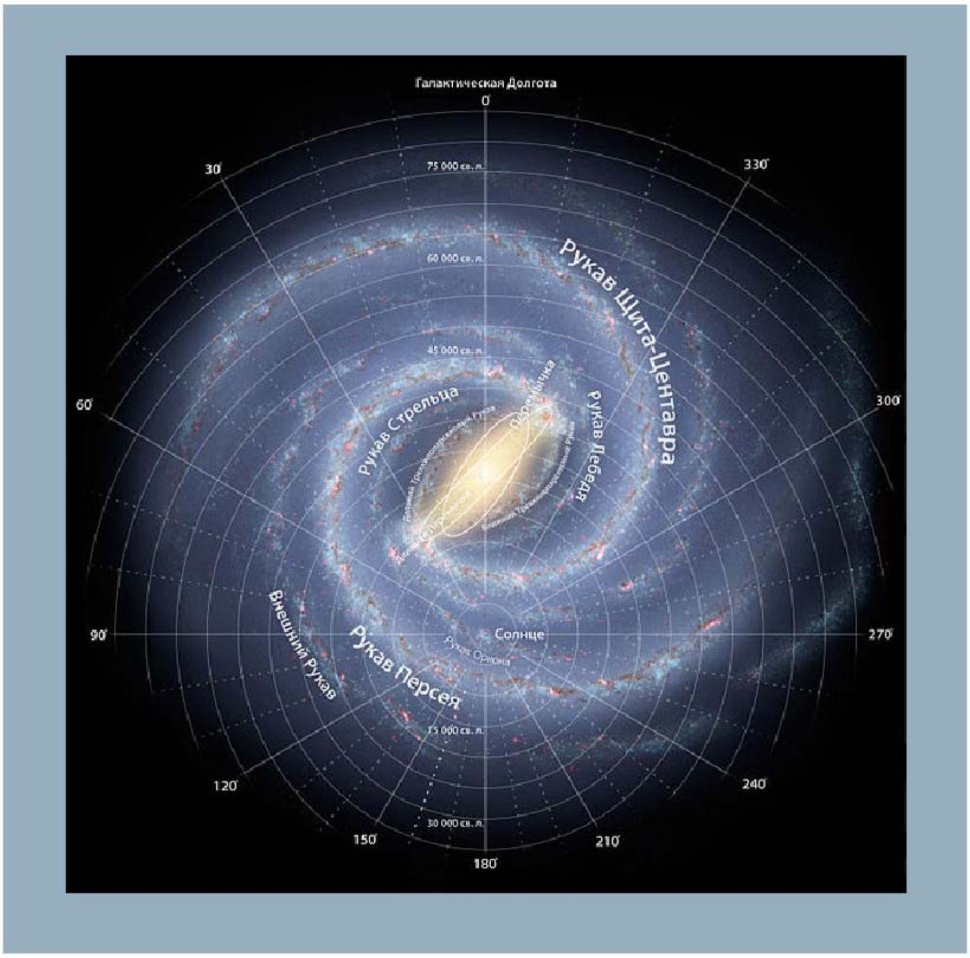


Рис. 1.1. Космические расстояния в Галактике «Млечный Путь»

Решение

1. Световой год является внесистемной единицей длины, равной расстоянию, проходимому светом за один год.

2. Более точно, по определению Международного астрономического союза (МАС) световой год равен расстоянию, которое свет проходит в вакууме, не

испытывая влияния гравитационных полей, за один юлианский год. Именно это определение рекомендовано для использования.

3. Ранее световым годом называлось расстояние, проходимое светом за один тропический год, отнесённый к эпохе 1900,0. Новое определение отличается от старого примерно на 0,002 %. Так как данная единица расстояния не используется для высокоточных измерений, практического различия между старым и новым определениями нет.

4. Среднее расстояние до Луны приблизительно 376 300 км, это значит, что лучу света, испущенному с поверхности Земли, потребуется 1,2 – 1,3 с, чтобы достичь поверхности нашего естественного спутника.

5. Одна астрономическая единица равна приблизительно $1{,}5\cdot10^{8}$ км. Таким образом, лучу света, испущенного с поверхности Солнца необходимо около 500 секунд, или 8 мин 20 с, чтобы добраться до Земли.

6. Ближайшая к нам звезда (не считая Солнца), Проксима Центавра, расположена на расстоянии в 1,3 пк, или 4,22 св. года.

7. Центр нашей Галактики лежит в ~10 килопарсек от нас, что составляет ~30 000 световых лет.

8. Парсек – это такое расстояние, с которого средний радиус земной орбиты (равный 1 а. е.), перпендикулярный лучу зрения, виден под углом в одну угловую секунду (1″). 1 парсек = 3,08568·1016 м = 3,2616 световых лет.

9. Ближайшая к нам спиральная галактика, знаменитая галактика Андромеды, удалена от нас на 772 кпк или на 2,5 млн световых лет.

10. Астрономическая единица с хорошей точностью равна 500 световым секундам, то есть свет доходит от Солнца до Земли примерно за 500 секунд. 1 световая секунда = 299 792,5 километров. 1 световая минута = 17 987 550 километров.

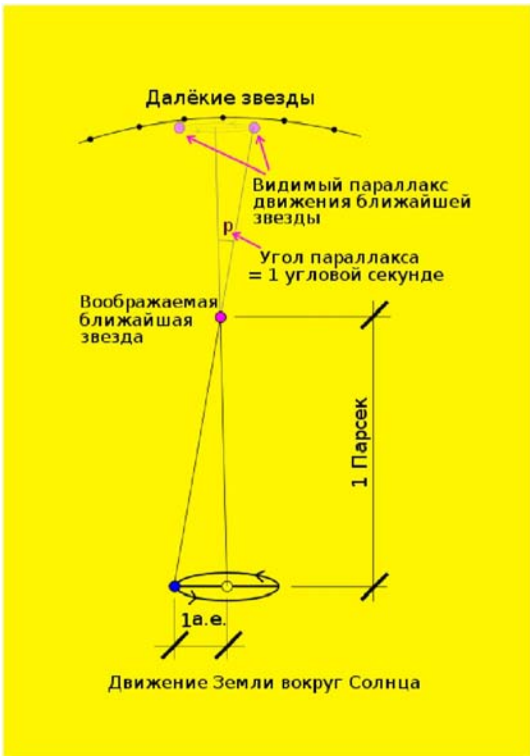


Рис. 1.2. К определению парсека

11. Принимая земной год равным τ = 31557600 с, а скорость света $c = 3\cdot10^{8}$ м/с получим:

$$\Im = \tau c \cong 9{,}47328\cdot10^{15}\ \text{м} = 9{,}47328\cdot10^{12}\ \text{км}.$$

2. Сколько времени понадобится световому излучению, чтобы преодолеть расстояние от Солнца до Земли, если расстояние между их поверхностями равно $s \cong 1{,}5\cdot10^{8}$ км?

Решение

1. Время путешествия солнечного света

$$\tau = \frac{s}{c} = \frac{1{,}5\cdot10^{11}}{3\cdot10^{8}} \cong 500\ \text{с} \cong 8{,}3\ \text{мин}.$$

3. Оптическая плотность льда меньше, чем воды. В какой из этих сред свет распространяется с большей скоростью?

Решение

1. Показатель преломления некоторых сред:
- Воздух – 1,0002926;
- Вода – 1,332986;
- Глицерин – 1,4729;
- Бензол – 1,500;
- Органическое стекло – 1,51;
- Фианит (CZ) – 2,15 – 2,18;
- Кремний – 4,010;
- Алмаз –2,419;
- Кварц – 1,544;
- Киноварь – 3,02;
- Топаз – 1,63; Лёд – 1,31;
- Масло оливковое – 1,46;
- Сахар – 1,56; Спирт этиловый – 1,36;
- Слюда – 1,56 – 1,60;
- Медь при λ=1 мкм – 0,32615 – 0,33259.

2. Скорость v распространения света в среде определяется уравнением:

$$v = c/n,$$

поскольку показатель преломления сета для льда $n_1 = 1,31$; а для воды $n_2 = 1,33$; то скорость распространения света во льду будет больше.

---

4. Скорость распространения света в алмазе $v \cong 124000$ км/с. Вычислить показатель преломления алмаза

Решение

1. Показатель преломления и скорость распространения света связаны зависимостью

$$n = \frac{c}{v} = \frac{3\cdot 10^8}{1,24\cdot 10^8} \cong 2,42;$$

---

5. Зная скорость света в вакууме $c \cong 3\cdot 10^8$ м/с, вычислить скорость света в воде и стекле.

Решение

1. Скорость распространения света в воде

$$v_1 = \frac{c}{n_1} = \frac{3\cdot 10^8}{1,33} \cong 2,25\cdot 10^8 \text{ м/с};$$

$$v_2 = \frac{c}{n_2} = \frac{3\cdot 10^8}{1,51} \cong 1.987\cdot 10^8 \text{ м/с};$$

---

6. Показатель преломления воды для красного света $n_1 \cong 1{,}331$, а для фиолетового света $n_2 \cong 1{,}334$. Определить скорость распространения красного и фиолетового света в воде.

Решение

1. . Скорость распространения красного и фиолетового света в воде

$$v_1 = \frac{c}{n_1} = \frac{3\cdot 10^8}{1{,}331} \cong 2{,}25\cdot 10^8 \text{ м/с};$$

$$v_2 = \frac{c}{n_2} = \frac{3\cdot 10^8}{1{,}334} \cong 2{,}2488\cdot 10^8 \text{ м/с};$$

---

7. На сколько скорость света в вакууме больше скорости света в алмазе?

Решение

1. Определим скорость света в алмазе

$$v = \frac{c}{n} \cong \frac{3\cdot 10^8}{2{,}419} \cong 1{,}24\cdot 10^8 \text{ м/с};$$

2. разность скоростей света в вакууме и алмазе

$$\Delta v = c - v = 1.76\cdot 10^8 \text{ м/с};$$

---

8. Луч света переходит из воздуха в стекло. На сколько процентов при этом изменяется скорость света?

Решение

1. Изменение скорости определится уравнением

$$\zeta = \frac{n - 1}{n} = \frac{1{,}51 - 1}{1{,}51} \cong 0{,}338 \ \ (33{,}8\%);$$

---

9. При переходе светового луча из воздуха в некоторое вещество скорость света изменилась на ζ = 20%. Определить показатель преломления вещества.

Решение

1. Определим скорость света в заданном веществе

$$v = 0{,}8c = 2{,}4\cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

2. Показатель преломления вещества

$$n = \frac{c}{v} \cong \frac{3\cdot 10^8}{2{,}4\cdot 10^8} \cong 1{,}25;$$

---

10. Луч света проходит через слой воды в некоторое вещество. Определить абсолютный показатель преломления этого вещества, если скорость света в этом веществе на $\Delta v = 1\cdot 10^8$ м/с меньше, чем в воде.

Решение

1. Определим скорость света в воде

$$v_1 = \frac{c}{n_1} = \frac{3\cdot 10^8}{1{,}33} \cong 2{,}25\cdot 10^8 \text{ м/с};$$

2. Скорость света в заданном веществе

$$v_2 = v_1 - \Delta v = 1{,}25\cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

3. Абсолютный показатель преломления заданного вещества

$$n_2 = \frac{c}{v_2} \cong \frac{3\cdot 10^8}{1{,}25\cdot 10^8} \cong 2{,}4;$$

---

11. В сосуд налиты скипидар и вода. Найти отношение слоёв жидкости, если время прохождения света в них одинаково. Свет падает нормально к поверхностям жидкостей.

Решение

1. Воспользуемся табличными значениями показателей преломления для воды $n_1 = 1{,}33$ и для скипидара $n_2 = 1{,}46$ и запишем уравнения скоростей света в этих жидкостях

$$v_1 = \frac{c}{n_1} \cong 2{,}56\cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad v_2 = \frac{c}{n_2} \cong 2{,}1\cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

2. Время прохождения светом слоёв жидкости

$$\tau_1 = \frac{h_1}{v_1} = \frac{h_1 n_1}{c}; \quad \tau_2 = \frac{h_2}{v_2} = \frac{h_2 n_2}{c};$$

$$\tau_1 = \tau_2; \quad \frac{h_1 n_1}{c} = \frac{h_2 n_2}{c}; \quad \Rightarrow \quad \frac{h_1}{h_2} = \frac{n_2}{n_1} \cong 1{,}1;$$

---

12. Два пучка света падают нормально на пластинки одинаковой толщины изготовленные из стекла и алмаза. Во сколько раз и в каком веществе время прохождения лучей меньше?

Решение

1. Время прохождения света в пластинках при одинаковой их толщине определяется скоростью распространения света

$$\tau_1 = \frac{h}{v_1} = \frac{hn_1}{c}; \quad \tau_2 = \frac{h}{v_2} = \frac{hn_2}{c};$$

2. Найдём отношение времён распространения света

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{n_2}{n_1} \cong \frac{2{,}417}{1{,}33} \cong 1{,}82,$$

где $n_1 = 1{,}33$ – показатель преломления света в стекле, $n_2 = 2{,}417$ – показатель преломления света в алмазе.

3. Время распространения будет меньше в стекле.

---

13. Пучок света падает нормально на рубиновую пластинку, поверх которой налито касторовое масло. Толщина слоя масла в 2 раза меньше толщины пластинки. Найти отношение времени распространения света в пластине и в масле.

Решение

1. Примем следующие значения показателя преломления: рубина – n_1 = 1,76; касторового масла – n_2 = 1,48

2. Найдём отношение времён распространения света с учётом того, что $h_1 = 2h_2$

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = 2\frac{n_2}{n_1} \cong \frac{2\cdot 1{,}76}{1{,}48} \cong 2{,}38\,.$$

---

14. Пучок света падает нормально на поверхность кварцевой пластинки толщиной h = 0,2 см. На сколько увеличится время прохождения пластинки светом по сравнению с тем, если бы свет проходил такое же расстояние в вакууме?

Решение

1. Принимая показатель преломления кварца равным n_1 = 1,544, определим время прохождения светом толщины h

$$\tau_1 = \frac{h}{v_1} = \frac{hn_1}{c} = \frac{2\cdot 10^{-3}\cdot 1{,}544}{3\cdot 10^{8}} \cong 1{,}029\cdot 10^{-11}\,c\,;$$

2. Время прохождения расстояния h светом в вакууме

$$\tau_0 = \frac{h}{c} = \frac{2\cdot 10^{-3}}{3\cdot 10^{-8}} \cong 6{,}67\cdot 10^{-12}\,c\,;$$

3. Разность времени прохождения

$$\Delta\tau = \tau_1 - \tau_0 = \frac{h}{c}(n_1 - 1) = 3{,}62\cdot 10^{-12}\,c\,.$$

---

15. Луч света падает на поверхность раздела двух сред под углом α = 30°. Определить угол преломления β, если скорость света в первой среде v_1 = $2{,}5\cdot 10^8$ м/с, а абсолютный показатель преломления второй среды n_2 = 1,4.

Решение

1. Запишем закон преломления света и определим искомую величину, с учётом того, что $n_1 = c/v_1$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}; \quad \Rightarrow \quad \beta = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha n_1}{n_2}\right) = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha c}{v_1 n_2}\right);$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{0{,}5\cdot 3\cdot 10^8}{2{,}5\cdot 10^8\cdot 1{,}4}\right) \cong 25{,}3^{\circ}\,;$$

---

16. Луч света падает на границу раздела двух сред под углом α = 30°. Скорость распространения света в первой среде составляет v_1 = $1{,}25\cdot 10^8$ м/с. Определить показатель преломления второй среды, если известно, что отражённый и преломлённый лучи перпендикулярны друг другу.

Решение

1. Определим показатель преломления первой среды

$$n_1 = \frac{c}{v_1} \cong \frac{3\cdot 10^8}{1{,}25\cdot 10^8} \cong 2{,}4\,;$$

2. Показатель преломления второй среды определим из закона преломления света

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin(90-\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad \Rightarrow \quad n_2 = n_1 \mathrm{tg}\alpha \cong 1{,}385\,;$$

---

17. Для полного внутреннего отражения необходимо чтобы световой луч падал на границу раздела среда – вакуум под углом не менее 60°. Определить скорость света в данной среде и её показатель преломления.

Решение

1. Запишем уравнение полного внутреннего отражения, из которого найдём показатель преломления среды n_1, принимая показатель преломления вакуума $n_0 = 1$

$$\sin\alpha_0 = \frac{n_0}{n_1}; \quad n_0 = 1; \quad \Rightarrow \quad n_1 = \frac{1}{\sin\alpha_0} = \frac{1}{0{,}87} \cong 1{,}154\,;$$

2. Определим скорость распространения света в среде с найденным показателем преломления

$$v_1 = \frac{c}{n_1} = c\sin\alpha_0 \cong 2{,}6\cdot 10^8\,\frac{м}{c}\,.$$

---

18. Точечный источник света находится на дне сосуда с жидкостью с показателем преломления n = 5/4 на глубине h = 30 см. Определить максимальное и минимальное время, которое свет от источника и выходящий наружу в воздух, затрачивает на прохождение слоя жидкости.

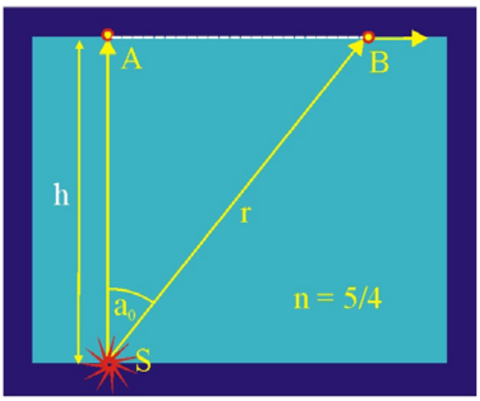


Рис. 18. Луч из жидкости

Решение

1. Минимальное время будет соответствовать траектории SA, т.е. при нормальном падении луча на поверхность жидкости

$$\tau_{min} = \frac{h}{v} = \frac{hn}{c} = \frac{0{,}3\cdot 1{,}25}{3\cdot 10^8} \cong 1{,}25\cdot 10^{-9}\,c\,;$$

2. Максимальное время будет иметь место при распространении луча под предельным углом полного отражения a_0, при этом лучу необходимо пройти до выхода в воздух расстояние r·

3. Определим предельный угол a_0

$$\sin a_0 = \frac{1}{n} = \frac{4}{5}; \quad a_0 = \arcsin 0{,}8 \cong 53{,}1^\circ\,;$$

4. Расстояние r из прямоугольного треугольника ΔSAB

$$r\cos a_0 = h; \quad \Rightarrow \quad r = \frac{h}{\cos a_0} = \frac{0,3}{0,6} = 0,5\ \text{м};$$

5. Максимально возможное время движения светового луча в жидкости

$$\tau_{max} = \frac{r}{v} = \frac{rn}{c} = \frac{0,5 \cdot 1,25}{3 \cdot 10^8} \cong 2,1 \cdot 10^{-9}\ \text{с};$$

---

19. Определить предельный угол полного внутреннего отражения для границы раздела скипидар – воздух и скорость распространения света в скипидаре, если известно, что при угле падения света из воздуха α = 45° угол преломления β = 30°.

Решение

1. Показатель преломления скипидара

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{0,707}{0,5} \cong 1,41;$$

2. Угол полного внутреннего отражения

$$\sin\alpha_0 = \frac{1}{n} \cong 0,709; \quad \alpha_0 = \arcsin 0,709 \cong 45,2^\circ;$$

3. Скорость распространения света в скипидаре

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1.41} \cong 2,13 \cdot 10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

---

20. Какие частоты колебаний соответствуют крайним красным (λ = 0,76 мкм) и крайним фиолетовым (λ = 0,4 мкм) лучам видимой части спектра?

Решение

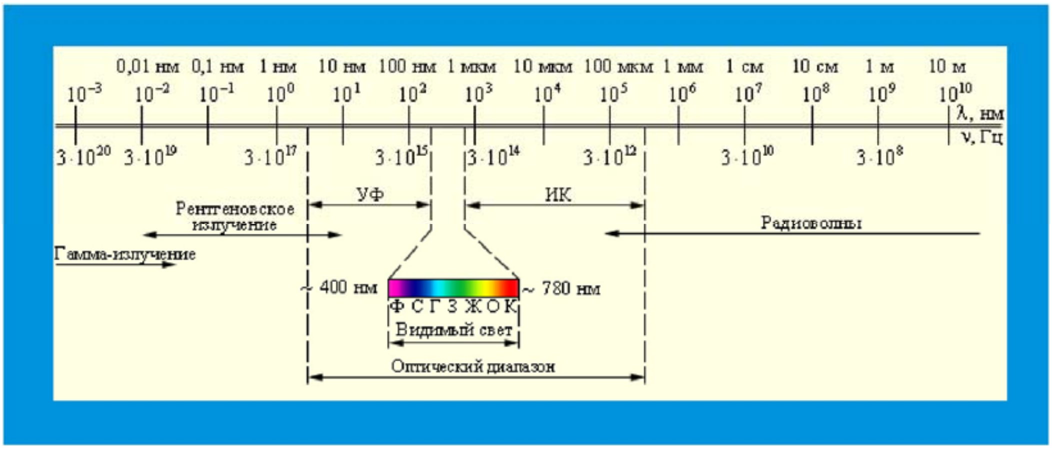


Рис. 20. Шкала электромагнитных волн

1. Скорость распространения световых волн их частота и длина волны связаны отношением

$$c = \lambda\nu; \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{c}{\lambda};$$

$$\nu_к = \frac{3 \cdot 10^8}{7,6 \cdot 10^{-7}} \cong 3,95 \cdot 10^{14}\ \text{Гц}; \quad \nu_ф = \frac{3 \cdot 10^8}{4 \cdot 10^{-7}} \cong 7,5 \cdot 10^{14}\ \text{Гц};$$

---

21. Человеческий глаз воспринимает свет, как электромагнитное излучение в диапазоне частот от $\nu_1 = 4 \cdot 10^{14}$ Гц до $\nu_2 = 7{,}5 \cdot 10^{14}$ Гц. Определить интервал длин волн соответствующих заданному диапазону частот.

Решение

1. Интервал длин волн, соответствующий заданному частотному диапазону

$$\lambda_1 = \frac{c}{\nu_1} = \frac{3 \cdot 10^8}{4 \cdot 10^{14}} \cong 7{,}5 \cdot 10^{-7}\,\text{м}; \quad \lambda_2 = \frac{c}{\nu_2} = \frac{3 \cdot 10^8}{7{,}5 \cdot 10^{14}} \cong 4 \cdot 10^{-7}\,\text{м};$$

---

22. Показатель преломления воды для света с длиной волны в вакууме λ_1 = 0,76 мкм – n = 1,329, а для света с длиной волны λ_2 = 0,4 мкм – n_2 = 1,344. Для каких лучей скорость света в воде больше?

Решение

1. Скорость распространения световых волн с λ_1

$$v_1 = \frac{c}{n_1} = \frac{3 \cdot 10^8}{1{,}329} \cong 2{,}257 \cdot 10^8\,\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$v_2 = \frac{c}{n_2} = \frac{3 \cdot 10^8}{1{,}344} \cong 2{,}232 \cdot 10^8\,\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

2. Разность скоростей распространения

$$\Delta v = v_1 - v_2 \cong 2{,}5 \cdot 10^6\,\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

---

23. Вода освещена красным светом, для которого длина волны в воздухе λ_1 = 0,7 мкм. Какой будет длина волны этого света в воде. Какой цвет увидит человек, открывший глаза под водой?

Решение

1. Определим частоту и скорость света в воде

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{7 \cdot 10^{-7}} \cong 4{,}28 \cdot 10^{14}\ \text{Гц}; \quad v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1{,}33} \cong 2{,}26 \cdot 10^8\,\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

2. Найдём длину волны света в воде

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{2{,}26 \cdot 10^8}{4{,}28 \cdot 10^{14}} \cong 5{,}28 \cdot 10^{-7}\,\text{м};$$

3. Наблюдателем в воде будет восприниматься красный цвет, т.к. частота света при переходе из воздуха в воду не изменяется.

---

24. Определить показатель преломления среды, если известно, что свет с частотой $\nu = 4{,}4 \cdot 10^{14}$ имеет в ней длину волны λ = 0,51 мкм.

Решение

1. Определим скорость света в заданной среде

$$v = \nu\lambda = 2 \cdot 10^8\,\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

2. Показатель преломления среды

$$n = \frac{c}{v} \cong 1{,}5;$$

---

25. На сколько длина волны световых лучей красного цвета в вакууме отличается от длины волны этих лучей в воде? Длина волны красного света в вакууме равна λ_0 = 0,73 мкм.

Решение

1. Определим частоту излучения красного цвета

$$\nu = \frac{c}{\lambda_0} \cong \frac{3\cdot 10^8}{7{,}3\cdot 10^{-7}} \cong 4{,}1\cdot 10^{14}\ \text{Гц};$$

2. Определим скорость распространения красного света в воде

$$v = \frac{c}{n} \cong \frac{3\cdot 10^8}{1{,}333} \cong 2{,}25\cdot 10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

3. Длина волны в воде

$$\lambda = \frac{v}{\nu} \cong \frac{2{,}25\cdot 10^8}{4{,}1\cdot 10^{14}} \cong 0{,}548\ \text{мкм};$$

4. Разница длин волн

м

---

26. Скорость распространения фиолетовых лучей с частотой $\nu = 7{,}5{\cdot}10^{14}$ Гц в воде $v = 2{,}23{\cdot}10^8$ м/с. На сколько изменится длина волны при переходе в воздух? Найти по этим данным показатель преломления воды.

Решение

1. Длина световых волн заданной частоты в воде

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{2{,}23\cdot 10^8}{7{,}5\cdot 10^{14}} \cong 2{,}973\cdot 10^{-7}\ \text{м};$$

2. Длина волны заданного света в воздухе

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu} = \frac{3\cdot 10^8}{7{,}5\cdot 10^{14}} \cong 4\cdot 10^{-7}\,\text{м};$$

3. Изменение длины волны

$$\Delta\lambda = \lambda_0 - \lambda \cong 1{,}027\cdot 10^{-7}\,\text{м};$$

4. Величина показателя преломления воды

$$n = \frac{c}{v} \cong 1{,}335;$$

---

27. Два световых луча одинаковой длины волны распространяются один – в вакууме, другой – в стекле. На сколько отличаются их частоты, если частота световой волны в вакууме $\nu = 6{\cdot}10^{14}$ Гц.

Решение

1. Определим длину заданной световой волны

$$c = \lambda\nu; \quad \Rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu} \cong 5\cdot 10^{-7}\,\text{м}$$

2. Скорость распространения в стекле

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1{,}33} \cong 2{,}256 \cdot 10^8 \frac{м}{с};$$

3. Частота световой волны в воде

$$\nu = \frac{v}{\lambda} \cong \frac{2{,}256 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^{-7}} \cong 4{,}5 \cdot 10^{14}; \quad \Rightarrow \quad \Delta\nu = 1{,}5 \cdot 10^{14}\,Гц;$$

---

28. Два световых луча одинаковой длины волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м распространяются один – в воде, второй – в скипидаре. На сколько отличается частота света этих лучей?

Решение

1. Определим скорости распространения заданной световой волны в воде ($n_1 = 1{,}33$) и скипидаре ($n_2 = 1{,}47$)

$$v_1 = \frac{c}{n_1} \cong \frac{3 \cdot 10^8}{1{,}33} \cong 2{,}256 \cdot 10^8 \frac{м}{с};$$

$$v_2 = \frac{c}{n_2} \cong \frac{3 \cdot 10^8}{1{,}47} \cong 2 \cdot 10^8 \frac{м}{с};$$

2. Найдём частоты колебаний в заданных средах

$$\nu_1 = \frac{v_1}{\lambda} \cong \frac{2{,}256 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^{-7}} \cong 4{,}512 \cdot 10^{14}\ Гц;$$

$$\nu_2 = \frac{v_2}{\lambda} \cong \frac{2 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^{-7}} \cong 4 \cdot 10^{14}\ Гц;$$

3. Разность частот

$$\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2 \cong 5 \cdot 10^{13}\ Гц;$$

---

29. Сколько длин волн монохроматического излучения с частотой $\nu = 4 \cdot 10^{14}$ Гц укладывается на отрезке в 1 м?

Решение

1. Длина волны заданного излучения

$$\lambda = \frac{c}{\nu};$$

2. Количество длин волн на метровом отрезке распространения

$$N = \frac{L}{\lambda} = \frac{L\nu}{c} \cong \frac{1 \cdot 4 \cdot 10^{14}}{3 \cdot 10^8} \cong 1{,}33 \cdot 10^6;$$

---

30. Сколько длин монохроматического света с частотой $\nu = 5 \cdot 10^{14}$ Гц уложится на отрезке L = 1,2 мм: в вакууме, стекле; в воде?

Решение

1. Примем: для вакуума $n_1 = 1$; для воды $n_2 = 1{,}33$; для стекла $n_3 = 1{,}5$ и воспользовавшись уравнением предыдущей задачи, найдём число длин волн в каждом заданном веществе

$$N_1 = \frac{L\nu n_1}{c} \cong \frac{1{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{14} \cdot 1}{3 \cdot 10^8} \cong 2 \cdot 10^3;$$

$$N_2 = \frac{L\nu n_2}{c} \cong \frac{1{,}2\cdot 10^{-3}\cdot 5\cdot 10^{14}\cdot 1{,}33}{3\cdot 10^{8}} \cong 2{,}66\cdot 10^{3};$$

$$N_3 = \frac{L\nu n_1}{c} \cong \frac{1{,}2\cdot 10^{-3}\cdot 5\cdot 10^{14}\cdot 1{,}5}{3\cdot 10^{8}} \cong 3\cdot 10^{3};$$

---

31. Измерительная база в опыте Физо по определению скорости света составляла ℓ = 8,7 км. Зубчатое колесо имело N = 720 прорезей. При какой минимальной частоте вращения зубчатого колеса отражённый свет исчезал?

Решение

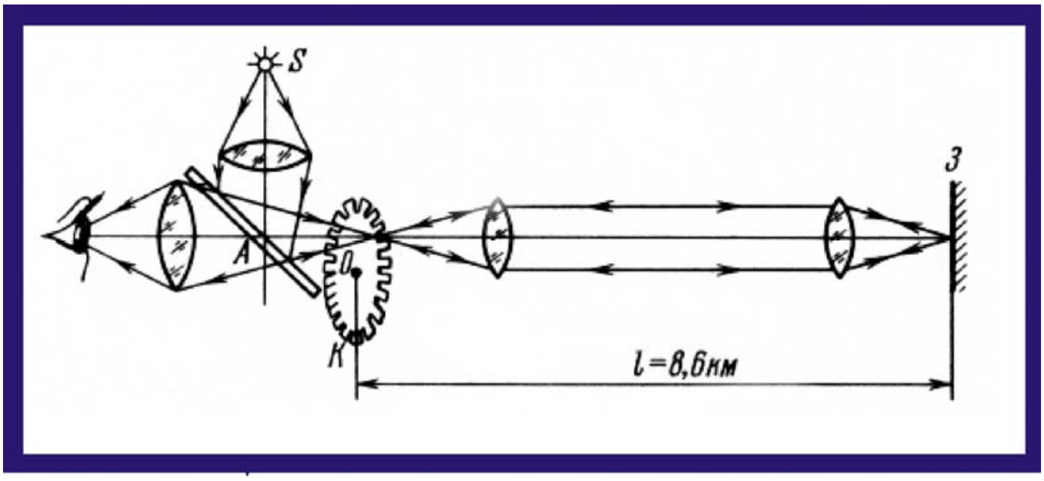


Рис. 31. Схема эксперимента по определению скорости света Физо

1. Время прохождения света от зеркала и обратно:

$$\tau = \frac{2\ell}{c};$$

2. Наблюдатель перестанет видеть отражённый свет в том случае, когда за время путешествия света от зеркала до наблюдателя зубчатое колесо станет так, что луч упрётся в прямоугольный зубец. Минимальный угол поворота колеса, при котором это возможно:

$$\Delta\varphi_{min} = \frac{\pi}{N};$$

3. Полный оборот колесо делает за время:

$$\tau_{\Sigma} = N2\tau;$$

4. Соответствующая частота вращения колеса:

$$\nu = \frac{1}{2N\tau} = \frac{c}{4N\ell} = \frac{3\cdot 10^{8}}{4\cdot 720\cdot 8{,}7\cdot 10^{3}} \approx 11{,}97 c^{-1};$$

---

32. В 1875 г. Французский физик Корню усовершенствовал опыт Физо путём увеличения частоты вращения зубчатого колеса. Измеренная им скорость света оказалась равной c_x. Расстояние от колеса до зеркала ℓ свет проходил за время t_1? , при этом колесо совершало N_1 оборотов. Определить число зубцов ζ измерительного колеса.

Решение

1. Число зубцов колеса можно представить в виде частного от деления периода вращения на время поворота колеса на ширину одного зубца:

$$\zeta = \frac{T}{\tau_0} = \frac{T}{2t}; \quad T = \frac{t_1}{N_1}; \quad t = \frac{2\ell}{c}; \quad \Rightarrow \quad \zeta = \frac{ct_1}{4N_1\ell};$$

---

33. Приведен график зависимости напряжённости электрического поля световой волны от времени в некоторой точке пространства:

$$E(t) = E_m \sin \omega t;$$

Найти частоту световой волны и длину волны.

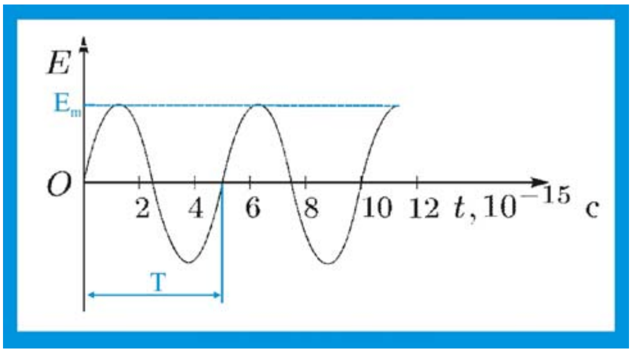


Рис. 33. Зависимость E = f(t)

Решение

1. Период колебаний напряжённости электрического поля:

$$T = 5 \cdot 10^{-15} с;$$

2. Частота колебаний:

$$\nu = \frac{1}{T} = 2 \cdot 10^{14}\,Гц \equiv 200ТГц;$$

3. Длина световой волны:

$$c = \nu\lambda; \quad \lambda = \frac{c}{\nu} \approx \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^{14}} \approx 1{,}5 \cdot 10^{-6}\,м \equiv 1500нм \equiv 1{,}5мкм;$$

---

34. Приведён график зависимости напряжённости электрического поля световой волны от расстояния в заданном направлении распространения волны в некоторый момент времени. Определить частоту колебаний напряжённости электрического поля.

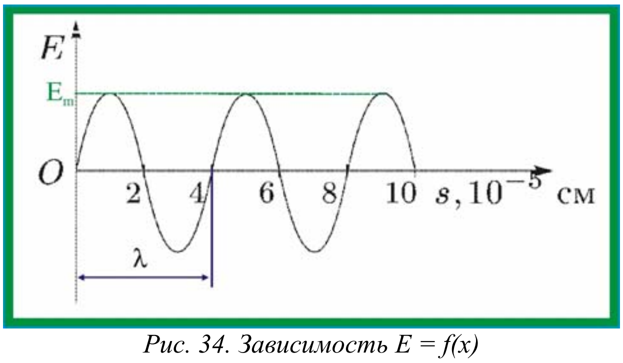


Рис. 34. Зависимость E = f(x)

Решение

1. Длина световой волны:

$$\lambda = 4 \cdot 10^{-7}\,м;$$

2. Частота колебаний световой волны: $c = \nu\lambda$:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \approx \frac{3 \cdot 10^8}{4 \cdot 10^{-7}} \approx 7{,}5 \cdot 10^{14}\,Гц;$$

$$\nu = 7{,}5 \cdot 10^4\,ТГц \equiv 7{,}5 \cdot 10^8\,МГц;$$

---

35. Заданы четыре графических зависимости напряжённости электрического поля световой волны от расстояния, пройденного волнами за один и тот же промежуток времени τ в различных прозрачных средах. Какие из схем соответствуют монохроматическим волнам одинакового цвета. Что можно сказать про оптические плотности веществ, в которых распространяются волны?

Решение

1. Взаимосвязь скорости света и характеристик среды:

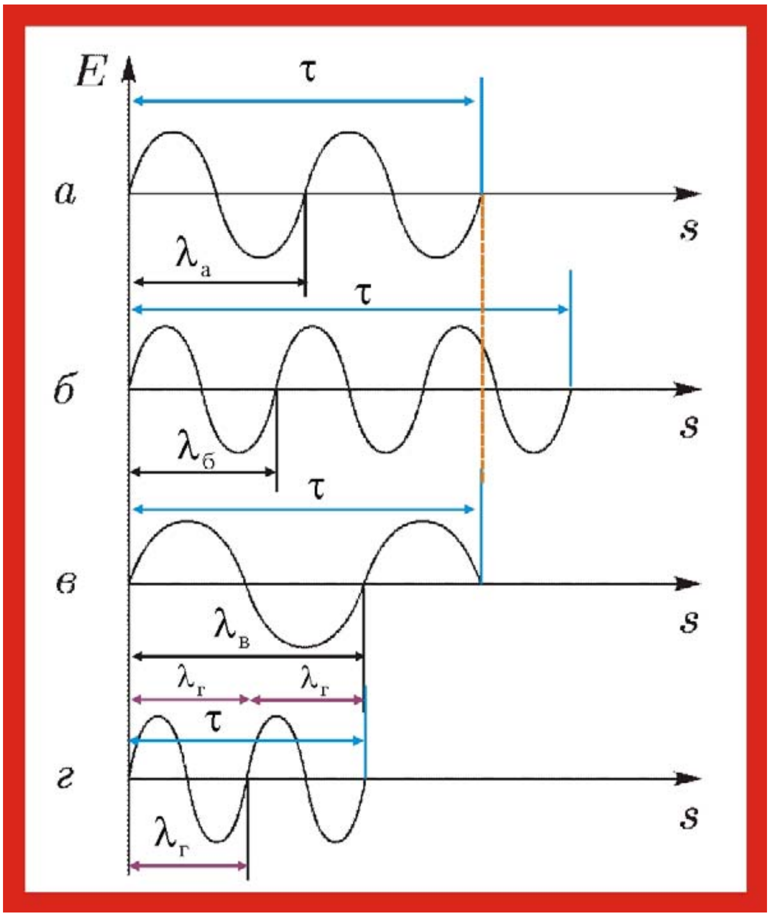


Рис. 35 Зависимости E = f(s) при τ = const для различных сред

$$n=\frac{c}{v};\quad c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}};\quad v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon\mu_0\varepsilon_0}};\quad n=\sqrt{\varepsilon\mu};\quad n=\frac{\nu\lambda_0}{\nu\lambda_i}=\frac{\lambda_0}{\lambda_i};$$

2. Волны *а* и *в* за одно и тоже время распространяются на одно и то же расстояние, у них одинаковая скорость распространения, следовательно, одинаковая длина волны, что указывает на одинаковый цвет света.

3. В случае *г* оптическая плотность среды в 2 раза выше, чем для волн *а* и *б*.

---

36. Даны графики зависимости напряжённости электрического поля световой волны от расстояния, пройденного за один и тот же промежуток времени в одной прозрачной среде. На каких схемах дано изображение монохроматического света, ближайшего к фиолетовой области спектра? К красной области?

Решение

1. Цвет волны в заданной прозрачной среде определяется её длиной

$$\lambda = v/\nu;$$

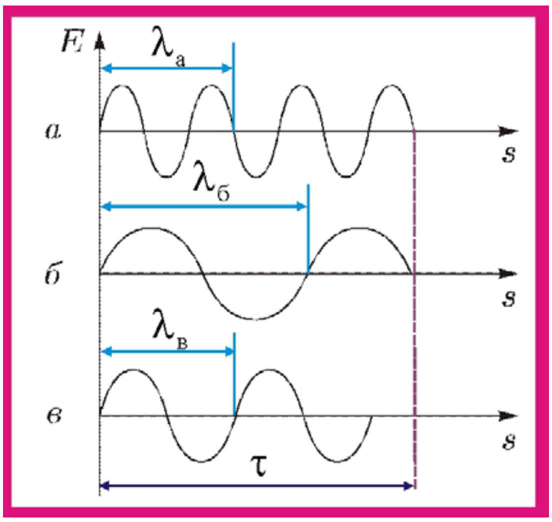


Рис. 36.1. Зависимость E = f(s) для одной среды

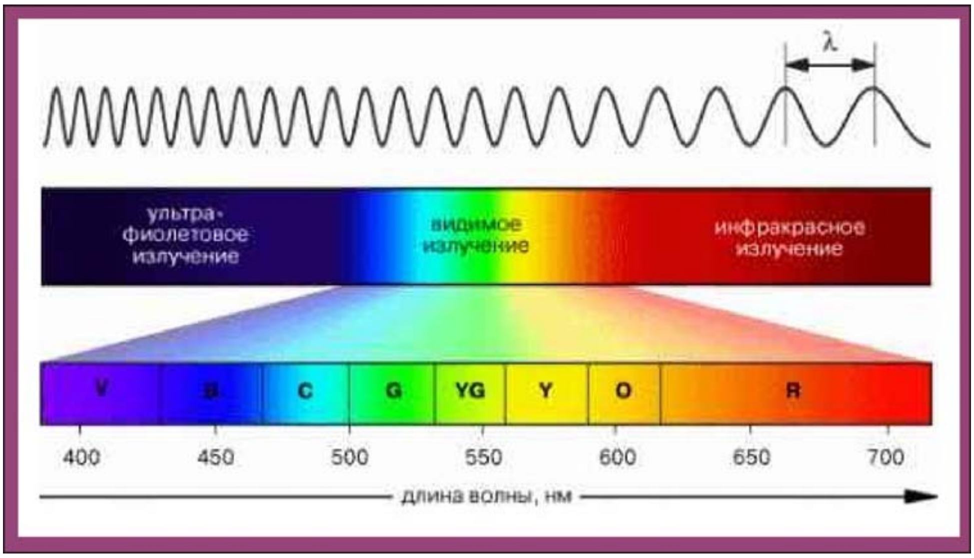


Рис. 36.2. Спектральные характеристики световых волн

2. Заданная волна *а* располагается ближе к ультрафиолетовой области спектра, а волна *б* к красной области спектра.

---

37. Какова длина волны жёлтого света паров натрия λ_{SiO_2} в стекле с показателем преломления n = 1,56? Длина волны в воздухе λ_0 = 589 нм.

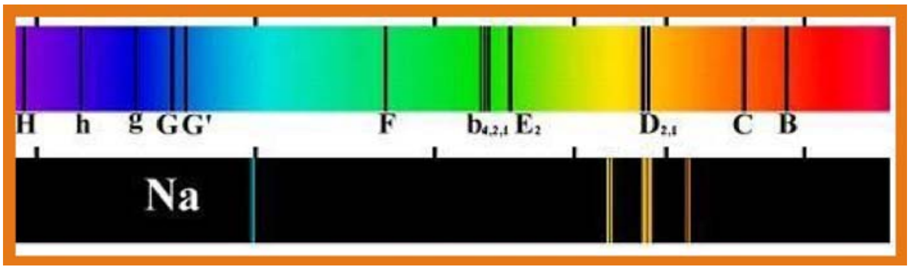


Рис. 37. Спектр излучения Солнца и паров натрия

Решение

1. Скорость распространения световых воле в стекле будет в n раз меньше, чем воздухе, т.е. в n раз меньше будет и длина волны при одной и той же частоте колебаний, которая определяется физическими характеристиками источника световых волн

$$c = \lambda_0 \nu; \quad v_{SiO_2} = \lambda_{SiO_2}\nu; \quad \frac{c}{v_{SiO_2}} = n = \frac{\lambda_0}{\lambda_{SiO_2}}; \quad \Rightarrow \quad \lambda_{SiO_2} = \frac{\lambda_0}{n} = 377{,}56 \text{ нм}.$$

---

38. Длина волны красного света в вакууме λ_0 = 720 нм. Определить длину волны красного света в среде, в которой скорость света $v = 2\cdot10^5$ км/с.

Решение

1. Показатель преломления среды:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{3\cdot10^8}{2\cdot10^8} = 1{,}5;$$

2. Длина волны красного света в заданной прозрачной среде:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{720}{1,5} = 480\text{нм};$$

---

39. Скорость светового луча в некоторой среде равна v = $2,4\cdot 10^5$ км/с, а длина волны λ = 8 мкм. Определить величину показателя преломления и частоту колебаний.

Решение

1. Показатель преломления среды:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{3\cdot 10^8}{2,4\cdot 10^8} = 1,25;$$

2. Частота колебаний:

$$v = \lambda\nu; \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{2,4\cdot 10^8}{8\cdot 10^{-6}} = 3\cdot 10^{13}\,\text{Гц} \equiv 30\text{ТГц};$$

---

40. Определить длину световой волны, частота колебаний которой в вакууме составляет $\nu = 5\cdot 10^{14}$ с$^{-1}$.

Решение

$$c = \lambda\nu; \quad \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3\cdot 10^8}{4\cdot 10^{14}} = 7,5\cdot 10^{-7}\,\text{м} \equiv 0,75\text{мкм} \equiv 750\text{нм};$$

---

41. Как изменится длина волны при нормальном падении света на границу раздела воздух – стекло? Показатель преломления стекла n, длина световой волны в воздухе λ_0.

Решение

1. При проникновении световой волны из воздуха в стекло изменяется скорость её распространения и длина, в зависимости от величины показателя преломления

$$c = \lambda_0\nu; \quad v_{SiO_2} = \lambda_{SiO_2}\nu; \quad \frac{c}{v_{SiO_2}} = n = \frac{\lambda_0}{\lambda_{SiO_2}}; \quad \Rightarrow \quad \lambda_{SiO_2} = \frac{\lambda_0}{n};$$

---

42. Световые волны в некоторой жидкости имеют длину волны λ = 500 нм и частоту $\nu = 4,5\cdot 10^{14}$ Гц. определить абсолютный показатель преломления этой жидкости.

Решение

1. Скорость распространения световой волны в жидкости:

$$v = \lambda\nu = 4,5\cdot 10^{14}\cdot 5\cdot 10^{-7} = 2,25\cdot 10^8\,\frac{\text{м}}{\text{с}};$$

2. Абсолютный показатель преломления жидкости:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{3\cdot 10^8}{2,25\cdot 10^8} \approx 1,33;$$

---

43. Длина волны жёлтого света в воздухе равна λ_0 = 580 нм, а в жидкости λ = 400 нм. Определить оптическую плотность жидкости.

Решение

1. Оптическая плотность характеризует меру ослабления света прозрачными телами или отражение света непрозрачными телами. Для прозрачных тел (стёкла, жидкости, кристаллы и т.д.):

$$D = \lg\frac{\Phi_{in}}{\Phi_{out}},$$

т.е. оптическая плотность представляет собой десятичный логарифм отношения падающего светового потока к прошедшему сквозь тело потоку. Величина D, таким образом, является десятичным логарифмом величины, обратной коэффициенту пропускания.

2. В рассматриваемом случае, длина волны света при попадании из воздуха в жидкость уменьшает свою длину волны м скорость распространения, мерой такого уменьшения служит показатель преломления, который в первом приближении пропорционален оптической плотности среды:

$$D \approx n = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{580}{400} \approx 1{,}45;$$

---

44. При переходе лучей из воды (n = 1,33) в вакуум их длина волны увеличилась $\Delta\lambda$ = 0,12 мкм. Определить длину волны этих лучей в вакууме и в воде.

Решение

$$\left.\begin{aligned} c &= \lambda_0\nu; \\ v &= (\lambda_0 - \Delta\lambda)\nu; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{c}{v} = n = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \Delta\lambda}; \quad n\lambda_0 - n\Delta\lambda = \lambda_0;$$

$$n\lambda_0 - \lambda_0 = n\Delta\lambda; \quad \lambda_0(n-1) = n\Delta\lambda; \quad \lambda_0 = \frac{n}{n-1}\Delta\lambda \approx 4{,}727\cdot 10^{-7}\,\text{м};$$

$$\lambda = \lambda_0 - \Delta\lambda \approx 352\text{нм};$$

---

45. При переходе световых волн из вакуума в некоторую среду длина волны уменьшилась в ζ = 1,31 раз. Какая это среда?

Решение

1. Уменьшение длины волны при переходе света из вакуума в среду сопровождается уменьшением скорости её распространения, степень такого уменьшения определяется показателем преломления среды:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{c}{v} = n = 1{,}31;$$

2. Показатель преломления $n \approx 1{,}31$ имеет лёд.

---

46. Под водой посылается сигнал на расстояние S = 20 м с помощью белого света. На какое время на этом участке распространения красные лучи опередят фиолетовые? Показатель преломления для красных лучей $n_{Кр}$ = 1,329, для фиолетовых лучей $n_{Ф}$ = 1,334.

Решение

1. Скорости распространения красных и фиолетовых лучей:

$$v_{Кр} = \frac{c}{n_{Кр}} = \frac{3\cdot 10^8}{1{,}329} \approx 2{,}257\cdot 10^8\,\frac{м}{с};\quad v_{Ф} = \frac{c}{n_{Ф}} = \frac{3\cdot 10^8}{1{,}334} \approx 2{,}549\cdot 10^8\,\frac{м}{с};$$

2. Время распространения волн:

$$\tau_{Кр} = \frac{S}{v_{Кр}} = \frac{20}{2{,}257\cdot 10^8} \approx 8{,}861\cdot 10^{-8}с;\quad \tau_{Ф} = \frac{S}{v_{Ф}} = \frac{20}{2{,}549\cdot 10^8} \approx 7{,}846\cdot 10^{-8}с;$$

3. Разность времени распространения волн:

$$\Delta\tau = \tau_{Кр} - \tau_{Ф} \approx 1\cdot 10^{-8}с \equiv 10нс;$$

---

47. Тонкий луч белого света падает на поверхность воды под углом α = 60^0. Чему равен угол между направлениями крайних красных и фиолетовых лучей в воде, если показатели преломления их равны соответственно n_1 = 1,329 и n_2 = 1,334?

Решение

1. Углы преломления красных и фиолетовых лучей:

$$\frac{1}{n_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma_1};\quad \gamma_1 = \arcsin\left(n_1 \sin 30^0\right) = \arcsin(0{,}6645) \approx 41{,}64^0\,;$$

$$\frac{1}{n_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma_1};\quad \gamma_2 = \arcsin\left(n_2 \sin 30^0\right) = \arcsin(0{,}667) \approx 41{,}84^0$$

2. Разность углов преломления лучей:

$$\Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2 \approx 0{,}2^0;$$

---

48. Определить скорость света в воде, если при частоте ν = $4{,}4\cdot 10^{14}$ Гц длина световой волны λ = 0,5 мкм.

Решение

$$v = \lambda\nu = 4{,}4\cdot 10^{14}\cdot 5\cdot 10^{-7} = 2{,}2\cdot 10^8\,м/с;$$

---

49. Световая волна с λ_1 = 700 нм распространяется в воздухе. Какова её длина λ_2 в воде?

Решение

1. Длина волны прямо пропорциональна скорости её распространения в данной среде:

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{v_1}{\nu};\\ \lambda_2 &= \frac{v_2}{\nu};\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2};\quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1};\quad \lambda_2 = \frac{\lambda_1 n_1}{n_2} = \frac{7\cdot 10^{-7}\cdot 1}{1{,}33} \approx 526нм;$$

---

12. Эффект Доплера

50. При фотографировании спектра Солнца было установлено, что жёлтая спектральная линия (λ = 589 нм) в спектрах, полученных от левого и правого краёв светила, была смещена на $\Delta\lambda$ = 0,008 нм. Найти линейную скорость вращения солнечного диска.

Решение

1. Смещение длин волн при движении их источника описывается Эффектом Доплера.

2. На практике можно наблюдать изменение частоты звука (длин волн), издаваемого гудком железнодорожного локомотива при его прохождении мимо слушателя. При приближении источника частота кажется более высокой, а при удалении частота понижается.

3. Зависимость частоты движущегося источника акустических волн от взаимной скорости перемещения источника и приёмника волн была впервые установлена австрийским физиком Иоганном Доплером (1803 – 1853). Вначале эффект был описан применительно к волнам акустического диапазона, а позже было установлено, что он наблюдается для всех типов волн, включая электромагнитные волны (волны видимого светового диапазона, о которых сказано в задаче).

4. Пусть источник сферических волн S постоянных по частоте и амплитуде движется с постоянной скоростью v_s в направлении к внимательному слушателю (рис. 50.1).

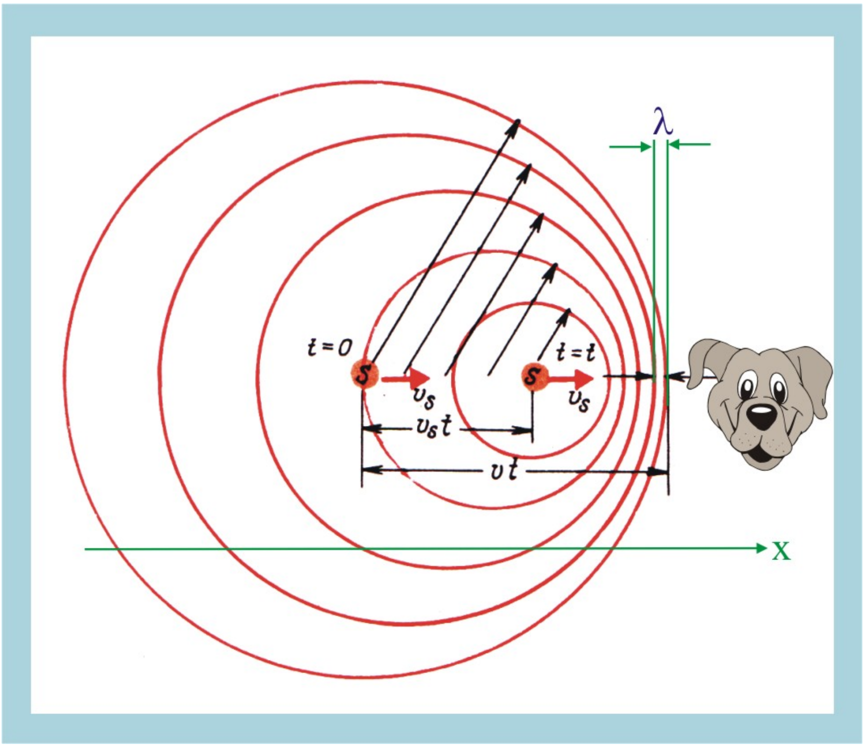


Рис. 50.1. Движущийся источник волн

4. Рассмотрим проекцию волновой картины на плоскость, в которой располагается наблюдатель и вектор скорости источника. Если подвижную систему отсчёта (ПСК) связать с движущимся источником, то измерения зафиксируют частоту его колебаний ν_s. За некоторый промежуток времени τ источник испустит количество длин волн, равное

$$N_\lambda = \nu_s \tau .$$

5. В промежутке времени от t = 0 до t = τ будет наблюдаться следующая волновая картина. Волна, испущенная при t = 0, пройдёт расстояние

$$x_1 = v\tau ,$$

где v – скорость волн в данной среде, которая считается независимой от взаимного перемещения источника и приёмника. К моменту окончания промежутка времени τ, т.е. при испускании последней из N_λ волн источник проделает расстояние

$$x_2 = v_s \tau .$$

6. Таким образом, N_λ волн занимают на оси *x* расстояние

$$\Delta x = v\tau - v_s \tau .$$

7. точки зрения наблюдателя их длина определится как

$$\lambda_H = \frac{\Delta x}{N_\lambda} = \frac{v\tau - v_s\tau}{v_s\tau} = \frac{v - v_s}{v_s} .$$

8. Уравнение можно переписать следующим образом

$$\nu_H = \frac{v}{\lambda_H} = v\frac{\nu_s}{v - v_s} = \nu_s \frac{v}{v - v_s} ,$$

или в окончательном виде

$$\nu_H = \frac{\nu_s}{1 - \dfrac{v_s}{v}} .$$

9. В акустике принято эффект Доплера записывать в виде следующего уравнения

$$\nu_{Пр} = \frac{\nu_{Ис}}{1 - \dfrac{v_{Ис}}{c}} ,$$

где $\nu_{Пр}$ – частота колебаний, воспринимаемая приёмником, $\nu_{Ис}$ – частота колебаний, испускаемая источником волн, c – скорость звука. Уравнение эффекта Доплера показывает, что частота звука увеличивается при движении источника в сторону наблюдателя. Если источник станет удаляться, то уравнение необходимо переписать следующим образом

$$\nu_{Пр} = \frac{\nu_{Ис}}{1 + \dfrac{v_{Ис}}{c}} ,$$

что показывает уменьшение частоты принимаемых колебаний по сравнению с частотой источника.

10. Достаточно просто качественную картину эффекта Доплера можно наблюдать при возбуждении гравитационно-капиллярных волн на поверхности жидкости, заставив источник колебаний перемещаться относительно поверхности жидкости, с которой связана система отсчёта наблюдателя (рис. 50.2.).

Отчётливо видно, что имеет место изменение длины волны, в соответствии с полученными уравнениями.

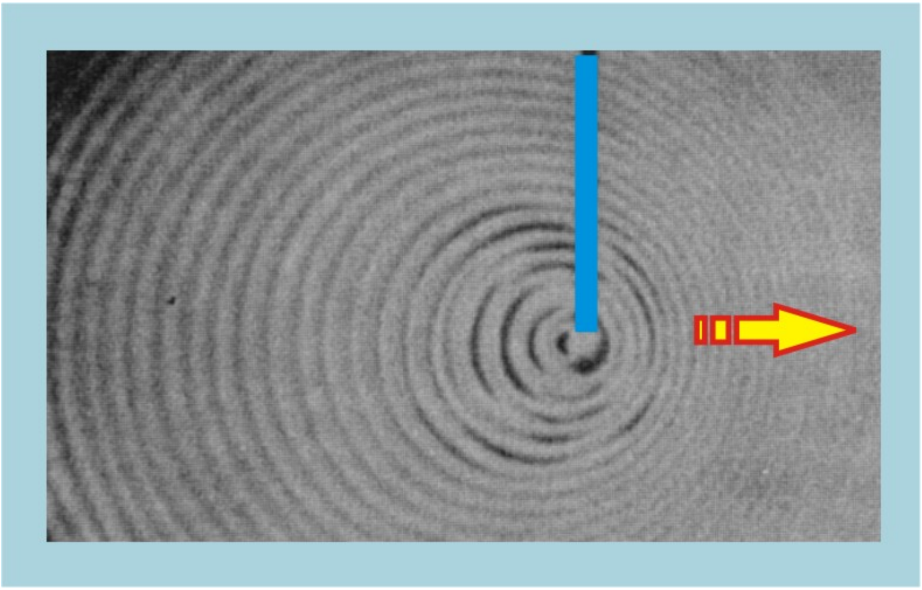


Рис. 50.2. Движущийся источник поверхностных волн

11. Эффект Доплера весьма успешно до недавнего времени использовался до появления лазерных приборов работниками ГИБДД в «любимых» автолюбителями приборах, именуемых в простонародии «фарами» (рис. 50.3).

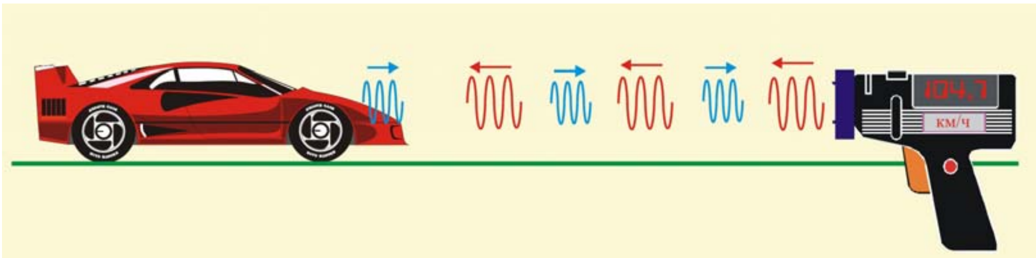


Рис. 50ю3.3. Доплеровский измеритель скорости

12. Волновой импульс фиксированной частоты излучался в направлении движущегося транспортного средства, отражался от него и снова попадал на приёмник, совмещённый с излучателем. Автомобиль в данном случае является вторичным движущимся источником. В зависимости от скорости движения автомобиля меняется частота принимаемого сигнала, далее изменение частоты посредствам электроники поступает на измеритель скорости

$$v_{Авт} = \frac{c(\nu_{Отр} - \nu_{Ист})}{\nu_{Отр}},$$

где $v_{Авт}$ – скорость автомобиля, $\nu_{Ист}$ – частота источника волнового импульса, $\nu_{Отр}$ – частота отражённого от автомобиля сигнала. Подобные системы, доплеровские лаги использовались до появления спутниковых навигационных систем для определения скорости судов относительно воды.

13. Запишем дважды уравнения эффекта Доплера для солнечного диска с учётом того, что одна сторона диска движется в направлении к наблюдателю, а диаметрально противоположная, наоборот, – от наблюдателя

$$\nu_1 = \frac{\nu c}{c - v_x}; \quad \nu_2 = \frac{\nu c}{c + v_x};$$

14. Введём в уравнения вместо частоты длину волны ($\nu = c/\lambda$)

$$\frac{c}{\lambda_1} = \frac{c^2}{\lambda(c - v_x)}; \quad \frac{c}{\lambda_2} = \frac{c^2}{\lambda(c + v_x)};$$

$$\lambda_1 c^2 = c\lambda(c - v_x); \quad \lambda_2 c^2 = c\lambda(c + v_x);$$

$$\lambda_1 = \frac{\lambda(c - v_x)}{c}; \quad \lambda_2 = \frac{\lambda(c + v_x)}{c};$$

15. Определим разность длин волн

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{2v_x\lambda}{c}; \quad \Rightarrow \quad v_x = \frac{c\Delta\lambda}{2\lambda} \cong 2\cdot 10^3 \frac{м}{с};$$

---

51. Какая разность потенциалов U была приложена к электродам гелиевой разрядной трубки, если при наблюдении вдоль пучка α – частиц максимальное доплеровское смещение спектральной линии гелия (λ = 492,2 нм) было равным $\Delta\lambda$ = 0,8 нм?

Решение

Рис. 51. Разрядная трубка

1. Электрическое поле сообщает α – частицам кинетическую энергию

$$q_\alpha U = \frac{mv^2}{2},$$

где v – скорость частиц, определяемая из уравнения эффекта Доплера (см. предыдущую задачу)

$$v = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda};$$

2. Перепишем уравнение энергии частиц

$$q_\alpha U = \frac{mc^2(\Delta\lambda)^2}{2\lambda^2};$$

$$U = \frac{mc^2(\Delta\lambda)^2}{2\lambda^2 q_\alpha} \cong \frac{6{,}5\cdot 10^{-27}\cdot 9\cdot 10^{16}\cdot 64\cdot 10^{-20}}{2\cdot 25^{-14}\cdot 3{,}2\cdot 10^{-16}} \approx 2500\ В;$$

---

52. При фотографировании спектра звезды Андромеды было определено, что линия титана (λ = 495,4 нм) смещена к фиолетовому концу спектра на $\Delta\lambda$ = 0,17 нм. Как движется звезда относительно Земли?

Решение

1. В данном случае указано смещение излучения в сторону коротких волн, что в соответствие с уравнением эффекта Доплера соответствует случаю приближения Андромеды у Земле.

2. Скорость радиального сближения (по линии, соединяющей объекты) определяется соотношением

$$v = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda} \cong 1\cdot 105\frac{м}{с}.$$

---

13. Интерференция света

53. В чём заключается принцип Гюйгенса?

Решение

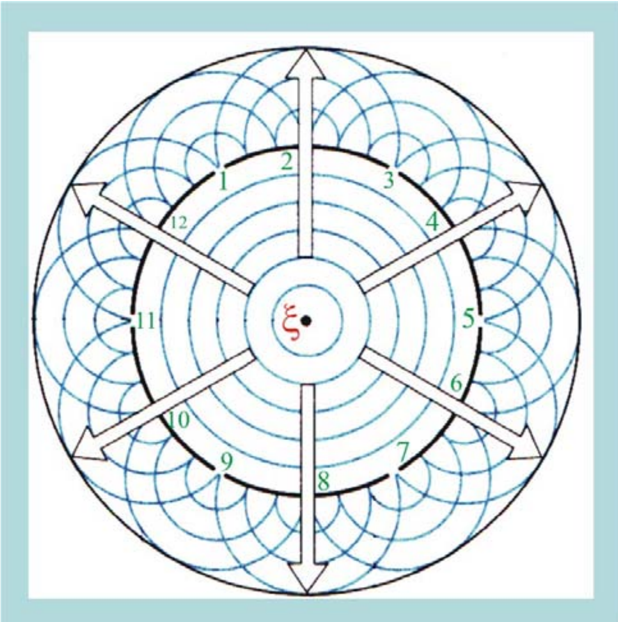


Рис. 53.1. Трансформация круговых волн

1. Если на пути круговой волны, возбуждаемой в кювете на поверхности жидкости путём периодического погружения в неё на незначительную глубину шарика на штоке, поставить цилиндрический экран с 12 вертикальными щелями, ширина которых меньше длины возбуждаемой поверхностной волны (рис. 53.1), то щели будут источниками вторичных круговых волн, что демонстрирует отличие волнового движения от других видов механического движения. По сути, щели в данном случае является генератором новых волновых поверхностей.

2. Нидерландский физик Христиан Гюйгенс (1629 – 1695), тот самый, который запатентовал маятниковые часы, изобретенные Галилео Галилеем, предложил простой способ определения волновой поверхности, например $\xi(t+\Delta t)$ в момент времени $(t+\Delta t)$ по известному положению исходной волновой поверхности $\xi(t)$.

3. Этот способ получил название принципа Гюйгенса. Суть принципа заключается в том, что в интервале времени $(t+\Delta t)$ каждую точку фронта $\xi(t)$ необходимо рассматривать как источник вторичных сферических волн радиуса $v\Delta t$, с центрами, располагающимися на волновой поверхности.

4. В соответствии с принципом, огибающая совокупности вторичных волн показывает положение фронта $\xi(t+\Delta t)$ распространяющейся волны. Принцип Гюйгенса применим для любого типа волн, потому как представляется чисто геометрическими изысками, безотносительно физической природе и свойствам волн. Применение принципа оказалось весьма продуктивным при исследовании особенностей отражения и преломления волн при их переходе из одной среды в другую.

5. На плоскую границу двух сред падает плоская волна, распространяющаяся в направлении КА (рис. 53.2). Точка А, в соответствии с принципом Гюйгенса, начинает испускать вторичную сферическую волну. За промежуток времени $\Delta t = BC/v$ в течение которого волна проходит расстояние ВС и достигает поверхности полусферы с радиусом AD, который равен $BC = AD = v\Delta t$. Положение фронта отражённой волны, в соответствии с рассматриваемым принци-

пом, изобразится плоскостью CD. Из геометрических соображений, ($\Delta ABC = \Delta ADC$) следует, что угол падения равен углу отражения, т.е. $i = i^*$. По аналогичной методике можно показать, что при преломлении волн справедливо утверждение

$$n_{2,1} = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2},$$

где $n_{2,1}$ – относительный показатель преломления, r – угол преломления.

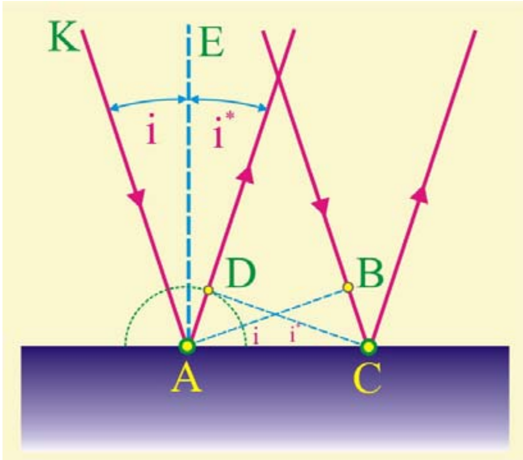


Рис. 53.2. Отражение волн

54. Что такое интерференция волн, каков механизм этого явления?

Решение

1. Рассмотрим две одинаково направленные волны, возбуждаемые источниками ξ_1 и ξ_2 с циклическими частотами ω_1, ω_2, начальными фазами α_1, α_2. В произвольной точке пространства M, расположенной на расстояниях r_1 и r_2 от источников будут возбуждаться колебания (рис. 54.1), удовлетворяющие уравнениям

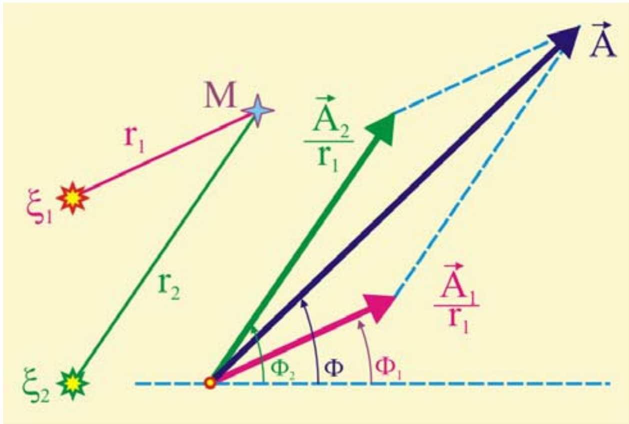


Рис. 54.1. Интерференция двух волн

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{A_1}{r_1}\sin(\omega_1 t - k_1 r_1 + \alpha_1); \\ \xi_2 &= \frac{A_2}{r_2}\sin(\omega_2 t - k_2 r_2 + \alpha_2), \end{aligned}\right\}$$

или с учётом обозначения фаз

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{A_1}{r_1}\sin\Phi_1; \\ \xi_2 &= \frac{A_2}{r_2}\sin\Phi_2. \end{aligned}\right\}$$

2. В соответствии с принципом суперпозиции суммарная волна в точке M определится как

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A\sin\Phi.$$

3. Величины A и Ф возможно определить методом векторных диаграмм, путём построения параллелограмма на векторах A_1 и A_2

$$A^2 = \left(\frac{A_1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{A_2}{r_2}\right)^2 + 2\frac{A_1}{r_1}\frac{A_2}{r_2}\cos(\Phi_2 - \Phi_1),$$

$$\Phi = \operatorname{arctg}\frac{\dfrac{A_1}{r_1}\sin\Phi_1 + \dfrac{A_2}{r_2}\sin\Phi_2}{\dfrac{A_1}{r_1}\cos\Phi_1 + \dfrac{A_2}{r_2}\cos\Phi_2}.$$

4. Как видно из уравнений возможны при суммировании два принципиально разных случая. Если разность фаз источников волн $(\Phi_2 - \Phi_1) \neq f(t)$ в точке М не изменяется во времени, то такие источники называются когерентными. В противном случае, при изменении разности фаз во времени $(\Phi_2 - \Phi_1) = f(t)$, источники считаются некогерентными.

5. Запишем уравнение разности фаз исходных волн, через скорости их распространения. Поскольку $k = \omega/v$, то

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= \omega_1 t - \omega_1\frac{r_1}{v_1} + \alpha_1; \\ \Phi_2 &= \omega_2 t - \omega_2\frac{r_2}{v_2} + \alpha_2. \end{aligned}\right\}$$

$$\Phi_2 - \Phi_1 = (\omega_2 - \omega_1)t - \left(\omega_2\frac{r_2}{v_2} - \omega_1\frac{r_1}{v_1}\right) + (\alpha_2 - \alpha_1).$$

6. Поскольку второй и третий члены правой части последнего уравнения не зависят от времени ни при каких обстоятельствах, то условие когерентности источников определяются первым членом. Очевидно, что если $\omega_1 = \omega_2$, то $\Phi_2 - \Phi_1 = 0$, т.е. источники когерентны. Таким образом, две волны когерентны, если их частоты одинаковы и некогерентные, если частоты разные. Из уравнения, кроме того, следует, что в точке М суммарная амплитуда некогерентных волн будет изменяться во времени в пределах

$$\left.\begin{aligned} A_{max} &= \left|\frac{A_1}{r_1} + \frac{A_2}{r_2};\right| \\ A_{min} &= \left|\frac{A_1}{r_1} - \frac{A_2}{r_2}\right|, \end{aligned}\right\}$$

причём циклическая частота изменения суммарной амплитуды будет происходить с частотой изменения результирующей фазы $(\Phi_2 - \Phi_1)$, другими словами, с циклической частотой, равной $|\omega_2 - \omega_1|$.

7. Определим среднее значение квадрата результирующей амплитуды за время её изменения τ

$$< A^2 >= \frac{1}{\tau}\int_0^\tau A^2 dt = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \left[\left(\frac{A_1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{A_2}{r_2}\right)^2 + 2A_1A_2\cos(\Phi_2 - \Phi_1)\right]dt,$$

$$< A^2 >= \left(\frac{A_1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{A_2}{r_2}\right)^2 + \frac{1}{\tau}\frac{2A_1A_2}{r_1r_2}\int_0^\tau \cos(\Phi_2 - \Phi_1)dt.$$

8. Разность фаз за время одного периода τ меняется на 2π, поэтому

$$\int_0^\tau \cos(\Phi_2 - \Phi_1)dt = 0,$$

из чего следует, что

$$< A^2 >= \left(\frac{A_1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{A_2}{r_2}\right)^2.$$

9. Полученное уравнение утверждает, что энергия результирующих колебаний в каждой точке пространства равна сумме энергий всех некогерентных источников.

10. Если источники когерентны, т.е. $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, то для изотропной среды $v_1 = v_2 = v$. В этом случае для разности фаз можно переписать уравнение следующим образом

$$\Phi_2 - \Phi_1 = -\frac{\omega}{v}(r_2 - r_1) + (\alpha_2 - \alpha_1) = -k(r_2 - r_1) + (\alpha_2 - \alpha_1).$$

11. Квадрат результирующей амплитуды примет вид

$$A^2 = \left(\frac{A_1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{A_2}{r_2}\right)^2 + \frac{2A_1A_2}{r_1r_2}\cos[k(r_2 - r_1) - (\alpha_2 - \alpha_1)].$$

12. При рассмотрении уравнения следует иметь в виду, что $\alpha_2 - \alpha_1 = \text{const}$ и $k = \text{const}$, что означает независимость результирующей амплитуды от времени. Амплитуда А будет максимальна во всех точках, где аргумент косинуса равен π. Максимальное значение амплитуды

$$A_{max} = \frac{A_1}{r_1} + \frac{A_2}{r_2},$$

будет иметь место, таким образом, при условии

$$k(r_2 - r_1) + \alpha_1 - \alpha_2 = 2\pi m \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

13. Уравнение можно преобразовать, заменив волновое число его значением $k = 2\pi/\lambda$

$$r_2 - r_1 = m\lambda + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\pi}\lambda.$$

14. При $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$

$$r_1 - r_2 = m\lambda.$$

15. Минимальное значение амплитуды

$$A_{min} = \left|\frac{A_1}{r_1} - \frac{A_2}{r_2}\right|,$$

будет иметь место в точках пространства, где выполняется условие

$$k(r_2 - r_1) + \alpha_1 - \alpha_2 = (2m - 1)\pi,$$

или

$$r_2 - r_1 = (2m - 1)\frac{\lambda}{2} + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\pi}\lambda.$$

16. Если $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$, то

$$r_2 - r_1 = (2m - 1)\frac{\lambda}{2}.$$

17. Величина $r_2 - r_1$ называется геометрической разностью хода волн от источников ξ_1 и ξ_2 до рассматриваемой точки пространства.

18. В пространстве, окружающем источники когерентных волн будет наблюдаться взаимное усиление и ослабление колебаний в зависимости от соотношения фаз. Это явление называется интерференцией волн. В результате интерференции может происходить взаимное усиление и ослабление когерентных волн. На рис.54.2 показан схематически случай усиления и ослабления двух когерентных вол, правая часть схемы соответствует полному взаимному гашению волн.

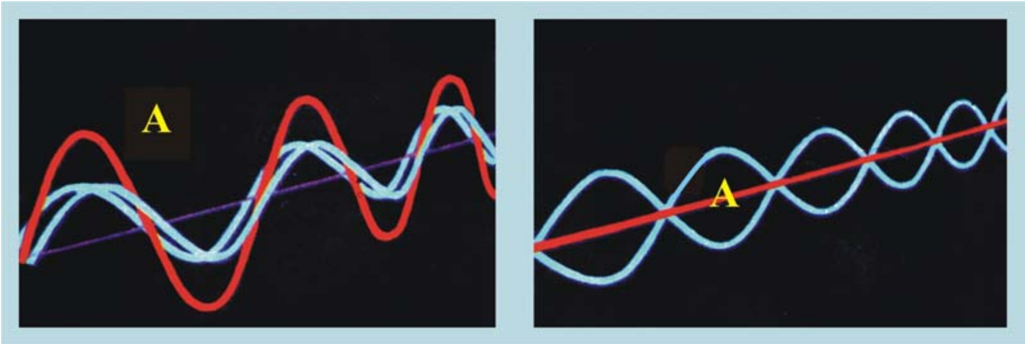


Рис. 54.2. Взаимное усиление и ослабление двух волн

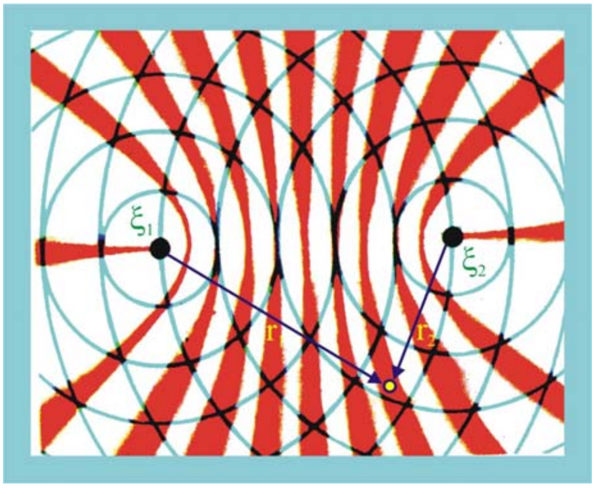


Рис. 54.3. Интерференция волн

19. В пространстве интерферирующие волны образуют картину распределения максимумов и минимумов амплитуды результирующих колебаний или суммарной энергии волн. На рис. 54.3 приведена схема интерференции двух круговых волн на поверхности жидкости от когерентных источников ξ_1 и ξ_2. Как видно, максимумы энергетического проявления волн имеют определённую геометрически правильную структуру. Максимальным значениям амплитуд (энергий) соответствуют красные гиперболические области.

Явление интерференции наблюдается не только для упругих волн, оно было обнаружено и исследовано применительно к электромагнитным, акустическим, гравитационным типам волн.

---

55. Каким образом в результате интерференции образуются стоячие волны?

Решение

1. Особым случаем интерференции являются стоячие волны, образующиеся вследствие взаимодействия двух бегущих синусоидальных волн, обладающих одинаковыми амплитудами, частотами и распространяющихся в противоположных направлениях.

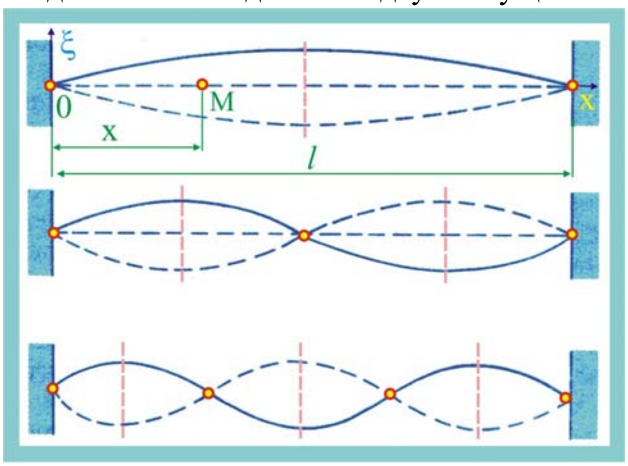


Рис. 55. Стоячие волны на струне

2. Простейшие одномерные стоячие волны можно наблюдать на струне, натянутой между двумя опорами (рис. 55). В данном случае интерферируют две волны, прямая и отражённая. Получим уравнение одномерной стоячей волны, т.е. установим зависи-

мость смещения точек струны ξ от времени t. Прямую волну струны зададим стандартным уравнением

$$\xi_1 = A\sin(\omega t - kx).$$

3. В отражённой волне смещение ξ_2 в точке M будет отставать по фазе на величину

$$\Delta\Phi = 2k(\ell - x) + \varphi,$$

где φ дополнительное отставание по фазе, вызванное потерями в местах закрепления концов струны.

$$\xi_2 = A\sin[\omega t + k(x - 2\ell) - \varphi].$$

4. Стоячая волна, как результат суперпозиции представится следующим образом

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A\sin(\omega t - kx) + A\sin[\omega t + k(x - 2\ell) - \varphi].$$

5. Преобразуем сумму синусов в последнем уравнении следующим образом:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\xi = 2A\cos\left[k(\ell - x) + \frac{\varphi}{2}\right]\cdot\sin\left(\omega t - k\ell - \frac{\varphi}{2}\right).$$

6. Полученное уравнение стоячей волны справедливо как для поперечных так и для продольных волн. Первый сомножитель этого уравнения определяет поведение амплитуды стоячей волны, которая, кстати, не зависит от времени, но зависит от x

$$A_{st} = 2A\left|\cos\left[k(\ell - x) + \frac{\varphi}{2}\right]\right|.$$

7. Очевидно, что максимум амплитуды 2A будет наблюдаться тогда, когда косинус равен единице

$$k(\ell - x) + \frac{\varphi}{2} = 2m\frac{\pi}{2} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

8. Точки, соответствующие максимуму амплитуды, называются пучностями стоячей волны (на рис. 17.35 пучности отмечены вертикальными прерывистыми линиями).

9. Некоторые точки струны не будут смещаться, эти точки называются узлами стоячей волны, их координаты удовлетворяют уравнению

$$k(\ell - x) + \frac{\varphi}{2} = (2m+1)\frac{\pi}{2} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

---

56. Разность хода двух интерферирующих волн в вакууме равна: а) 0,4 λ; б) 1,2 λ. Определить соответствующие разности фаз.

Решение

1. Разность фаз $\Delta\varphi = 2\pi$ рад соответствует длине волны λ:

$$\text{а)}\ \left.\begin{array}{l}\lambda \Leftrightarrow 2\pi;\\ 0{,}4\lambda \Leftrightarrow \Delta\varphi_а;\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \Delta\varphi_а = \frac{2\pi\cdot 0{,}4\lambda}{\lambda} = 0{,}8\ \pi рад \equiv 144^0;$$

$$\text{б)}\ \left.\begin{array}{l}\lambda \Leftrightarrow 2\pi;\\ 1{,}2\lambda \Leftrightarrow \Delta\varphi_б;\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \Delta\varphi_б = \frac{2\pi\cdot 1{,}2\lambda}{\lambda} = 2{,}4\pi\ рад \equiv 432^0;$$

---

57. Разность фаз двух интерферирующих волн равны: а) 0,25π; б) 2,5π. Скольким длинам волн будут соответствовать разности хода этих волн?

Решение

1. Разность фаз $\Delta\varphi = 2\pi$ рад соответствует длине волны λ:

$$\text{а)}\quad \left.\begin{aligned}\lambda &\Leftrightarrow 2\pi;\\ \zeta_а &\Leftrightarrow 0{,}25\pi;\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \zeta_а = \frac{0{,}25\pi\lambda}{2\pi} = 0{,}125\lambda;$$

$$\text{б)}\quad \left.\begin{aligned}\lambda &\Leftrightarrow 2\pi;\\ \zeta_б &\Leftrightarrow 2{,}5\pi;\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \zeta_б = \frac{2{,}5\pi\lambda}{2\pi} = 1{,}25\lambda;$$

---

57. Разности хода двух интерферирующих волн в вакууме равны:

а) 0; б) 0,2 λ; в) 0,5 λ; г) λ; д) 1,2 λ.

Чему равны соответствующие разности фаз?

Решение

1. Разность фаз $\Delta\varphi = 2\pi$ рад соответствует длине волны λ:

$$\text{а)}\quad \left.\begin{aligned}\lambda &\Leftrightarrow 2\pi;\\ 0 &\Leftrightarrow \Delta\varphi_а;\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \Delta\varphi_а = \frac{2\pi\cdot 0}{\lambda} = 0 \text{ рад} \equiv 0^0;$$

$$\text{б)}\quad \left.\begin{aligned}\lambda &\Leftrightarrow 2\pi;\\ 0{,}2\lambda &\Leftrightarrow \Delta\varphi_б;\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \Delta\varphi_б = \frac{2\pi\cdot 2{,}2\lambda}{\lambda} = 0{,}4\pi \text{ рад} \equiv 72^0;$$

$$\text{в)}\quad \left.\begin{aligned}\lambda &\Leftrightarrow 2\pi;\\ 0{,}5\lambda &\Leftrightarrow \Delta\varphi_в;\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \Delta\varphi_в = \frac{2\pi\cdot 0{,}5\lambda}{\lambda} = \pi \text{ рад} \equiv 180^0;$$

$$\text{г)}\quad \left.\begin{aligned}\lambda &\Leftrightarrow 2\pi;\\ \lambda &\Leftrightarrow \Delta\varphi_г;\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \Delta\varphi_г = \frac{2\pi\cdot \lambda}{\lambda} = 2\pi \text{ рад} \equiv 360^0;$$

$$\text{д)}\quad \left.\begin{aligned}\lambda &\Leftrightarrow 2\pi;\\ 1{,}2\lambda &\Leftrightarrow \Delta\varphi_д;\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \Delta\varphi_д = \frac{2\pi\cdot 1{,}2\lambda}{\lambda} = 2{,}4\pi \text{ рад} \equiv 432^0;$$

---

58. Разности фаз двух интерферирующих волн равны:

а) 0; б) π/3; в) π/2; г) π; д) 2π; е) 3π;

Скольким длинам волн ζ будут соответствовать оптические разности хода этих лучей?

Решение

1. Разность фаз $\Delta\varphi = 2\pi$ рад соответствует длине волны λ:

$$\text{а)}\quad \left.\begin{aligned}\lambda &\Leftrightarrow 2\pi;\\ \zeta_а &\Leftrightarrow 0;\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \zeta_а = \frac{0\cdot\lambda}{2\pi} = 0;$$

$$\text{б)}\quad \left.\begin{aligned}\lambda &\Leftrightarrow 2\pi;\\ \zeta_б &\Leftrightarrow \frac{\pi}{3};\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \zeta_б = \frac{\pi\lambda}{6\pi} = \frac{\lambda}{6};$$

$$\text{в)}\quad \left.\begin{aligned}\lambda &\Leftrightarrow 2\pi;\\ \zeta_в &\Leftrightarrow \pi/2;\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \zeta_а = \frac{\lambda\pi}{4\pi} = \frac{\lambda}{4};$$

$$г)\ \left.\begin{array}{l}\lambda \Leftrightarrow 2\pi;\\ \zeta_г \Leftrightarrow \pi;\end{array}\right\} \Rightarrow \zeta_а = \frac{\pi\cdot\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{2};$$

$$д)\ \left.\begin{array}{l}\lambda \Leftrightarrow 2\pi;\\ \zeta_д \Leftrightarrow 2\pi;\end{array}\right\} \Rightarrow \zeta_а = \frac{2\pi\cdot\lambda}{2\pi} = \lambda;$$

$$е)\ \left.\begin{array}{l}\lambda \Leftrightarrow 2\pi;\\ \zeta_е \Leftrightarrow 3\pi;\end{array}\right\} \Rightarrow \zeta_е = \frac{3\pi\cdot\lambda}{2\pi} = 1{,}5\lambda;$$

---

59. В некоторую точку пространства приходят лучи от когерентных источников, длина волны которых λ = 0,5 мкм с разностью хода Δ = 0,5 мм. Что будет наблюдаться в этой точке, усиление или ослабление света?

Решение

1. Количество длин волн, соответствующих заданной разности хода Δ:

$$\zeta = \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{5\cdot 10^{-4}}{5\cdot 10^{-7}} = 1000;$$

2. Условия интерференционных максимумов и минимумов:

$$\left.\begin{array}{ll}(\max) & \Delta = \pm m\lambda;\\ (\min) & \Delta = \pm(2m+1)\dfrac{\lambda}{2};\end{array}\right\}$$

3. Поскольку на заданной разности хода когерентных волн Δ укладывается целое число волн, то в заданной точке пространства будет иметь место усиление амплитуды, т.е будет наблюдаться светлая полоса.

---

60. Два луча с длиной волны λ = 0,404 мкм пересекаются в одной точке. Что будет наблюдаться в этой точке – усиление или ослабление световой волны, если разность хода лучей Δ = 17,7 мкм?

Решение

1. Количество длин волн, соответствующих заданной разности хода Δ:

$$\zeta = \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{17{,}7\cdot 10^{-6}}{4{,}04\cdot 10^{-7}} = 43{,}81;$$

2. Условия интерференционных максимумов и минимумов:

$$\left.\begin{array}{ll}(\max) & \Delta = \pm m\lambda;\\ (\min) & \Delta = \pm(2m+1)\dfrac{\lambda}{2};\end{array}\right\}$$

$$(2m+1)\frac{\lambda}{2} = \Delta; \quad m \approx 43{,}799; \quad \Rightarrow \quad \zeta \approx \xi,$$

т.е. в заданной точке будет наблюдаться почти полное взаимное гашение волн.

---

61. Два когерентных источника излучают свет с длиной волны λ = 540 нм. Какая будет наблюдаться интерференционная картина в точке, удалённой от одного источника на r_1 = 4 м, а от другого источника на r_2 = 4,27 м?

Решение

1. Разность хода когерентных волн:

$$\Delta = r_2 - r_1 = 0{,}27\text{м};$$

2. Условия максимумов и минимумов интерференции:

$$\left.\begin{aligned}&(\max)\quad \Delta = \pm m\lambda;\\&(\min)\quad \Delta = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2};\end{aligned}\right\}$$

3. Количество волн, укладывающихся на разности хода Δ:

$$\zeta = \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{0{,}27}{5{,}4\cdot 10^{-7}} = 5\cdot 10^5,$$

поскольку на разности хода волн укладывается их целое число, то в заданной точке будет наблюдаться максимальное усиление яркости света.

---

62. Разность хода двух волн Δ = 1,2 мкм. Определить, какие длины световых волн видимого диапазона λ = 800 – 400 нм будут в результате интерференции максимально усилены, а какие максимально ослаблены?

Решение

1. Условие интерференционного максимума:

$$\Delta = \pm m\lambda_x; \quad \lambda_x = \frac{\Delta}{m};$$

$$m = 1; \quad \lambda_x = 1{,}2\cdot 10^{-6}\text{м} > \lambda_{max};$$

$$m = 2; \quad \lambda_x = 6\cdot 10^{-7}\text{м}; \quad \Rightarrow \quad \text{максимальноеусиление};$$

$$m = 3; \quad \lambda_x = 4\cdot 10^{-7}\text{м}; \quad \Rightarrow \quad \text{максимальноеусиление};$$

$$m = 3; \quad \lambda_x = 3\cdot 10^{-7}\text{м} < \lambda_{min};$$

2. Условие интерференционного минимума:

$$\Delta = \pm(2m+1)\frac{\lambda_x}{2}; \quad \lambda_x = \frac{2\Delta}{2m+1};$$

$$m = 1; \quad \lambda_x = \frac{2{,}4\cdot 10^{-6}}{3} = 800\text{нм}; \quad \Rightarrow \quad \text{максимальное ослабление};$$

$$m = 2; \quad \lambda_x = \frac{2{,}4\cdot 10^{-6}}{5} = 480\text{нм}; \quad \Rightarrow \quad \text{максимальное ослабление};$$

$$m = 3; \quad \lambda_x = \frac{2{,}4\cdot 10^{-6}}{7} \approx 343\text{нм} < \lambda_{min};$$

---

63. Разность хода когерентных лучей, пересекающихся в некоторой точке экрана, Δ =4,36 мкм. Каков будет результат интерференции волн в этой точке экрана, если длина волны света равна: а) $\lambda_а$ = 670,9 нм; б) $\lambda_б$ = 435,8 нм; в) $\lambda_в$ = 536 нм?

Решение

$$\text{а)}\quad m = \frac{\Delta}{\lambda_а} = \frac{4{,}36\cdot 10^{-6}}{6{,}709\cdot 10^{-7}} \approx 6{,}5; \quad \Rightarrow \quad \text{интерференционный минимум};$$

$$\text{б)}\quad m = \frac{\Delta}{\lambda_б} = \frac{4{,}36\cdot 10^{-6}}{4{,}358\cdot 10^{-7}} \approx 10; \quad \Rightarrow \quad \text{интерференционный максимум};$$

в) $m=\dfrac{\Delta}{\lambda_в}=\dfrac{4{,}36\cdot10^{-6}}{5{,}36\cdot10^{-7}}\approx8{,}1;\quad\Rightarrow\quad$ частичное ослабление;

---

64. В некоторую точку пространства приходят когерентные волны красного цвета с $\lambda_к$ = 720 нм, зелёного цвета с $\lambda_з$ = 540 нм и фиолетового цвета с $\lambda_ф$ = 400 нм с оптической разностью хода Δ = 4 мкм. Определить, для каких волн будет наблюдаться максимальное усиление света.

Решение

$$m_к=\frac{\Delta}{\lambda_к}=\frac{4\cdot10^{-6}}{7{,}2\cdot10^{-7}}\approx5{,}56;$$

$$m_з=\frac{\Delta}{\lambda_з}=\frac{4\cdot10^{-6}}{5{,}4\cdot10^{-7}}\approx7{,}41;$$

$$m_ф=\frac{\Delta}{\lambda_ф}=\frac{4\cdot10^{-6}}{4\cdot10^{-7}}=10;$$

Целое число волн на заданной оптической разности хода укладывается только для волн фиолетового диапазона.

---

65. Разность хода интерферирующих лучей Δ = 2,5 мкм. Найти все длины волн видимого диапазона света от λ_{max} = 0,76 мкм до λ_{min} = 0,4 мкм, которые дают в этом случае максимум интерференции.

Решение

1. Из условия интерференционного максимума:

$$\Delta=\pm m\lambda_x;\quad \lambda_x=\frac{\Delta}{m};\quad m=1,2,3,\ldots;$$

2. Длины волн, соответствующие интерференционному максимуму:

$$m=1;\quad \lambda_1=\frac{\Delta}{1}=2{,}5\cdot10^{-6}м>\lambda_{max};$$

$$m=2;\quad \lambda_2=\frac{\Delta}{2}=1{,}25\cdot10^{-6}м>\lambda_{max};$$

$$m=3;\quad \lambda_3=\frac{\Delta}{3}\approx8{,}33\cdot10^{-6}м>\lambda_{max};$$

$$m=4;\quad \lambda_4=\frac{\Delta}{4}=6{,}25\cdot10^{-6}м;\quad \text{максимум интерференции};$$

$$m=5;\quad \lambda_5=\frac{\Delta}{5}=5\cdot10^{-6}м;\quad \text{максимум интерференции};$$

$$m=6;\quad \lambda_6=\frac{\Delta}{6}=4{,}16\cdot10^{-6}м;\quad \text{максимум интерференции};$$

$$m=7;\quad \lambda_7=\frac{\Delta}{7}=3{,}57\cdot10^{-6}м<\lambda_{min};$$

---

66. Два когерентных источника посылают на экран световые волны с λ = 550 нм, дающие на экране интерференционную картину. Источники удалены один от другого на расстояние x = 2,2 мм, а от экрана на расстояние y = 2,2 м. Определить, сто будет наблюдаться на экране в точке О – гашение или усиление волн.

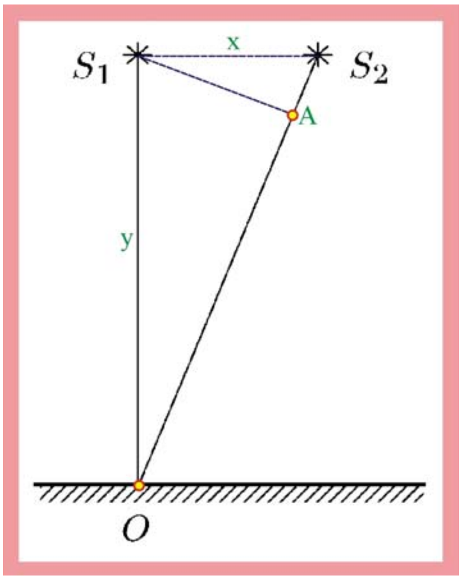


Рис. 66. Оптическая разность хода

Решение

1. Из прямоугольного треугольника, образованного лучами ΔOS_1S_2:

$$OS_2 = \sqrt{y^2 + x^2};$$

$$OS_2 = \sqrt{4{,}84 + 4{,}84 \cdot 10^{-6}} \approx 2{,}2000011\text{м};$$

2. Оптическая равность хода лучей:

$$AS_2 = \Delta = OS_2 - OS_1 \approx 1{,}1 \cdot 10^{-6}\text{м};$$

3. Количество волн, укладывающихся на полученной оптической разности хода лучей:

$$\zeta = \frac{\Delta}{\lambda} \approx \frac{1{,}1 \cdot 10^{-6}}{5{,}5 \cdot 10^{-7}} \approx 2;$$

4. В точке О будет иметь место интерференционный максимум, т.к. на оптической разности хода укладывается две длины волны.

---

67. В воде интерферируют когерентные волны с частотой $\nu = 5{\cdot}10^{14}$ Гц. Усилится или ослабнет свет в точке, если геометрическая разность хода лучей, пересекающихся в ней равна χ = 1,8 мкм?

Решение

1. Скорость световых волн в воде:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8}{1{,}33} \approx 2{,}256 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{c}};$$

2. Длина световой волны:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} \approx \frac{2{,}256 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^{14}} \approx 4{,}3884{\cdot}10^{-7}\ \text{м};$$

3. Количество длин волн, укладывающихся на разности хода лучей:

$$\zeta = \frac{\chi}{\lambda} \approx 4{,}0189,$$

наблюдается практически максимальное усиление яркости световых волн.

---

68. В некоторую точку пространства приходят когерентные лучи с геометрической разностью хода χ = 1,2 мкм, длина волны которых составляет λ = 600 нм. Определить, что произойдёт в этой точке вследствие интерференции: а) в воздухе с $n_а$ = 1; б) в воде с $n_б$ = 1,33; в) в стекле с $n_в$ = 1,5?

Решение

3. Оптическая разность хода в заданных средах:

$$\Delta_а = \chi_а = 1{,}2\text{мкм}; \quad \Delta_б = \chi n_в \approx 1{,}596 \cdot 10^{-6}\text{м}; \quad \Delta_в = \chi n_а \approx 1{,}8 \cdot 10^{-6}\text{м};$$

4. Количество длин волн, укладывающихся на оптических разностях хода лучей:

$$\zeta_а = \frac{\Delta_а}{\lambda} \approx 2; \quad \Rightarrow \text{ максимальное усиление яркости света;}$$

$$\zeta_б = \frac{\Delta_б}{\lambda} \approx 2{,}65; \quad \Rightarrow \text{ частичное ослабление;}$$

$$\zeta_в = \frac{\Delta_в}{\lambda} \approx 3; \quad \Rightarrow \text{ максимальное ослабление;}$$

---

69. Как изменится ширина интерференционной полосы по сравнению с воздухом, если измерения, без изменения условий эксперимента, перенести в воду с коэффициентом преломления n = 1,33?

Решение

1. Ширина интерференционной полосы в воздухе:

$$\Delta x_0 = \frac{1}{d}\lambda_0,$$

где d – расстояние между источниками световых волн, λ_0 – длина световой волны в воздухе.

2. Ширина интерференционной полосы в воде:

$$\Delta x_{H_2O} = \frac{1}{d}\lambda_{H_2O} = \frac{1}{d}\frac{\lambda_0}{n} = \frac{1}{d}\frac{\lambda_0}{1{,}33};$$

3. Изменение ширины полосы:

$$\xi = \frac{\Delta x_0}{\Delta x_{H_2O}} = 1{,}33;$$

---

70. На пути света перпендикулярно его направлению поставлена стеклянная пластинка с показателем преломления n = 1,5 толщиной ℓ = 1 мм. На сколько, при этом, изменится оптическая длина пути?

Решение

$$\left.\begin{aligned} \Delta_0 &= \ell n_0 = 1\cdot 10^{-6}\text{м};\\ \Delta_{SiO_2} &= \ell n = 1\cdot 10^{-6}\cdot 1{,}5 = 1{,}5\cdot 10^{-6}\text{м}; \end{aligned}\right\} \quad \Delta_{SiO_2} - \Delta_0 = 0{,}5\text{мкм};$$

---

71. Два параллельных луча падают на стеклянную призму и выходят из неё. Определить оптическую разность хода лучей после выхода из призмы, если коэффициент преломления стекла n = 1,5.

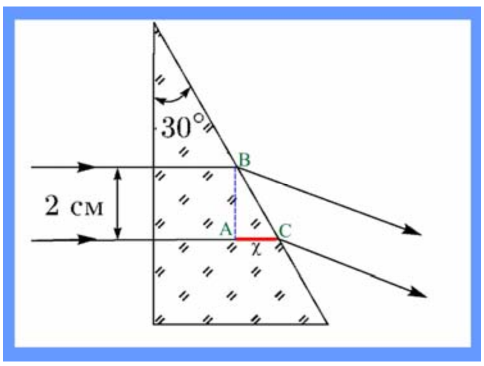


Рис. 71. Оптическая разность в призме

Решение

1. Геометрическая разность хода лучей в призме χ из прямоугольного треугольника ABC:

$$\chi = AC = ABtg30^0 \approx 1{,}1547\text{см};$$

2. Оптическая разность хода лучей в призме:

$$\Delta = n\chi \approx 1{,}732 см;$$

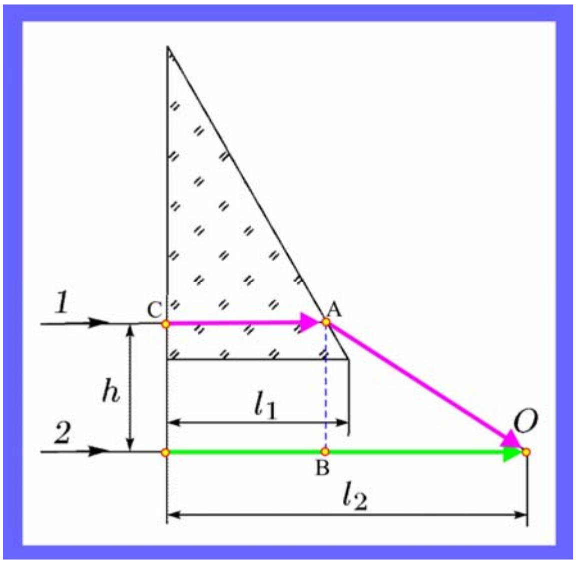


Рис. 72. Преломление луча в призме

72. Два монохроматических параллельных луча 1 и 2 с длиной волны λ = 0,6 мкм идут на расстоянии h = 2 см друг от друга. На пути луча 1 поставлена призма с показателем преломления n = 1,5. Луч проходит в призме расстояние ℓ_1 = 1 см, преломляясь пересекает луч 2 в точке О на расстоянии ℓ_2 = 15 см от вертикального катета призмы. Найти оптическую разность путей обоих лучей в точке О. Каков результат интерференции лучей в этой точке?

Решение

1. Геометрический путь луча 1:

$$\chi_1 = CA + AO;$$

$$AO \approx \sqrt{(\ell_2 - \ell_1)^2 + h^2};$$

$$AO \approx \sqrt{14^2 + 2^2} \approx 14{,}1 \text{ см};$$

2. Оптическая длина пути луча в призме:

$$\Delta_1 \approx \ell_1 n \approx 1{,}5 см;$$

3. Суммарная длина пути луча 1:

$$\Delta_1^* = AO + \Delta_1 = 15{,}6 \text{ см};$$

4. Оптическая разность хода лучей 1 и 2:

$$\Delta_{1,2} \approx \Delta_1^* - \ell_2 \approx 0{,}6 \text{ см};$$

5. Результат интерференции лучей в точке О:

$$\zeta = \frac{\Delta_{1,2}}{\lambda} \approx \frac{6\cdot 10^{-3}}{6\cdot 10^{-7}} \approx 10^4; \quad \Rightarrow \quad \text{максимальное усиление яркости};$$

---

73. Найти четыре наименьшей толщины прозрачной плёнки, показатель преломления которой n = 1,5, чтобы при её освещении нормальными лучами красного цвета с длиной волны λ = 750 нм они были видны в отражённо свете красными.

Решение

1. Интерференционное уравнение тонкой плёнки:

$$2dn\cos\gamma \pm \frac{\lambda}{2} = m\lambda; \quad \gamma = 0^0; \quad \cos\gamma = 1; \quad 2nd \pm \frac{\lambda}{2} = m\lambda; \quad 2nd = m\lambda - \frac{\lambda}{2};$$

2. Толщина плёнки при различных значениях m:

$$m = 1; \quad 2nd = \left(\lambda - \frac{\lambda}{2}\right); \quad 2nd = \frac{\lambda}{2}; \quad d_1 = \frac{\lambda}{4n} \approx 125 нм;$$

$$m = 2; \quad 2nd = \left(2\lambda - \frac{\lambda}{2}\right); \quad 2nd = \frac{3\lambda}{2}; \quad d_2 = \frac{3\lambda}{4n} \approx 375 нм;$$

$$m = 3;\quad 2nd = \left(3\lambda - \frac{\lambda}{2}\right);\quad 2nd = \frac{5\lambda}{2};\quad d_2 = \frac{3\lambda}{4n} \approx 625\text{нм};$$

$$m = 4;\quad 2nd = \left(4\lambda - \frac{\lambda}{2}\right);\quad 2nd = \frac{7\lambda}{2};\quad d_4 = \frac{3\lambda}{4n} \approx 875\text{нм};$$

---

74. Во сколько раз увеличится расстояние между соседними интерференционными полосами на экране в опыте Юнга, если зелёный светофильтр (λ_1 = 500 нм) заменить красным фильтром (λ_2 = 650 нм)?

Решение

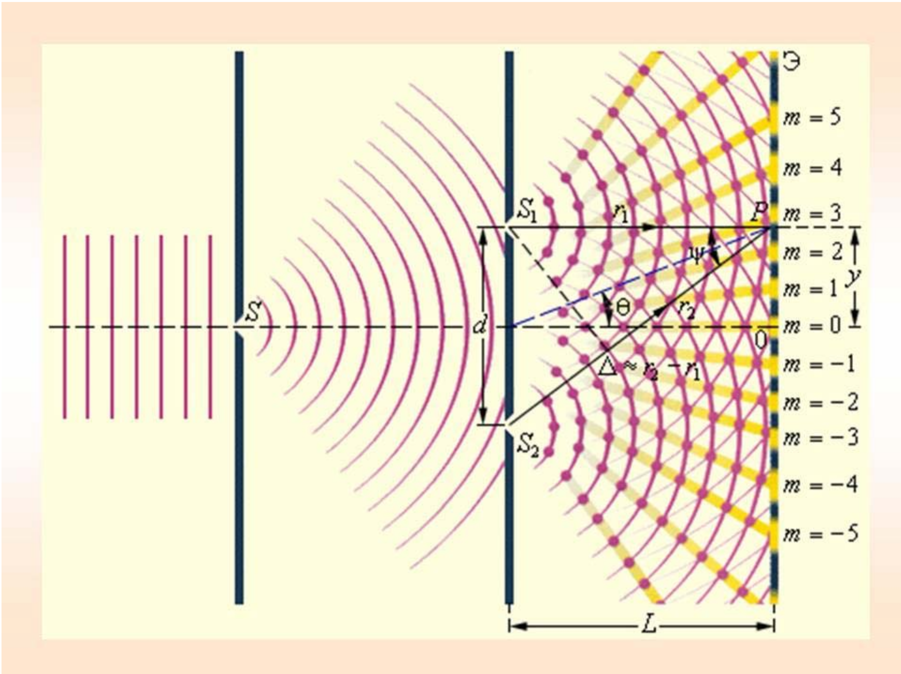


Рис. 74. Схема опыта Юнга

1. Уравнение интерференционного максимума и минимума, применительно к опыту Юнга, можно представить следующим образом

$$\xi_{max} = k\frac{L}{d}\lambda;\quad (k = 0,1,2,3\ldots)\,;$$

$$\xi_{min} = \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{L}{d}\lambda;\quad (k = 0,1,2,3\ldots)\,;$$

2. В данном случае расстояния между полосами и ширина полос будут одинаковыми, поэтому

$$\Delta\xi = \xi_{min} - \xi_{max} = \frac{L}{d}\lambda\,;$$

3. Расстояния между интерференционными полосами при использовании зелёного и красного светофильтра определятся как:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\xi_1 &= \frac{L}{d}\lambda_1; \\ \Delta\xi_2 &= \frac{L}{d}\lambda_2; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{\Delta\xi_2}{\Delta\xi_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1{,}3\,;$$

---

75. В опыте Юнга (рис. 74) отверстия освещались монохроматическим светом (λ = 600 нм). Расстояние между отверстиями d = 1 мм, расстояние от отверстий до экрана L = 3 м. Найти положение первых трёх светлых полос.

Решение

1. Первая светлая полоса будет находиться на расстоянии

$$\xi_1 = \frac{L}{d}\lambda = \frac{3}{1\cdot 10^{-3}}\cdot 6\cdot 10^{-7} = 1{,}8\cdot 10^{-3}\,\text{м};$$

2. Вторая и третья светлые полосы будут расположены на расстоянии

$$\xi_2 = 2\cdot\frac{L}{d}\lambda = 3{,}6\cdot 10^{-3}\,\text{м};\quad \xi_3 = 3\cdot\frac{L}{d}\lambda = 5{,}4\cdot 10^{-3}\,\text{м};$$

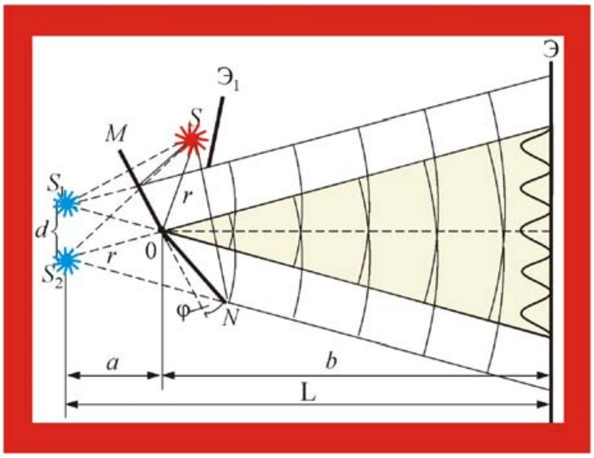


Рис. 76. Зеркала Френеля

76. В эксперименте Френеля с зеркалами расстояние между мнимыми изображениями источника света d = 0,5 мм, расстояние до экрана L = 5 м. В зелёном свете возникли интерференционные полосы, расположенные на расстоянии ξ = 5 мм друг от друга. Определить длину волны зелёного света.

Решение

1. Расстояние интерференционными полосами определяется уравнением

$$\xi = \frac{L}{d}\lambda; \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\xi d}{L} = 5\cdot 10^{-7}\,\text{м};$$

---

77. В опыте Юнга (рис. 74) на пути одного из интерферирующих лучей помещалась стеклянная пластинка, вследствие чего центральная полоса смещалась в положение, первоначально занимаемое пятой светлой полосой (не считая центральной). Луч света с λ = 600 нм падал нормально к поверхности пластинки, показатель преломления которой n = 1,5. Найти по этим данным толщину пластинки h.

Решение

1. Определим изменение разности хода лучей после прохождении ими стеклянной пластинки

$$\Delta = nh - n = h(n - 1);$$

2. По условию задачи при внесении пластинки произошло смещение именно на ширину пяти полос (k=5), т.е. $\Delta = k\lambda$, отсюда:

$$h(n-1) = k\lambda; \quad \Rightarrow \quad h = \frac{k\lambda}{n-1} \cong \frac{5\cdot 6\cdot 10^{-7}}{0{,}5} \cong 6\cdot 10^{-6}\,\text{м}.$$

---

78. В опыте Юнга стеклянная пластинка толщиной h = 12 см помещается перпендикулярно на пути одного из интерферирующих лучей. На сколько могут отличаться друг от друга показатели преломления в различных местах пластинки, чтобы разность оптического хода от такой неоднородности не превышало Δ = 1 мкм?

Решение

1. Определим разность хода лучей для двух значений показателей преломления n_1 и n_2

$$\Delta_1 = h(n_1 - 1); \quad \Delta_2 = h(n_2 - 1);$$

2. По условию задачи

$$\Delta = \Delta_1 - \Delta_2 = h(n_1 - 1) - h(n_2 - 1) = 1 \cdot 10^{-6}\,м,$$

откуда следует, что:

$$\Delta n = n_1 - n_2 = \frac{\Delta}{h} \cong 5 \cdot 10^{-5}.$$

---

79. На мыльную плёнку падает белый свет под углом j = 45° к поверхности. При какой наименьшей толщине плёнки отражённые лучи будут окрашены в радикально жёлтый цвет с λ = 600 нм, если показатель преломления мыльной воды n = 1,33?

Решение

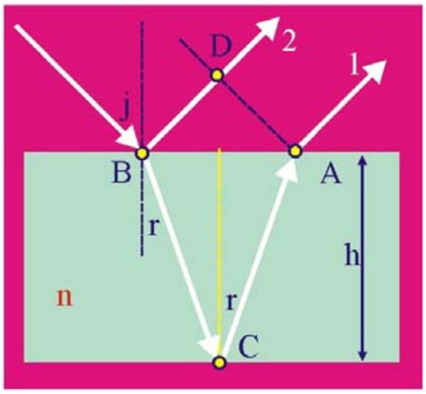


Рис. 79. Толщина мыльной плёнки

1. Максимум отражения от плёнки имеет место, когда лучи отражённые от нижней и верхней поверхности плёнки, т.е. интерферирующие лучи складываясь, усиливают друг друга. Для этого оптическая разность хода этих лучей Δd должна быть равна целому числу k длин волн

$$\Delta d = \frac{\lambda}{2} + n(AC + BC) - AD = k\lambda;$$

2. Слагаемое $\lambda/2$ учитывает, что при отражении световой волны от более плотной среды фаза колебаний меняется на противоположную по знаку. Множитель в виде коэффициента преломления n учитывает уменьшение скорости света на пути следования луча s, при этом так же возникает такое же изменение фаза колебаний

$$\Delta\varphi = \frac{\omega s}{v} = \frac{n\omega s}{c};$$

3. Запишем следующие тригонометрические соотношения:

$$AB = AC = \frac{h}{\cos r}; \quad AD = 2h \sin j \cdot tg r;$$

4. Используя закон преломления света, получим:

$$\left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2 j},$$

откуда

$$h = \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 j}};$$

5. Минимальная толщина плёнки будет иметь место при k = 1

$$h_{min} = \frac{\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 j}} \cong 1{,}3 \cdot 10^{-7}\,м;$$

---

80. Мыльная плёнка, расположенная вертикально, образует клин вследствие стекания жидкости. При наблюдении интерференционных полос в отражённом свете ртутной дуги (λ = 546,1 нм) обнаружилось, что расстояние между пятью полосами x =2 мм. Найти угол γ клина. Свет падает перпендикулярно к поверхности плёнки. Показатель преломления мыльной воды n = 1,33.

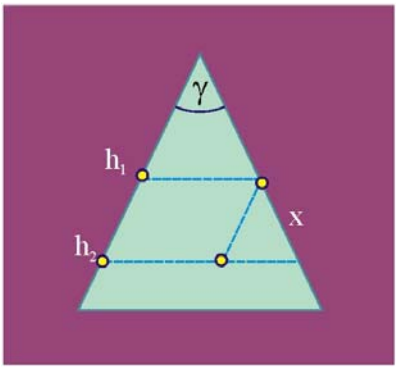


Рис. 80. Вертикальная плёнка

Решение

1. Световые волны, падающие на прозрачную плёнку, частично проникают в неё, а частично отражаются как от верхней поверхности, так и от нижней поверхности. Волны приобретают оптическую разность хода, величина которого зависит от толщины плёнки, от показателя преломления и угла падения.

2. В заданном случае свет падает перпендикулярно к поверхности плёнки, толщина которой всюду мала. Это даёт основание считать, что в отражённом свете (сверху) интерференционная картинка будет локализована на верхней поверхности клина.

3. Предположим, что h_1 и h_2 толщина плёнки, соответствующая разным интерференционным полосам, в этом случае

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{\lambda}{2n};$$

4. Полагая угол γ малым, модно принять

$$\Delta h = x\,tg\gamma; \quad \Rightarrow \quad tg\gamma = \frac{k\lambda}{2nx};$$

$$\gamma = arctg\frac{k\lambda}{2nx} \cong arctg\frac{5\cdot 5{,}461\cdot 10^{-7}}{2{,}66\cdot 2\cdot 10^{-4}} \cong arctg(5{,}13\cdot 10^{-5});$$

$$\gamma \cong 11''.$$

---

81. Мыльная плёнка, расположенная вертикально, вследствие стекания образует клин. Интерференция наблюдается в отражённом свете через красный светофильтр (λ_1 = 631 нм). Расстояния между соседними полосами равны x_1 = 3 мм. Затем интерференционная картинка наблюдалась через синий светофильтр (λ_2 = 400 нм). Определить расстояние между двумя синими полосами x_2, считая что свет падает на поверхность плёнки нормально поверхности и форма плёнки не меняется.

Решение

1. Приняв угол клина γ малым, по аналогии с предыдущей задачей можно записать:

$$tg\gamma = \frac{k\lambda_1}{2nx_1} = \frac{k\lambda_2}{2nx_2}; \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{x_1\lambda_2}{\lambda_1} \cong 1{,}9\cdot 10^{-3}\,м;$$

---

82. Две когерентные волны в результате интерференции могут в некоторой области полностью гасить друг друга. Что при этом происходит с энергией взаимодействующих волн?

Решение

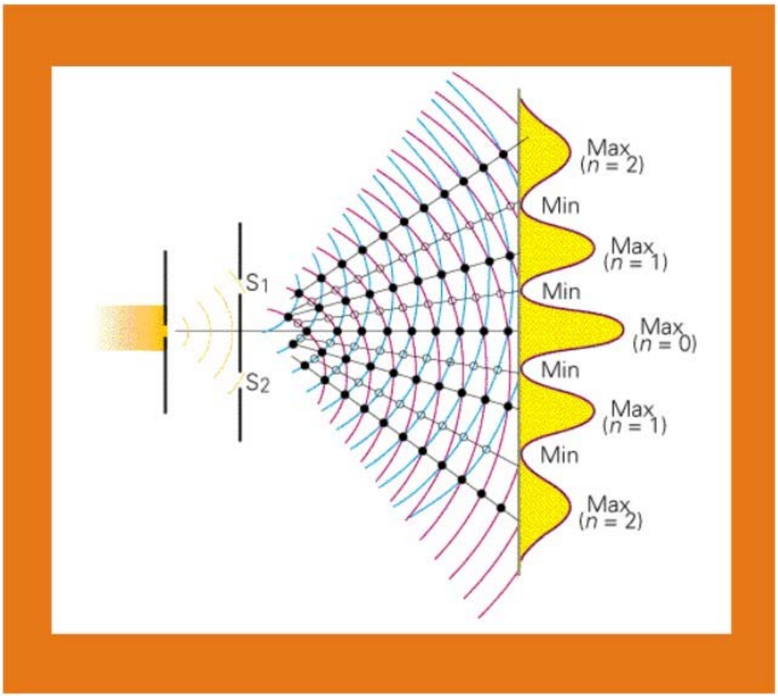


Рис. 82. Распределение энергии

1. В установке Френеля с двумя отверстиями на экране появляется вследствие интерференции некоторое распределение интенсивности света, которая пропорциональна энергии, приходящейся на единичные площадки экрана.

2. Участки min соответствуют минимуму интенсивности, т.е. минимуму энергии, которая «перекачивается» вследствие интерференции в соседние области экрана.

3. Ели добиться чтобы в точках min амплитуда колебаний в электромагнитной волне стала равной нулю A = 0, то в области Max (n = 0) колебания будут протекать с амплитудой 2A. Плотность энергии при этом возрастёт в четыре раза, т.к. $\varpi \sim A^2$.

---

83. Лучи белого света падают под углом $\alpha = 60^o$ на тонкую прозрачную пластинку. Пластинка в отражённом свете кажется зелёной. Как изменится цвет пластинки при незначительном уменьшении угла падения лучей?

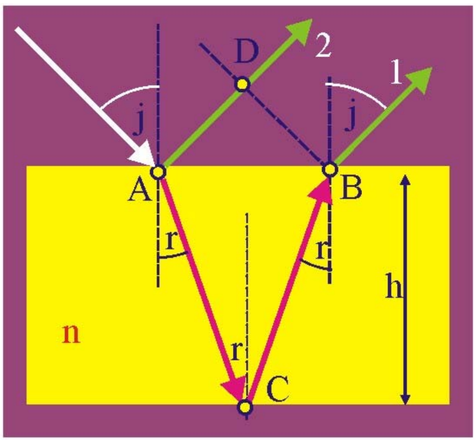


Рис. 83. Интерференция на пластине

Решение

1. Если пластинка в отражённом свете кажется зелёной, это значит, что разность оптического хода лучей пучков 1 и 2 Δd составляет целое число k длин волн для зелёного света, т.е. имеет место условие максимума:

$$\Delta d = k\lambda ;$$

2. Определим оптическую разность хода лучей

$$\Delta d = \frac{\lambda}{2} + n(AC + BC) - AD ;$$

3. Слагаемое $\lambda/2$ учитывает то обстоятельство, что при отражении луча 1 от оптически более плотной среды фаза колебаний электромагнитной волны меняется на противоположную ($\Delta\varphi = \pi$), т.е. возникает такое же изменение фазы, как при прохождении расстояния $\lambda/2$.

3. Множитель в виде показателя преломления n учитывает уменьшение скорости света в среде:

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t = \omega\frac{s}{v} = \frac{\omega sn}{c};$$

4. Из тригонометрических соображений можно записать:

$$AC = BC = \frac{h}{\cos r}; \quad AD = AB\sin j = 2h\sin j\cdot tgr;$$

5. Соотношение между углами устанавливает закон преломления света

$$n = \frac{\sin j}{\sin r};$$

6. Подставляя полученные значения величин в уравнение Δd, получим

$$\Delta d = \frac{\lambda}{2} + \frac{2h(n - \sin j\sin r)}{\cos r} = \frac{\lambda}{2} + 2h\sqrt{n^2 - \sin^2 j};$$

7. Условие интерференционных максимумов запишется, таким образом, в виде:

$$\left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2 j};$$

Откуда видно, что уменьшение j приведёт к увеличению λ, т.е. цвет пластинки сместится в сторону красного цвета.

84. Цвета тонкой плёнки нефтепродуктов на воде заметно отличаются оттенками от цветов радуги. Почему?

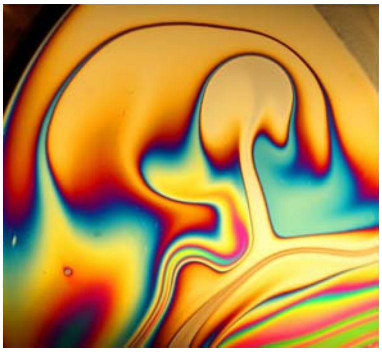


Рис. 84. Интерференция на тонкой плёнке

Решение

1. Радуга, как и спектр света, пропущенного через призму, представляет собой «чистое» разложение в спектр белого света.

2. Спектр, получающийся в результате интерференции на тонких плёнках, является следствием вычитания из белого света некоторых цветных спектральных составляющих, что приводит к немонохроматичности отражённого света. Кроме того, толщина плёнок переменна.

85. Интенсивность отражённого от мыльной плёнки монохроматического света зависит от длины волны; она имеет максимум при $\lambda_1 \cong 630$ нм и ближайший минимуму при $\lambda_2 \cong 525$ нм. Определить толщину плёнки, принимая показатель преломления таким же, как и у воды n = 1,33.

Решение

1. Условие максимума при нормальном падении света на плёнку ($\alpha = 0$) при отражении описывается уравнением:

$$(k - 1)\lambda_1 = 2nd,$$

условие минимума

$$k\lambda_2 = 2nd;$$

Рис. 85. Мыльная плёнка

2. Решая уравнения совместно, находим:

$$k = \frac{\lambda_1}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} = 3;$$

$$d = \frac{\lambda_1\lambda_2}{4n(\lambda_1 - \lambda_2)} \cong 590 \text{ нм};$$

86. Почему интерференционная окраска наблюдается только у достаточно тонких плёнок?

Решение

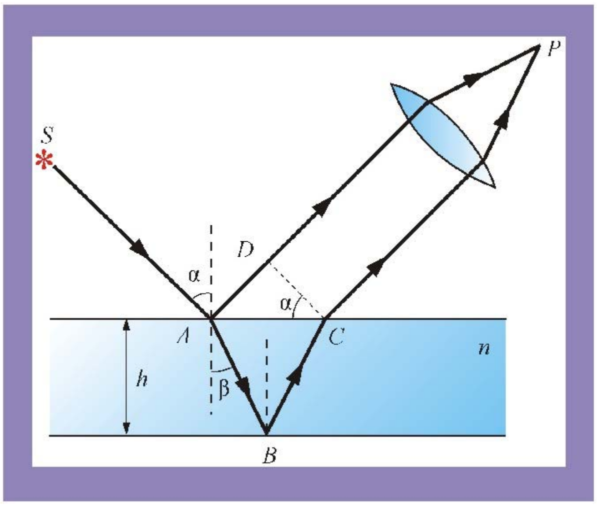


Рис. 86. Интерференция на тонкой плёнке

1. Возникновение интерференционной картинки только на тонких плёнках обусловлено тремя основными причинами:

2. Во-первых, относительно толстые плёнки при отражении от поверхностей дают не когерентные волны, что исключает явление интерференции как таковое;

3. Во-вторых, при увеличении толщины плёнки интерференционные полосы приближаются друг к другу и их достаточно сложно различить даже при использовании собирающей линзы:

4. В-третьих, в обычных условиях, когда падающие световые волны не являются монохроматическими, происходит наложение интерференционных максимумов световых волн различной длины.

87. Пучок света (λ = 582 нм) падает перпендикулярно к поверхности стеклянного клина с углом $\gamma = 20''$. Какое число k_0 тёмных интерференционных полос приходится на единицу длины клина, если показатель преломления стекла n = 1,5?

Решение

1. Для малых углов (рис. 17.49) можно принять, что:

$$AB = BC = h; \quad tg\gamma \cong \gamma;$$

2. С учётом принятых допущений, оптическая разность хода определится как

$$\Delta = 2nh + \frac{\lambda}{2};$$

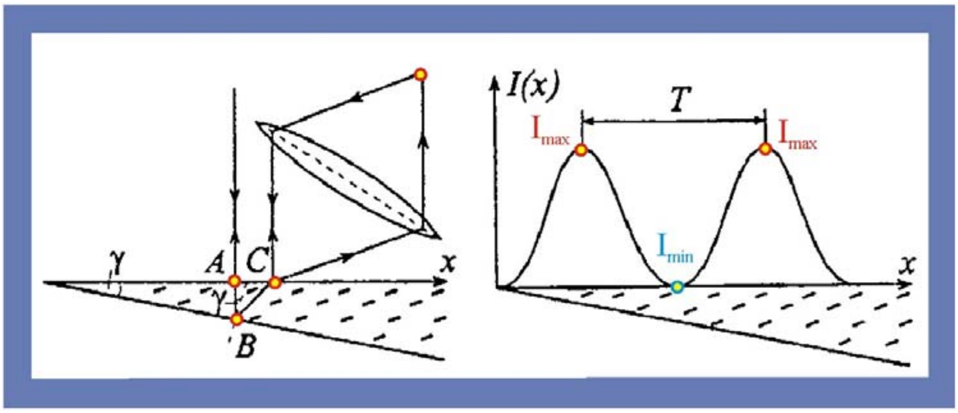


Рис. 87. Интерференция на стеклянном клине

3. Выразим длину участка поверхности клина x через величины γ и h

$$h = xtg\gamma; \quad h \cong \gamma x;$$

4. Перепишем уравнение оптической разности хода лучей

$$\Delta = 2\gamma xn + \frac{\lambda}{2};$$

5. Если интенсивность интерферирующих волн одинакова, то результирующую интенсивность от сложения двух таких волн с разностью фаз δ определим выражением:

$$I = 2I_0(1 + \cos\delta); \quad \delta = \frac{2\pi\Delta}{\lambda};$$

6. Подставим значение δ в уравнение разности хода Δ

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\left(2\gamma nx + \frac{\lambda}{2}\right);$$

7. С учётом значения δ уравнение I(x) примет вид:

$$I(x) = 2I_0\left\{1 + \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(2\gamma nx + \frac{\lambda}{2}\right)\right]\right\},$$

или, после преобразования:

$$I(x) = 2I_0\left\{1 + \cos\left[\frac{4\pi}{\lambda}(2\gamma nx + \pi)\right]\right\};$$

8. Определим период изменения интенсивности

$$\omega = \frac{4\pi\gamma n}{\lambda}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}; \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\lambda}{2\gamma n};$$

9. Количество тёмных полос, приходящихся на единицу длины клина, представляет собой величину обратную периоду

$$k_0 = \frac{1}{T} = \frac{2\gamma n}{\lambda} \cong \frac{2 \cdot 9{,}7 \cdot 10^{-10} \cdot 1{,}5}{582 \cdot 10^{-9}} \cong 5 \cdot 10^{-3}\frac{1}{м} = 5\frac{1}{см};$$

---

88. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим нормально к поверхности пластинки. Наблюдение ведётся в отражённом свете. Радиусы двух соседних тёмных колец равны r_k = 4 мм и r_{k+1} = 4,38 мм. Радиус кривизны линзы R = 6,4 м. Определить порядковые номера колец и длину волны падающего света.

Решение

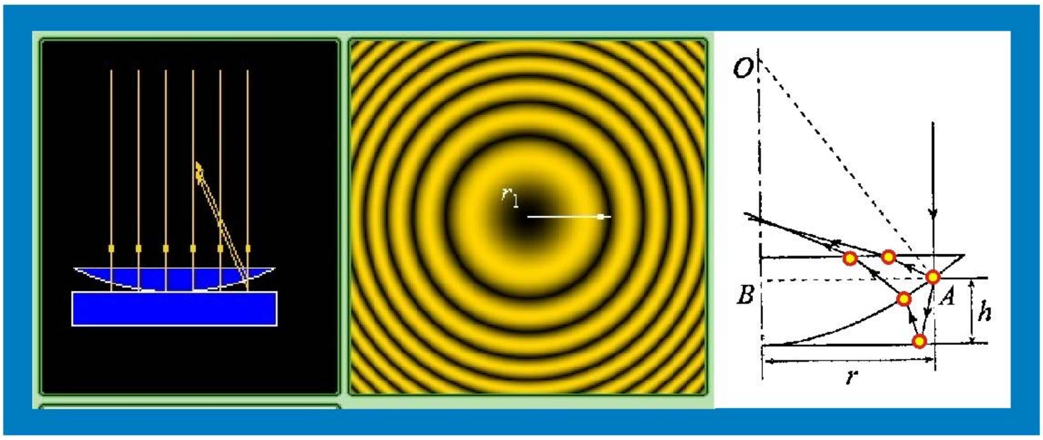


Рис. 88. Установка для наблюдения интерференционных колец Ньютона

1. Возникновение колец Ньютона обусловлено интерференцией световых лучей, отражённых от двух поверхностей тонкой воздушной прослойки между линзой и пластинкой. Оптическая разность хода лучей определяется как:

$$\Delta d = 2h + \frac{\lambda}{2};$$

2. Из прямоугольного треугольника ΔАВО следует, что:

$$R - h = \sqrt{R^2 - r^2};$$

3. Так как r << R, то

$$\sqrt{R^2 - r^2} \cong R - \frac{r^2}{2R},$$

в этом случае:

$$R - h = R - \frac{r^2}{2R}; \quad \Rightarrow \quad h = \frac{R^2}{2R};$$

4. Запишем условие интерференционного максимума

$$\Delta d = (2k+1)\frac{\lambda}{2};$$

5. Приравняем правые части уравнений Δd

$$2h = k\lambda; \quad \Rightarrow \quad h = \frac{k\lambda}{2};$$

6. Для радиуса k – того кольца можно записать:

$$r_k = \sqrt{2Rh} = \sqrt{k\lambda R};$$

7. Определим порядковый номер кольца

$$\frac{r_{k+1}^2}{r_k^2} = \frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{k}; \quad \Rightarrow \quad k = \frac{r_k^2}{r_{k+1}^2 - r_k^2} = 6;$$

8. Длина волны падающего света

$$\lambda = \frac{r_k^2}{kR} \cong 5 \cdot 10^{-7}\,м;$$

---

89. В интерферометре Майкельсона для смещения интерференционной картинки на k = 500 полосок потребовалось переместить зеркало на расстояние L = 0,161 мм. Определить длину волны падающего света.

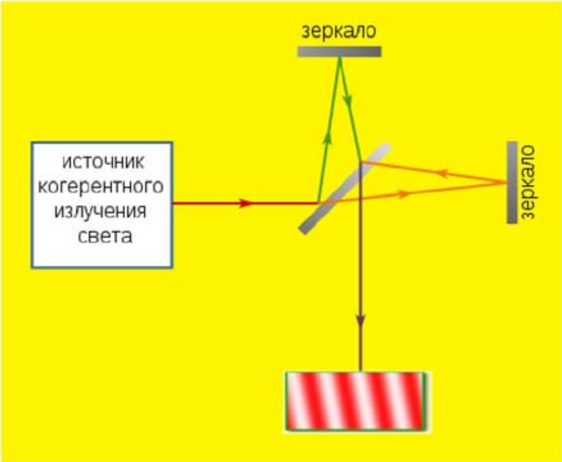


Рис. 89. Интерферометр Майкельсона

Решение

1. Интерферометр Майкельсона состоит из двух зеркал и и полупроницаемой отражающей перегородки, наклоненной под углом 45° (рис. 89). Эта перегородка пропускает 50% падающего на нее света и отражает остальные 50%. Расстояния до зеркал и одинаковы. Монохроматический свет от источника наполовину проходит через перегородку, отражается от зеркала. Другая часть пучка света отражается перегородкой S ко второму зеркалу, а на обратном пути проходит через перегородку, попадая в детектор, где наблюдается интерференционная картинка.

2. Перемещение одного из зеркал на $\lambda/2$ обеспечивается изменение разности хода лучей на λ, т.е. смещение интерференционной картинки на одну полосу, т.е.

$$L = \frac{k\lambda}{2}; \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2L}{k} \cong 6{,}44 \cdot 10^{-7}\,\text{м};$$

---

90. Лучи белого света падают нормально на стеклянную пластинку с показателем преломления n = 1,5 и толщиной d = 0,4.мкм. Какие длины волн λ видимого светового диапазона (400 – 700 нм) будут усиливаться в отражённом свете?

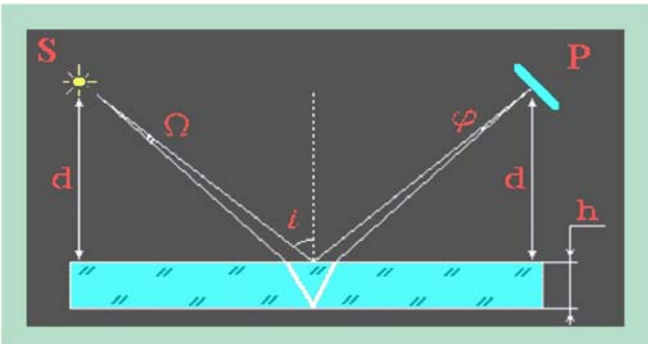


Рис. 90. Интерференция на пластине

Решение

1. Условие максимума в отражённом свете

$$2dn = (2k+1)\frac{\lambda}{2};$$

2. Выразим длину волны

$$\lambda = \frac{4dn}{2k+1},$$

при k = 1

$$\lambda_1 = \frac{4 \cdot 4 \cdot 10^{-7} \cdot 1{,}5}{3} \cong 8 \cdot 10^{-7}\,\text{м};$$

3. Волна с λ_1 не входит в заданный видимый световой диапазон.

4. При k = 2

$$\lambda_2 \cong 480\ \text{нм};$$

5. При k = 3

$$\lambda_3 \cong 343\ \text{нм},$$

Волна с λ_2 так же не лежит в видимом диапазоне, поэтому интерференция наблюдается для длины волны $\lambda_2 \cong 480$ нм, в области голубого или синего цвета.

14. Дифракция волн светового диапазона

91. Что такое дифракция волн? Каковы физические особенности этого явления?

Решение

1. Явление дифракции заключается в изменении направления распространения волн при встрече с препятствием. Чаще всего при этом подразумевают интерференционные процессы, сопровождающие огибание препятствий.

2. Строго говоря, явление дифракции сопровождает буквально все волновые процессы, являясь, по сути, визитной карточкой этого типа движения материи. Однако наблюдение дифракционных волновых картин становится возможным только в том случае, когда характерные размеры препятствия соизмеримы с длиной волны или меньше этой длины. Явление дифракции зарегистрировано для всего диапазона упругих волн и волн оптического диапазона, от инфразвукового диапазона до волн в гиперзвуковой области, включая акустические, гравитационные и сейсмические волны.

3. На рис. 91.1 приведены картины прохождения гравитационно-капиллярных волн через щели различной ширины, наглядно видно, что явление искривления первоначального направления плоской волны тем проявляется сильнее, чем уже щель, т.е. чем её размеры более близки к длине падающей волны.

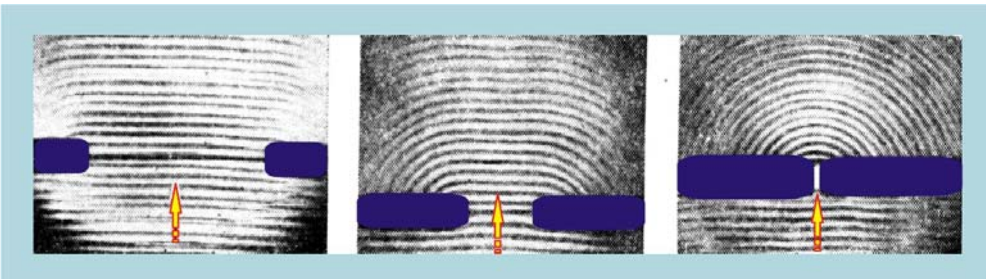


Рис. 91.1. Прохождение плоской упругой волны при различных размерах отверстия

4. Различают два вида дифракции: **дифракцию Френеля**, наблюдающуюся при взаимодействии с препятствиями сферических волн и **дифракцию Фраунгофера**, имеющую место при распространении плоских волн. Математически решение задач первого типа представляется более сложной. Выражение для интенсивности дифрагирующей волны J записывается в виде уравнения

$$J = A^2\left(C^2 + S^2\right),$$

где A – постоянная величина, значения C и S находятся через интегралы Френеля.

5. Дифракция света представляет собой комплекс явлений, наблюдающихся при распространении света мимо резких краёв непрозрачных или прозрачных тел, сквозь узкие отверстия. При этом происходит нарушение прямолинейности распространения света, т. е. отклонение от законов геометрической оптики.

6. Вследствие дифракции световых волн при освещении непрозрачных экранов точечным источником света на границе тени, где, согласно законам гео-

метрической оптики, должен был бы происходить скачкообразный переход от тени к свету, наблюдается ряд светлых и тёмных дифракционных полос.

7. Поскольку дифракция свойственна всякому волновому движению, открытие этого явления было сделано в 17 в. итальянским физиком и астрономом Ф. Гримальди и её объяснение в начале 19 в. французским физиком О. Френелем явились одним из основных доказательств волновой природы света.

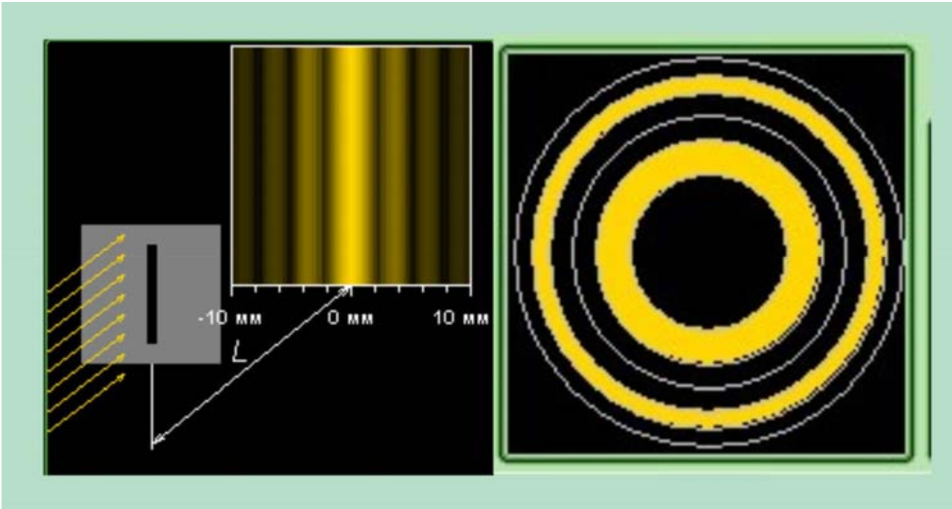


Рис. 91.2. Дифракция света на щели и круглом отверстии

8. Приближённая теория дифракции света основана на применении Гюйгенса- Френеля принципа. Для качественного рассмотрения простейших случаев дифракция света может быть применено построение зон Френеля. При прохождении света от точечного источника через узкую щель в непрозрачном экране или вокруг круглого непрозрачного экрана наблюдаются дифракционные полосы в виде чередующихся светлых и тёмных линий или концентрических окружностей. Если отверстие оставляет открытым чётное число зон, то в центре дифракционной картины получается тёмное пятнышко, при нечётном числе зон – светлое. В центре тени от круглого экрана, закрывающего не слишком большое число зон Френеля, получается светлое пятнышко.

---

92. Почему радиоволны огибают здания и иные препятствия, а волны светового диапазона, так же являющиеся электромагнитными, на такое не способны?

Решение

1. Когда обнаружилось, что электромагнитные волны могут распространяться в пустоте, являясь одновременно и переносчиком световой энергии, то стало предельно очевидным, каким образом Солнце снабжает энергией нашу планету.

2. Солнечный свет представляет собой, по сути сложный набор электромагнитных волн инфракрасного, оптического и ультрафиолетового диапазона. Дальнейшие исследования обнаружили, что электромагнитное излучение проявляется в чрезвычайно широком диапазоне длин волн, в зависимости от величины длины волны излучение имеет разнообразные энергетические проявления.

3. В таб. 92 приведены, обнаруженные к настоящему времени электромагнитные волны. Обращает на себя внимание диапазон длин электромагнитных

волн от более чем 100 км, до 10^{-12}м, что составляет 17 порядков. Представить себе образно число 10^{17} достаточно сложно, но, тем не менее, мы живём в Мире, сама сущность жизни в котором имеет электромагнитную основу, включая рыб, млекопитающих и даже – «венец природы».

Таблица 92

Длина	Наименование	Частота
100 км и более	Низкочастотные электрические колебания	0 – 3 кГц
100 км – 1 мм	Радиоволны:	3 кГц – 3ТГц
100 –10 км	мириаметровые (очень низкие частоты)	3 – 30 кГц
10 – 1км	километровые (низкие частоты)	30 – 300 кГц
1 км – 100 м	гектометровые (средние частоты)	300 кГц – 3МГц
100 – 10 м	декаметровые (высокие частоты)	3 – 30 МГц
10 – 1 м	метровые (очень высокие частоты)	30 – 300 МГц
1 м – 10 см	дециметровые (ультравысокие частоты)	300 – 3ГГц
10 – 1 см	сантиметровые (сверхвысокие частоты)	3 – 30 ГГц
1 – 1 мм	миллиметровые	30 – 300ГГц
1 – 0,1 мм	децимиллиметровые (гипервысокие частоты)	300 – 3ТГц
2 мм – 760 нм	Инфракрасное излучение	150 ГГц – 400ТГц
760 – 380 нм	Видимое излучение	400 ТГц – 800 ТГц
380 – 3 нм	Ультрафиолетовое излучение	800 ТГц – 100 ПГц
10 нм – 1 пм	Рентгеновское излучение	300ПГц – 300ЭГц
до 10 пм	Гамма-излучение	до 30 ЭГц

4. Рассмотрим условия распространения радиоволн коротковолнового диапазона $\lambda_P \approx 10 - 100$ м и электромагнитные волны видимого светового диапазона $\lambda_C \approx 760 - 380$ нм. Для электромагнитных волн светового диапазона все наземные объекты, включая дома и прочие образования естественного и искусственного происхождения будут несоизмеримо велики, т.е. Взаимодействие волн и препятствий будет протекать по лучевой схеме, где справедливы законы геометрической оптики.

5. Для радиоволн размеры препятствий соизмеримы с длиной волны, поэтому при взаимодействии с препятствиями станут проявляться дифракционные эффекты, т.е. явление изменения прямолинейного направления распространения волн, радиоволны будут испытывать дифракцию.

---

93. Почему в противотуманных фарах автомобилей используются светофильтры жёлтого света?

Рис. 93. Противотуманные фары

Решение

1. Видимый свет занимает диапазон длин волн $\lambda_C \approx 760 - 380$ нм, причём длина волн $\lambda_{Кр} \approx 770$ нм имеет красную окраску, а $\lambda_Ф \approx 380$ нм – фиолетовую.

2. Взвешенные в воздухе капельки воды (туман) имеют диаметр порядка $d \approx 350 - 400$ нм, поэтому наибольшие эффекты огибания капелек будут наблюдаться для красного цвета, волны фиолетового цвета будут отражаться, т.е. слепить водителя. Красный светофильтр на фарах использовать нельзя, потому что этот цвет применяется для подачи предупредительных и запрещающих сигналов специальными регулирующими (светофоры) и транспортными средствами (ГИБДД, скорая помощь и т.д.). В этой связи используют наиболее близкие светофильтры жёлтого цвета. Оранжевые не используются потому, что можно попутать с красными.

---

94. Почему в центральной части спектра, полученного на экране при освещении дифракционной решётки белым светом, всегда наблюдается белая полоса?

Решение

1. Уравнение одномерной дифракционной решётки с периодом $d = a + b$, где a – ширина каждой щели, b – ширина тёмного промежутка:

$$d\sin\varphi = m\lambda; \quad m = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

2. При $m = 0$ (центральный максимум) $d\sin\varphi = 0$, т.е. световые волны не претерпевают спектрального изменения.

---

95. Имеются две дифракционные решётки имеющие $N_1 = 50$ штрихов и $N_2 = 100$ штрихов на 1 мм. Какая из них даст на экране более широкий спектр при прочих равных условиях?

Решение

1. Ширина спектра дифракционной решётки определяется её периодом:

$$\left.\begin{aligned} d_1 \sin\varphi = \frac{1}{N_1}\sin\varphi = m\lambda_1; \\ d_2 \sin\varphi = \frac{1}{N_2}\sin\varphi = m\lambda_2; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{N_2}{N_1} = 2,$$

вторая дифракционная решётка при прочих равных условиях даст в два раза более широкий спектр.

---

96. На узкую щель шириной $a = 20$ мкм нормально падает параллельный пучок света ($\lambda = 500$ нм). Найти ширину A изображения щели на экране, удалённом от неё на расстояние $L = 1$ м. В качестве ширины изображения принять расстояние между первыми дифракционными минимумами, по обе стороны от главного максимума освещённости.

Решение

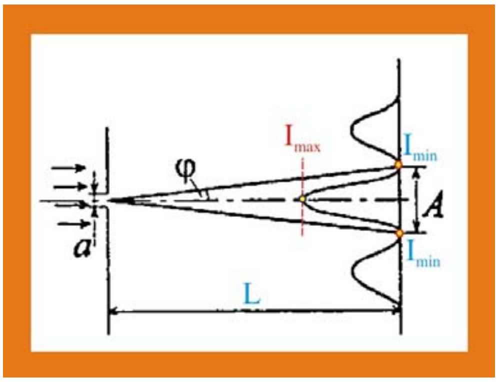


Рис. 96. Дифракция на щели

1. Как видно из рис. 96

$$\frac{A}{2} = L\operatorname{tg}\varphi;$$

2. При достаточной малости угла φ, а этому есть основания при сравнении a и L, можно тангенс заменить синусом

$$\operatorname{tg}\varphi \cong \sin\varphi; \quad \Rightarrow \quad A = 2L\sin\varphi;$$

3. Запишем условие максимума интенсивности I_{max} и выразим sinφ при m = 1

$$a\sin\varphi = m\lambda; \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi = \frac{A}{2L};$$

4. С другой стороны:

$$\sin\varphi = \frac{\lambda}{a}; \quad \Rightarrow \quad A = \frac{2L\lambda}{a} \cong 0{,}05\ \text{м};$$

---

98. На щель шириной a = 6λ нормально падает параллельный световой монохроматический поток с длиной волны λ. Под каким углом φ наблюдается третий дифракционный минимум?

Решение

1. Запишем условие максимума интенсивности I_{max}

$$a\sin\varphi = m\lambda;$$

2. Из условия задачи известно, что:

$$a = 6\lambda; \quad m = 3;$$

3. Перепишем условие максимума

$$6\lambda\sin\varphi = 3\lambda; \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arcsin 0{,}5 = 30^0;$$

---

99. Определить постоянную дифракционной решётки, если на её длине a = 2,5 см нанесено N = 12500 штрихов.

Решение

1. Число штрихов на единицу длины решётки рано периоду этой решётки, который часто называют постоянной решётки d:

$$d = \frac{a}{N} = \frac{2{,}5\cdot 10^{-2}}{12500} = 2\cdot 10^{-6}\text{м};$$

---

100. На дифракционную решётку с периодом d = 4 мкм падает нормальный монохроматический свет. Максимуму четвёртого порядка (m = 4) соответствует отклонение луча от первоначального направления φ = 30^0. Определить длину волны падающего на решётку света.

Решение

1. Из уравнения дифракционной решётки:

$$d\sin\varphi = m\lambda; \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{d\sin\varphi}{m} = \frac{4\cdot 10^{-6}\cdot 0{,}5}{4} = 500\text{нм};$$

---

101. Дифракционная решётка содержит N = 500 штрихов на ℓ = 1 мм. На решётку падает свет с длиной волны λ = 500 нм. Под каким углом виден первый дифракционный максимум?

Решение

1. Постоянная дифракционной решётки:

$$d = \frac{\ell}{N} = \frac{1\cdot 10^{-3}}{500} = 2\cdot 10^{-6}\,\text{м};$$

2. Из уравнения дифракционной решётки:

$$d\sin\varphi = m\lambda; \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arcsin\left(\frac{m\lambda}{d}\right); \quad m = 1; \quad \varphi = \arcsin\left(\frac{\lambda}{d}\right);$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{5\cdot 10^{-7}}{2\cdot 10^{-6}}\right) \approx \arcsin 0{,}25 = 14{,}5^0$$

---

102. Длина воны красной линии кадмия λ = 643,8 нм. Каков угол отклонения луча в спектре первого порядка (m = 1), если дифракционная решётка имеет N = 5684 штриха на ℓ = 1 см?

Решение

1. Постоянная дифракционной решётки:

$$d = \frac{\ell}{N} = \frac{1\cdot 10^{-2}}{5684} = 1{,}76\cdot 10^{-6}\,\text{м};$$

2. Из уравнения дифракционной решётки:

$$d\sin\varphi = m\lambda; \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arcsin\left(\frac{m\lambda}{d}\right); \quad m = 1; \quad \varphi = \arcsin\left(\frac{\lambda}{d}\right);$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{6{,}438\cdot 10^{-7}}{1{,}76\cdot 10^{-6}}\right) \approx \arcsin 0{,}366 = 21{,}5^0$$

---

103. Дифракционная решётка содержит N = 120 штрихов на ℓ = 1 мм. Найти длину волны монохроматического света, падающего на решётку, если угол между лучами, формирующими два максимума первого порядка (m = 1) составляет $\psi = 8^0$.

Решение

1. Постоянная дифракционной решётки:

$$d = \frac{\ell}{N} = \frac{1\cdot 10^{-3}}{120} = 8{,}33\cdot 10^{-6}\,\text{м};$$

2. Из уравнения дифракционной решётки:

$$d\sin\varphi = d\sin\frac{\psi}{2} = m\lambda; \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{d\sin\varphi}{m}; \quad m = 1; \quad \lambda = d\sin\varphi;$$

$$\lambda = 8{,}33\cdot 10^{-6}\sin 4^0 = 5{,}81\cdot 10^{-7}\text{м};$$

---

104. При нормальном падении сетевого пучка на дифракционную решётку максимуму второго порядка (m_1 = 2) для волны с λ_1 = 0,65 мкм соответствует угол $\varphi_1 = 45^0$. Определить угол, соответствующий максимуму третьего порядка (m_2 = 3) для световой волны с λ_2 = 0,5 мкм.

Решение

1. Система уравнений дифракционной решётки, соответствующая заданным условиям:

$$\left.\begin{aligned} d\sin\varphi_1 &= m_1\lambda_1; \\ d\sin\varphi_2 &= m_2\lambda_2; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \sin\varphi_2 = \frac{\sin\varphi_1 m_2\lambda_2}{m_1\lambda_1}; \quad \varphi_2 = \arcsin\left(\frac{\sin\varphi_1 m_2\lambda_2}{m_1\lambda_1}\right);$$

$$\varphi_2 = \arcsin\left(\frac{\sin 45^0\cdot 3\cdot 5\cdot 10^{-7}}{2\cdot 6{,}5\cdot 10^{-7}}\right) \approx 54{,}7^0;$$

---

105. Определить длину волны линии в дифракционном спектре второго порядка ($m_1 = 2$), совпадающей с линией спектра третьего порядка ($m_2 = 3$), у которого длина волны $\lambda_2 = 400$ нм.

Решение

1. Система уравнений дифракционной решётки, соответствующая заданным условиям:

$$\left.\begin{aligned} d\sin\varphi &= m_1\lambda_1; \\ d\sin\varphi &= m_2\lambda_2; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad m_1\lambda_1 = m_2\lambda_2; \quad \lambda_1 = \frac{m_2\lambda_2}{m_1};$$

$$\lambda_1 = \frac{3\cdot 4\cdot 10^{-7}}{2} = 6\cdot 10^{-7}\,\text{м};$$

---

106. Период дифракционной решётки d = 3 мкм. Найти наибольший порядок для спектра жёлтого света с длиной волны λ = 580 нм.

Решение

1. Из уравнения дифракционной решётки:

$$d\sin\varphi_{max} = m_{nax}\lambda; \quad \Rightarrow \quad m_{max} = \frac{d\sin\varphi_{max}}{\lambda};$$

$$m_{max} = \frac{d\sin 90^0}{\lambda} = \frac{d}{\lambda} = \frac{3\cdot 10^{-6}}{5{,}8\cdot 10^{-7}} = 5{,}17;$$

2. Поскольку порядок спектра должен выражаться целям числом, то в данном случае принимается $m_{max} = 5$.

---

107. Определить наибольший порядок спектра, который может давать дифракционная решётка, имеющая N = 500 штрихов на ℓ = 1 мм, если длина волны падающего света λ = 590 нм. Какую наибольшую длину волны можно наблюдать в спектре этой решётки?

Решение

1. Постоянная дифракционной решётки:

$$d = \frac{\ell}{N} = \frac{1\cdot 10^{-3}}{500} = 2\cdot 10^{-6}\,\text{м};$$

2. Из уравнения дифракционной решётки:

$$d\sin\varphi_{max} = m_{nax}\lambda; \quad \Rightarrow \quad m_{max} = \frac{d\sin\varphi_{max}}{\lambda};$$

$$m_{max} = \frac{d\sin 90^0}{\lambda} = \frac{d}{\lambda} = \frac{2\cdot 10^{-6}}{5{,}9\cdot 10^{-7}} = 3{,}39;$$

3. Поскольку порядок спектра должен выражаться целям числом, то в данном случае принимается $m_{max} = 3$.

4. Наибольшая длина волны:

$$d\sin\varphi_{max} = m_{maa}\lambda_{max}; \quad \Rightarrow \quad \lambda_{max} = \frac{d}{m_{max}} = 6{,}67\cdot 10^{-7}\,м;$$

---

108. Монохроматический свет с длиной волны λ = 0,6 мкм падает нормально на дифракционную решётку, содержащую N = 400 штрихов на ℓ = 1 мм. Найти число ξ дифракционных максимумов, которое даёт эта решётка.

Решение

1. Постоянная дифракционной решётки:

$$d = \frac{\ell}{N} = \frac{1\cdot 10^{-3}}{400} = 2{,}5\cdot 10^{-6}\,м;$$

2. Из уравнения дифракционной решётки:

$$d\sin\varphi_{max} = m_{nax}\lambda; \quad \Rightarrow \quad m_{max} = \frac{d\sin\varphi_{max}}{\lambda};$$

$$m_{max} = \frac{d\sin 90^0}{\lambda} = \frac{d}{\lambda} = \frac{2{,}5\cdot 10^{-6}}{6\cdot 10^{-7}} = 4{,}17;$$

3. Поскольку порядок спектра должен выражаться целям числом, то в данном случае принимается $m_{max} = 4$.

4. Дифракционные максимумы наблюдаются по обе стороны от оптической оси, поэтому $\xi = 2\, m_{max} = 8$.

---

109. Световая волна с длиной λ = 530 нм падает нормально на дифракционную решётку, постоянная которой составляет d = 1,8 мкм. Определить угол дифракции, под которым образуется максимум наибольшего порядка.

Решение

1. Максимальный порядок спектра:

$$d\sin\varphi_{max} = m_{nax}\lambda; \quad \Rightarrow \quad m_{max} = \frac{d\sin\varphi_{max}}{\lambda};$$

$$m_{max} = \frac{d\sin 90^0}{\lambda} = \frac{d}{\lambda} = \frac{1{,}8\cdot 10^{-6}}{6\cdot 10^{-7}} = 3{,}4;$$

2. Поскольку порядок спектра должен выражаться целям числом, то в данном случае принимается $m_{max} = 3$.

3. Дифракционный угол для $m_{max} = 3$:

$$d\sin\varphi = 3\lambda; \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arcsin\left(\frac{3\lambda}{d}\right) = \arcsin\left(\frac{3\cdot 5{,}3\cdot 10^{-7}}{1{,}8\cdot 10^{-6}}\right) = \arcsin 0{,}883 = 62^0;$$

---

110. При помощи дифракционной решётки с периодом d = 0,02 мм на экране, находящимся на расстоянии X = 1,8 м от решётки, получена дифракционная картина, у которой первый максимум (m =1) находится на удалении Y = 3,6 см от центрального. Найти длину падающей световой волны.

Решение

1. Угол, под которым наблюдается первый максимум:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{Y}{X}; \quad \varphi = \mathrm{arctg}\frac{Y}{X} = \mathrm{arctg}\left(\frac{3{,}6\cdot 10^{-2}}{1{,}8}\right) \approx 1{,}15^0;$$

2. Из уравнения дифракционной решётки:

$$d\sin\varphi = m\lambda; \quad \lambda = d\sin\varphi = 4\cdot 10^{-7}\,\text{м};$$

---

111. Найти период дифракционной решётки, если для света с длиной волны λ = 486 нм получен дифракционный максимум первого порядка (m = 1) на расстоянии Y = 2,43 см от центрального. Расстояние от решётки до экрана X = 1 м.

Решение

1. Угол, под которым наблюдается первый максимум:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{Y}{X}; \quad \varphi = \mathrm{arctg}\frac{Y}{X} = \mathrm{arctg}\left(\frac{2{,}43\cdot 10^{-2}}{1}\right) \approx 1{,}39^0;$$

2. Из уравнения дифракционной решётки:

$$d\sin\varphi = m\lambda; \quad d = \frac{m\lambda}{\sin\varphi} = \frac{1\cdot 4{,}86\cdot 10^{-7}}{2{,}43\cdot 10^{-2}} \approx 2\cdot 10^{-6}\,\text{м};$$

---

112. Для определения периода дифракционной решётки не неё направили свет через красный светофильтр, пропускающий лучи с длиной волны λ = 0,76 мкм. Каков период решётки, если на экране, отстоящем на расстоянии от решётки X = 1 м, промежуток между спектрами первого порядка (m = 1) составил Y = 15,2 см?

Решение

1. Угол, под которым наблюдается первый максимум:

$$\mathrm{tg}\psi = \frac{Y}{X}; \quad \psi = \mathrm{arctg}\frac{Y}{X} = \mathrm{arctg}\left(\frac{15{,}2\cdot 10^{-2}}{1}\right) \approx 8{,}64^0;$$

2. Из уравнения дифракционной решётки:

$$d\sin\frac{\psi}{2} = m\lambda; \quad d = \frac{m\lambda}{\sin 4{,}32^0} = \frac{1\cdot 7{,}6\cdot 10^{-7}}{7{,}53\cdot 10^{-2}} \approx 1{,}01\cdot 10^{-5}\,\text{м};$$

---

113. Какова ширина всего спектра первого порядка (m = 1) для длин волн от λ_{min} =3,8·10^{-7} м до λ_{max} = 7,6·10^{-7} м, полученного на экране, отстоящем на X = 3 м от дифракционной решётки с периодом d = 0,01 м?

Решение

1. Углы, под которыми видны крайние максимумы первого порядка:

$$d\sin\varphi = m\lambda; \quad \varphi = \arcsin\frac{\lambda}{d};$$

$$\varphi_{min} = \arcsin\frac{\lambda_{min}}{d} = \arcsin\frac{3{,}8\cdot 10^{-7}}{1\cdot 10^{-5}} \approx 2{,}18^0;$$

$$\varphi_{max} = \arcsin\frac{\lambda_{max}}{d} = \arcsin\frac{7{,}6\cdot 10^{-7}}{1\cdot 10^{-5}} \approx 4{,}36^0;$$

2. Разность углов:

$$\Delta\varphi = \varphi_{max} - \varphi_{min} = 2{,}18^0;$$

3. Геометрическая ширина спектра на экране:

$$Y = X\mathrm{tg}\Delta\varphi = 3\cdot 3{,}18\cdot 10^{-2} \approx 0{,}114\text{м};$$

---

114. Дифракционная решётка, на каждом миллиметре которой (ℓ = 1 мм) нанесено N = 75 штрихов, освещается монохроматическим светом с длиной волны λ = 500 нм. На экране, параллельном решётке видна интерференционная картина: расстояние от центральной светлой полосы до второй полосы (m = 2) равно Y = 11,25 см. Определить расстояние от экрана до решётки X.

Решение

1. Постоянная дифракционной решётки:

$$d = \frac{\ell}{N} = \frac{1\cdot 10^{-3}}{75} = 1{,}33\cdot 10^{-5}\text{м};$$

2. Дифракционный угол:

$$d\sin\varphi = 2\lambda; \quad \varphi = \arcsin\frac{2\lambda}{d} = \arcsin\frac{2\cdot 5\cdot 10^{-7}}{1{,}33\cdot 10^{-5}} \approx 4{,}31^0;$$

3. Расстояние от решётки до экрана:

$$X = \frac{Y}{\mathrm{tg}\varphi} = \frac{0{,}1125}{7{,}54\cdot 10^{-2}} \approx 1{,}49\text{м};$$

---

115. На каком расстоянии от дифракционной решётки X нужно поставить экран, чтобы расстояние между центральной полосой и спектром четвёртого порядка (m = 4) было равно Y = 50 мм для света с длиной волны λ = 500 нм? Постоянная решётки равна d = 0,02 мм.

Решение

1. Дифракционный угол:

$$d\sin\varphi = 4\lambda; \quad \varphi = \arcsin\frac{4\lambda}{d} = \arcsin\frac{4\cdot 5\cdot 10^{-7}}{2\cdot 10^{-5}} \approx 5{,}74^0;$$

2. Расстояние от решётки до экрана:

$$X = \frac{Y}{\mathrm{tg}\varphi} = \frac{0{,}05}{0{,}1} \approx 0{,}5\text{м};$$

---

116. На дифракционную решётку нормально падает пучок света. Для наблюдения красной линии с λ = 700 нм в спектре второго порядка, зрительную трубу пришлось установить под углом $\varphi = 30^0$ к оси коллиматора. Определить постоянную дифракционной решётки и количество штрихов, нанесённых на единицу длины.

Решение

1. Уравнение плоской дифракционной решётки:

$$d\sin\varphi = m\lambda,$$

по условию задачи m = 2, поэтому:

$$d\sin\varphi = 2\lambda, \quad \Rightarrow \quad d = \frac{2\lambda}{\sin\varphi} = \frac{2\cdot 7\cdot 10^{-7}}{0,5} = 2,8\text{мкм};$$

2. Количество штрихов, нанесённых на единицу длины решётки связно с её периодом, отношением:

$$d = \frac{1}{N_0}; \quad \Rightarrow \quad N_0 = \frac{1}{d} = \frac{1}{2,8\cdot 10^{-6}} = 357\cdot 10^3\,\text{м}^{-1};$$

---

117. Какое число штрихов N_0 на единицу длины имеет дифракционная решётка, если зелёная линия ртути с λ = 546,1 нм в спектре первого порядка (m = 1) наблюдается под углом $\varphi = 19^0 8^*$?

Решение

1. Уравнение плоской дифракционной решётки:

$$d\sin\varphi = m\lambda,$$

по условию задачи m = 1, поэтому:

$$d\sin\varphi = \lambda, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{N_0} = \frac{\lambda}{\sin\varphi}; \quad N_0 = \frac{\sin\varphi}{\lambda} \approx \frac{\sin 19,133^0}{9,461\cdot 10^{-7}} \approx 600\text{нм};$$

---

118. На дифракционную решётку нормально падает луч света. Натриевая линия λ_1 = 598 нм даёт в спектре первого порядка (m = 1) угол дифракции $\varphi_1 = 17^0 8^*$. Некоторая линия в спектре второго (m = 2) порядка дифракции наблюдается при $\varphi_2 = 24^0 12^*$. Определить длину волны λ_2 этой линии и число штрихов N_0 на единицу длины решётки.

Решение

1. Составим систему уравнений из которой определим неизвестную дину волны λ_2:

$$\left.\begin{aligned} d\sin\varphi_1 &= \lambda_1; \\ d\sin\varphi_2 &= 2\lambda_2; \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}; \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_1\sin\varphi_2}{2\sin\varphi_1};$$

$$\lambda_2 = \frac{5,89\cdot 10^{-7}\cdot\sin 17,133^0}{2\cdot\sin 24,2^0} \approx \frac{5,89\cdot 10^{-7}\cdot 0,41}{2\cdot 0,595} \approx 409\text{нм};$$

2. Число штрихов решётки на единицу длины:

$$N_0 = \frac{1}{d} = \frac{\sin\varphi_1}{\lambda_1} \approx \frac{0,595}{5,89\cdot 10^{-7}} \approx 505\cdot 10^5\,\frac{1}{\text{м}} \equiv 505\,\frac{1}{\text{мм}};$$

---

119. На дифракционную решётку нормально падает пучок света от газоразрядной трубки. Какова должна быть постоянная дифракционной решётки d, чтобы в направлении $\varphi = 41^0$ совпадали максимумы линий λ_1 = 656,3 нм и λ_2 = 410,2 нм?

Решение

1. Порядки спектров, наблюдаемых при заданных условиях:

$$\left.\begin{aligned} d\sin\varphi = m_1\lambda_1; \\ d\sin\varphi = m_2\lambda_2; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad m_1\lambda_1 = m_2\lambda_2; \quad \frac{m_2}{m_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1{,}6; \quad \Rightarrow \quad m_1 = 5; \quad m_2 = 8;$$

2. Постоянная дифракционной решётки из первого уравнения системы:

$$d = \frac{m_1\lambda_1}{\sin\varphi} = \frac{5\cdot 6{,}563\cdot 10^{-7}}{0{,}656} \approx 5\cdot 10^{8}\,\frac{1}{м};$$

---

120. На дифракционную решётку нормально падает пучок света. При повороте зрительной трубы на некоторый угол φ в поле зрения попадает спектральная составляющая с λ_1 = 440 нм в спектре третьего порядка (m_1 = 3). Будут ли видны под этим же углом φ другие спектральные линии, соответствующие длинам волн видимого диапазона (400 – 700 нм)?

Решение

1. Из уравнения дифракционной решётки:

$$d\sin\varphi = m_1\lambda_1; \quad d\sin\varphi = 3\lambda_1; \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi = \frac{3\lambda_1}{d};$$

$$d\sin\varphi = m_2\lambda_2; \quad \Rightarrow \quad m_1\lambda_1 = m_2\lambda_2; \quad \lambda_2 = \frac{m_1}{m_2}\lambda_1;$$

2. При m_2 = 1:

$$\lambda_{2(m=1)} = 3\lambda_1 = 3\cdot 4{,}4\cdot 10^{-7} = 1320нм;$$

Эта спектральная составляющая лежит за пределами видимого диапазона.

3. При m_2 = 2:

$$\lambda_{2(m=2)} = \frac{3}{2}\lambda_1 = 3\cdot 4{,}4\cdot 10^{-7} = 660нм;$$

Составляющая попадает в видимый диапазон.

4. При m = 3:

$$\lambda_{2(m=3)} = \frac{3}{3}\lambda_1 = 4{,}4\cdot 10^{-7}м \equiv 440нм;$$

5. При m = 4:

$$\lambda_{2(m=4)} = \frac{3}{4}\lambda_1 = 0{,}75\cdot 4{,}4\cdot 10^{-7}м \equiv 330нм;$$

Эта спектральная составляющая лежит за пределами видимого диапазона.

6. искомая длина волны с λ_2 = 660 нм будет видна в спектре второго порядка.

---

121. На дифракционную решётку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной гелием. На какую линию λ_2 в спектре третьего порядка (m_2 = 3) накладывается красная линия с λ_1 = 670 нм спектра второго порядка (m_1 = 2)?

Решение

1. Составим систему уравнений дифракционной решётки для λ_1 и λ_2:

$$\left.\begin{aligned} d\sin\varphi = m_1\lambda_1; \\ d\sin\varphi = m_2\lambda_2; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \lambda_2 = \frac{m_1}{m_2}\lambda_1 = \frac{2}{3}\lambda_1 = 0{,}667\cdot 6{,}7\cdot 10^{-7} \approx 447нм,$$

что соответствует синей линии спектра гелия.

---

122. На дифракционную решётку нормально падает свет от газоразрядной трубки, заполненной гелием, в виде параллельного пучка. Первоначально зрительная труба устанавливается на фиолетовые линии $\lambda_{Ф1}$ = 389 нм по обе стороны от центральной полосы в спектре первого порядка (m_1 = 1). Отсчёты по лимбу вправо от нулевого уровня дали результаты: $\varphi_{Ф1} = 27^0 33\lambda^*$; $\varphi_{Ф2} = 36^0 27^*$. После этого зрительная труба устанавливается на красные линии по обе стороны от центральной полосы в спектре первого порядка (m_2 = 1). Отсчёты по лимбу показали, что: $\varphi_{К1} = 23^0 54^*$; $\varphi_{К2} = 40^0 6^*$. Определить длину волны красной линии в спектре гелия.

Решение

1. Система уравнений дифракционной решётки для заданных условий наблюдения спектра испускания гелия:

$$\left.\begin{aligned} d\sin\left(\frac{\varphi_{Ф2}-\varphi_{Ф1}}{2}\right) = \lambda_Ф; \\ d\sin\left(\frac{\varphi_{К2}-\varphi_{К1}}{2}\right) = \lambda_К; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \sin\left(\frac{\varphi_{Ф2}-\varphi_{Ф1}}{2}\right)\lambda_К = \sin\left(\frac{\varphi_{К2}-\varphi_{К1}}{2}\right)\lambda_Ф;$$

$$\lambda_К = \frac{\lambda_Ф \sin\left(\frac{\varphi_{К2}-\varphi_{К1}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi_{Ф2}-\varphi_{Ф1}}{2}\right)} \approx \frac{3{,}89\cdot 10^{-7}\sin\left(\frac{40{,}1^0 - 23{,}9^0}{2}\right)}{\sin\left(\frac{36{,}45^0 - 27{,}55}{2}\right)};$$

$$\lambda_К = \frac{3{,}89\cdot 10^{-7}\cdot \sin 16{,}2^0}{\sin 8{,}9^0} \approx \frac{1{,}09\cdot 10^{-7}}{0{,}155} \approx 703\text{нм};$$

---

123. Определить наибольший порядок m спектра для жёлтой линии натрия λ = 589 нм, если постоянная дифракционной решётки d = 2 мкм.

Решение

1. На основании уравнения дифракционной решётки:

$$d\sin\varphi = m\lambda; \quad \Rightarrow \quad m = \frac{d\sin\varphi}{\lambda};$$

$$\sin\varphi \le 1; \quad m \le \frac{d}{\lambda} \le \frac{2\cdot 10^{-6}}{5{,}89\cdot 10^{-7}} \approx 3{,}4; \quad m_{max} = 3;$$

---

124. На дифракционную решётку нормально падает пучок монохроматического света. Максимум третьего порядка (m = 3) наблюдается под углом $\varphi = 36^0 48^*$ к нормали. Определить постоянную d решётки, выраженную в длинах волн падающего света.

Решение

1. Из уравнения дифракционной решётки:

$$d\sin\varphi = m\lambda; \quad m = 3; \quad d\sin\varphi = 3\lambda;$$

$$\frac{d}{\lambda} = \frac{3}{\sin\varphi} \approx \frac{3}{\sin 36^0 8^*} \approx 5; \quad \Rightarrow \quad d \approx 5\lambda;$$

---

125. Какое число максимумов m, не считая центрального, даёт дифракционная решётка d = 5λ?

Решение

1. Из уравнения дифракционной решётки:

$$5\lambda\sin\varphi = m\lambda; \quad m_{max} = \frac{5}{\sin\varphi_{max}} = 5;$$

2. По обе стороны от центрального максимума:

$$m = 2m_{max} = 10;$$

---

126. Какова должна быть постоянная дифракционной решётки d, чтобы в первом порядке (m = 1) были разрешены линии спектра калия λ_1 = 404,4 нм и λ_2 = 404,7 нм? ширина дифракционной решётки a = 3 см.

Решение

1. Разрешающая способность решётки:

$$\frac{\lambda_1}{\Delta\lambda} = mN; \quad m = 1; \quad \Rightarrow \quad N = \frac{a}{d} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1};$$

$$d = \frac{a(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1} = \frac{3\cdot 10^{-2}\cdot 0{,}3\cdot 10^{-8}}{4{,}047\cdot 10^{-7}} \approx 0{,}22\text{мм};$$

---

127. Какова должна быть постоянная дифракционной решётки, чтобы в первом порядке (m = 1) был разрешен дублет натрия λ_1 = 589 нм и λ_2 = 589,6 нм, при ширине решётки a = 2,5 см?

Решение

1. Разрешающая способность решётки:

$$\frac{\lambda_1}{\Delta\lambda} = mN; \quad m = 1; \quad \Rightarrow \quad N = \frac{a}{d} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1};$$

$$d = \frac{a(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1} = \frac{2{,}5\cdot 10^{-2}\cdot 0{,}6\cdot 10^{-7}}{5{,}89\cdot 10^{-7}} \approx 2{,}55\cdot 10^{-3}\text{м};$$

---

128. Зрительная труба гониометра с дифракционной решёткой поставлена под углом φ = 20^0 к оси коллиматора. При этом в поле зрения трубы видна красная линия спектра гелия с $\lambda_К$ = 668 нм. Какова постоянная решётки если под тем же углом видна и синяя линия с $\lambda_С$ = 447 нм более высокого порядка. Наибольший порядок спектра, который даёт решётка m_m = 5. Свет падает на решётку нормально.

Решение

1. Система уравнений для наблюдаемых спектральных линий:

$$\left.\begin{aligned} d\sin\varphi = m_1\lambda_К; \\ d\sin\varphi = m_2\lambda_С; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{m_2}{m_1} = \frac{\lambda_К}{\lambda_С} = \frac{668}{447} \approx 1{,}49;$$

2. Значение порядка спектра должны выражаться целыми числами, поэтому:

$$m_1 = 2; \quad m_2 = 3;$$

3. Постоянная дифракционной решётки:

$$d = \frac{m_1 \lambda_K}{\sin\varphi} = \frac{2 \cdot 6{,}68 \cdot 10^{-7}}{0{,}342} \approx 3{,}91 \cdot 10^{-6}\,\text{м};$$

---

129. Постоянная дифракционной решётки d = 2 мкм. Какую разность длин волн $\Delta\lambda$ может разрешить эта решётка в области лучей с длиной волны λ = 600 нм в спектре второго порядка (m = 2) при ширине решётки a = 2,5 см?

Решение

$$\frac{\lambda_1}{\Delta\lambda} = mN; \quad m = 2; \quad \Rightarrow \quad N = \frac{a}{d} = \frac{\lambda_1}{\Delta\lambda};$$

$$\Delta\lambda = \frac{d\lambda_1}{a} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 6 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2}} \approx 2{,}4 \cdot 10^{-12}\,\text{м};$$

---

130 На дифракционную решётку нормально падает поток белого света. Чтобы увидеть красную линию (λ = 700 нм) второго порядка зрительную трубу пришлось устанавливать под углом Θ = 30^o к оси коллиматора. Найти постоянную дифракционной решетки d и количество штрихов N_0, приходящихся на единицу длины.

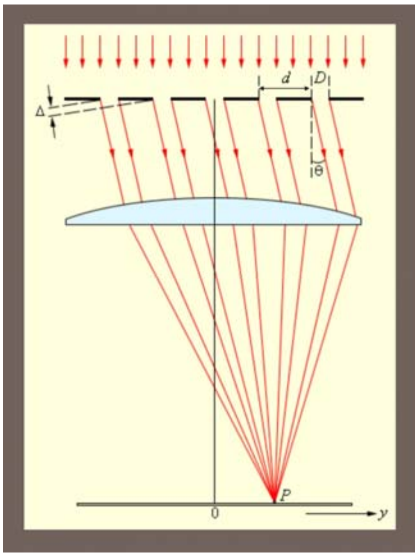


Рис. 130. Дифракционная решётка

Решение

1. Запишем формулу дифракционной решётки

$$d\sin\varphi = k\lambda;$$

2. Определим период решётки для k =2

$$d = \frac{2\lambda}{\sin\varphi} \cong 2{,}8 \cdot 10^{-6}\,\text{м};$$

3. Количество штрихов, приходящихся на единицу длины

$$N_0 = \frac{1}{d} \cong 3{,}57 \cdot 10^5\,\frac{1}{\text{м}};$$

---

131. Какое число штрихов N_0 на единицу длины имеет дифракционная решётка, если зелёная линия ртути (λ = 546,1 нм) в спектре первого порядка наблюдается под углом φ = 19^{o}8$'$?

Решение

1. Запишем уравнение дифракционной решётки:

$$d\sin\varphi = m\lambda;$$

2. Перепишем формулу с учётом взаимосвязи периода решётки d и числа штрихов, приходящихся на единицу длины:

$$N_0 = \frac{1}{d}; \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin\varphi}{N_0} = m\lambda,$$

откуда величина N_0 определится как?

$$N_0 = \frac{\sin\varphi}{m\lambda} \cong 600\frac{1}{мм};$$

132. Свет от монохроматического источника (λ = 600 нм) падает нормально на диафрагму с отверстием диаметром d = 6 мм. За диафрагмой на расстоянии x = 3 м от неё находится экран. Какое число зон Френеля укладывается в отверстие диафрагмы? Каким будет центр дифракционной картинки на экране: тёмным или светлым?

Решение

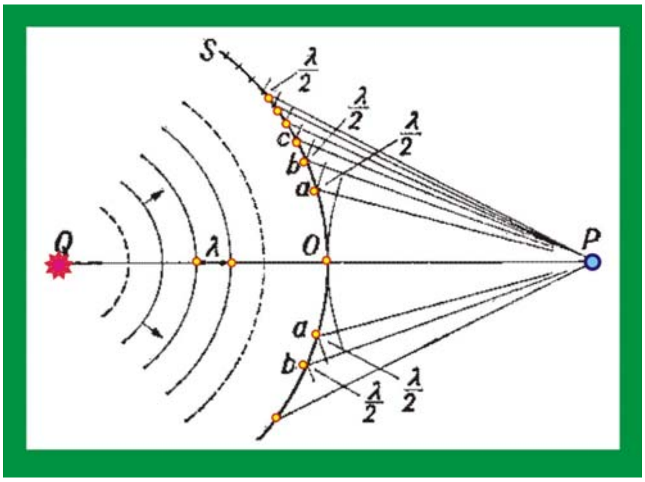


Рис. 132. Зоны Френеля

1. Зонами Френеля называются участки, на которые можно разбить поверхность световой волны для вычисления результатов дифракции света.

2. Впервые этот метод применил О. Френель в 1815 –1819 гг. Суть метода такова. Пусть от светящейся точки Q (рис. 132) распространяется сферическая волна и требуется определить характеристики волнового процесса, вызванного ею в точке P.

3. Разделим поверхность волны S на кольцевые зоны; для этого проведём из точки P сферы радиусами

$$PO,\ Pa = PO + \lambda/2;\ \ Pb = Pa + \lambda/2,\ \ Pc = Pb + \lambda/2,$$

Где O — точка пересечения поверхности волны с линией PQ; λ – длина световой волны.

4. Кольцеобразные участки поверхности волны, «вырезаемые» из неё этими сферами, и называется зонами Френеля.

5. Волновой процесс в точке P можно рассматривать как результат сложения колебаний, вызываемых в этой точке каждой зоной Френеля в отдельности. Амплитуда таких колебаний медленно убывает с возрастанием номера зоны (отсчитываемого от точки O), а фазы колебаний, вызываемых в P смежными зонами, противоположны. Поэтому волны, приходящие в P от двух смежных зон, гасят друг друга, а действие зон, следующих через одну, складывается.

6. Если волна распространяется, не встречая препятствий, то, как показывает расчёт, её действие эквивалентно действию половины первой зоны. Если же при помощи экрана с прозрачными концентрическими участками выделить части волны, соответствующие, например, N нечётным зонам Френеля, то действие всех выделенных зон сложится и амплитуда колебаний в точке P возрастёт.

7. Предположим, что в отверстии диафрагмы укладывается k зон Френеля, тогда радиус k – й зоны будет равен радиусу диафрагмы

$$r_k = \frac{d}{2} = \sqrt{xk\lambda};\quad \Rightarrow \quad k = \frac{d^2}{4x\lambda} = 5;$$

8. Так как число открытых зон Френеля нечётно, то центр дифракционной картинки будет светлым.

133. Найти радиусы r_k первых пяти зон Френеля, если расстояние от источника света до волновой поверхности a = 1 м, расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения b = 1 м. Длина волны света λ = 500 нм.

Решение

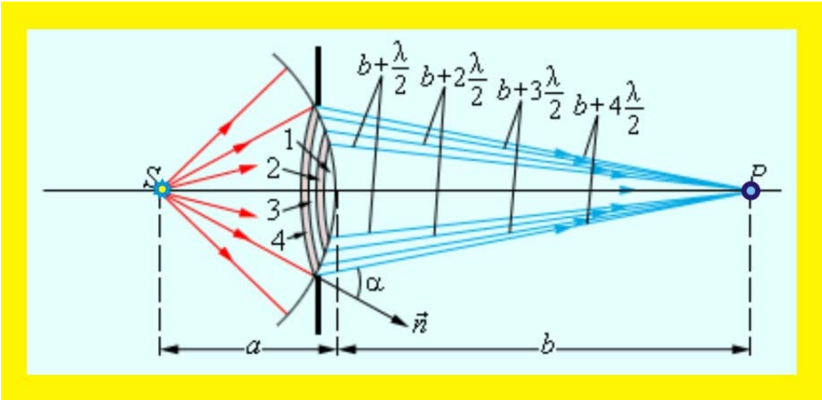


Рис. 133. Радиусы зон Френеля

1. Радиус внешней границы k зоны Френеля для сферической волны определится как:

$$r_k = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda};$$

$$r_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 5\cdot 10^{-7}} = 5\cdot 10^{-4}\text{м};$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 5\cdot 10^{-7}} = 7{,}1\cdot 10^{-4}\text{м};$$

$$r_3 = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\cdot 10^{-7}} = 8{,}6\cdot 10^{-4}\text{м};$$

$$r_4 = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot 10^{-7}} = 1\cdot 10^{-3}\text{м};$$

$$r_5 = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot 10^{-7}} = 1{,}12\cdot 10^{-3}\text{м};$$

---

134. Найти радиусы r_k первых трёх зон Френеля для плоской волны, если расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения b = 1 м, а длина световой волны λ = 500 нм.

Решение

1. Для плоской волны радиус k зоны Френеля определяется по формуле

$$r_k = \sqrt{bk\lambda},$$

Откуда следует, что

$$r_1 = \sqrt{1\cdot 1\cdot 5\cdot 10^{-7}} \cong 7\cdot 10^{-4}\text{м}; \quad r_2 \cong 1\cdot 10^{-3}\ \text{м}; \quad r_3 \cong 1{,}22\cdot 10^{-3}\text{м};$$

---

135. Дифракционная картинка наблюдается на расстоянии L от точечного источника монохроматического света (λ = 600 нм). На расстоянии a = 0,5L от источника помещена круглая непрозрачная преграда диаметром D = 1 см. Найти расстояние L, если преграда закрывает только центральную зону Френеля.

Решение

1. Радиус центральной зоны Френеля определяется уравнением

$$r_1 = \sqrt{\frac{ab}{a+b}\lambda}\,;$$

2. Из условия задачи:

$$r_1 = \frac{d}{2}; \quad a+b=L; \quad a=b=0{,}5L\,;$$

3. Подставим записанные выше соотношения в уравнение радиуса r_1

$$r_1 = \frac{d}{2} = 0{,}5\sqrt{L\lambda}; \quad \Rightarrow \quad L = \frac{d^2}{\lambda} \cong 167\text{ м}\,;$$

---

136. На диафрагму с диаметром отверстия D = 1,96 мм нормально падает монохроматический пучок света λ = 600 нм. При каком наибольшем расстоянии L между диафрагмой и экраном в центре дифракционной картинки будет наблюдаться тёмное пятно?

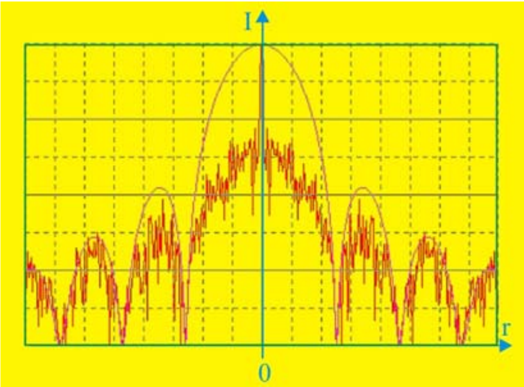


Рис. 136. Зависимость I = f(r) для отверстия

Решение

1. На рис. 136 приведена экспериментальная кривая записи интенсивности световых волн от расстояния до центра картинки, представленный случай соответствуем наличию в центре максимума интенсивности, когда число зон Френеля, укладывающихся в отверстии нечётное.

2. При чётном числе зон Френеля в центре будет минимум интенсивности, т.е. – тёмное пятно. Минимальное количество зон будет равно двум.

3. Радиус диафрагмы, при этом, должен быть равным радиусу второй от центра зоны Френеля

$$\frac{d}{2} = r_2 = \sqrt{2L\lambda}; \quad \Rightarrow \quad L = \frac{d^2}{8\lambda} \cong 0{,}8\text{ м}\,;$$

---

137. На узкую щель шириной a = 20 мкм нормально падает параллельный пучок света (λ = 500 нм). Найти ширину A изображения щели на экране, удалённом от неё на расстояние L = 1 м. В качестве ширины изображения принять расстояние между первыми дифракционными минимумами, по обе стороны от главного максимума освещённости.

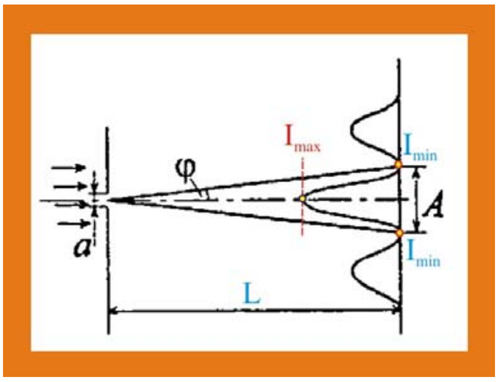


Рис. 137. Дифракция на щели

Решение

1. Как видно из рис. 137

$$\frac{A}{2} = L\operatorname{tg}\varphi\,;$$

2. При достаточной малости угла φ, а этому есть основания при сравнении a и L, можно тангенс заменить синусом

$$\operatorname{tg}\varphi \cong \sin\varphi; \quad \Rightarrow \quad A = 2L\sin\varphi\,;$$

3. Запишем условие максимума интенсивности I_{max} и выразим $\sin\varphi$ при $k = 1$

$$a\sin\varphi = k\lambda; \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi = \frac{A}{2L};$$

4. С другой стороны:

$$\sin\varphi = \frac{\lambda}{a}; \quad \Rightarrow \quad A = \frac{2L\lambda}{a} \cong 0{,}05\ \text{м};$$

---

138. На щель шириной $a = 6\lambda$ нормально падает параллельный световой монохроматический поток с длиной волны λ. Под каким углом φ наблюдается третий дифракционный минимум?

Решение

1. Запишем условие максимума интенсивности I_{max}

$$a\sin\varphi = k\lambda;$$

2. Из условия задачи известно, что:

$$a = 6\lambda; \quad k = 3;$$

3. Перепишем условие максимума

$$6\lambda\sin\varphi = 3\lambda; \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arcsin 0{,}5 = 30^0;$$

---

15. Справочные данные

15.1. Диапазоны электромагнитных излучений

Частота ν, Гц	**Длина волны λ, м**	**Название диапазона**	**Основные методы генерации**
До 10^{3}	Более $3\cdot10^{4}$	Низкочастотные колебания	Генераторы переменного тока
10^{3}	$3\cdot10^{5}$	Радиоволны	Генераторы радиочастот. Генераторы СВЧ
10^{12}	$3\cdot10^{-3}$	Инфракрасное излучение	Излучение молекул и атомов при тепловых и электрических воздействиях
$3{,}8\cdot10^{14}$	$8\cdot10^{-7}$	Видимый свет	
$7{,}5\cdot10^{14}$	$4\cdot10^{-7}$	Ультрафиолетовое излучение и мягкое рентгеновское излучение	Излучение атомов при воздействии ускоренных электронов
$3\cdot10^{17}$	10^{-9}		
$3\cdot10^{20}$	10^{-12}	Жёсткое рентгеновское и мягкое γ - излучение	Атомные процессы при воздействии ускоренных заряженных частиц

15.2. Шкала электромагнитных волн

Диапазон длин волн λ, м	**Диапазон частот ν, Гц**	**Наименование диапазона**	
10^{6} - 10^{4}	$3\cdot10^{2}$ - $3\cdot10^{4}$	Сверхдлинные волны	
10^{4} -10^{3}	$3\cdot10^{4}$ - $3\cdot10^{5}$	Длинные волны	Радиоволны
10^{3} –10^{2}	$3\cdot10^{5}$ - $3\cdot10^{6}$	Средние волны	
10^{2} –10^{1}	$3\cdot10^{6}$ - $3\cdot10^{7}$	Короткие волны	
10^{1} –10^{-1}	$3\cdot10^{7}$ - $3\cdot10^{9}$	Ультракороткие волны	
10^{-1} -10^{-2}	$3\cdot10^{9}$ - $3\cdot10^{10}$	Телевидение	СВЧ
10^{-2} -10^{-3}	$3\cdot10^{10}$ - $3\cdot10^{11}$	Радиолокация	
10^{-3} -10^{-6}	$3\cdot10^{11}$ - $3\cdot10^{14}$	Инфракрасное излучение	
10^{-6} -10^{-7}	$3\cdot10^{14}$ - $3\cdot10^{15}$	Видимый свет	
10^{-7} -10^{-9}	$3\cdot10^{15}$ - $3\cdot10^{17}$	Ультрафиолетовое излучение	
10^{-9} -10^{-12}	$3\cdot10^{17}$ - $3\cdot10^{20}$	Мягкое рентгеновское излучение	
10^{-12} -10^{-14}	$3\cdot10^{20}$ - $3\cdot10^{22}$	Жёсткое гамма - излучение	
$\leq 10^{14}$	$\geq 3\cdot10^{22}$	Космические лучи	

15.3. Показатель преломления (n) газов и паров для жёлтой линии натрия (λ = 589,3 ни)

Вещество	n	Вещество	n
Азот	1,000297	Криптон	1,000427
Аммиак	1,000375	Метан	1,000702
Аргон	1,000284	Неон	1,000441
Ацетилен	1,000606	Пары ртути	1,000933
Водород	1,000138	Пары спирта	1,000586
Водяной пар	1,000252	Пары хлороформа	1,001455
Воздух	1,000427	Сероводород	1,000619
Гелий	1,000035	Фтор	1,000185
Кислород	1,000272	Хлор	1,000768

15.4. Показатель преломления (n) жидкостей

Жидкость	n	Жидкость	n
Анилин	1,586	Раствор сахара в воде (20% - ный)	1,364
Ацетон	1,359	Раствор сахара в воде (80% - ный)	1,490
Бензины	1,38 – 1,41	Серная кислота	1,43
Бензол	1,501	Скипидар	1,460 – 1,478
Вода	1,333	Соляная кислота	1,254
Глицерин	1,474	Спирт метиловый	1,329
Жидкий азот (-195^{0}C)	1,205	Спирт этиловый	1,361
Жидкий кислород (-181^{0}C)	1,221	Толуол	1,497
Касторовое масло	1,48	Трансформаторное масло	1,476-1,488
Льняное масло	1,47	Хлороформ	1,446
Нафталин (100 ^{0}C)	1,582	Эфир	1,354
Подсолнечное масло	1,47	Этилсалецилат	1,523

15.5. Показатель преломления (n) для воды для различных длин волн (λ) светового излучения при температуре 20 ^{0}C

λ, нм	n	λ, нм	n
303,4	1,3581	546,1	1,3345
361,1	1,3474	589,1	1,3330
404,7	1,3428	643,1	1,3314
480,0	1,3374	656,3	1,3311
486,1	1,3371	768,2	1,3289
508,6	1,3360	1256,0	1,3210

15.6. Зависимость показателя преломления (n) от длины волны (λ) светового излучения

λ, нм	Цвет	Среда			
		Стекло (флинт)	Стекло (крон)	Вода при 20 ^{0}С	Каменная соль
656,3	Красный	1,6444	1,5145	1,311	1,5407
589,3	Жёлтый	1,6499	1,5170	1,3330	1,5443
546,1	Зелёный	1,6546	1,5191	1,3345	1,5475
480,0	Синий	1,648	1,5235	1,3374	1,5541
404,7	Фиолетовый	1,6852	1,5318	1,3428	1,5665

15.7. Показатель преломления (n) твёрдых тел при температуре 20 ^{0}С для жёлтой линии натрия (λ = 589,3 нм)

Вещество	n	Вещество	n
Алмаз	2,417	Рубин	1,76
Гранит	1,74 – 1,89	Сахар	1,56
Желатин	1,525	Слюда	1,56 – 1,60
Каменная соль	1,544	Стекло кварцевое	1,458
Кварц	1,544	Стекло обычное	1,48 – 1,53
Корунд	1,769	Стекло оптическое	1,47 – 2,04
Лёд (0 –4 ^{0}С)	1,310	Топаз	1,63
Медь	2,05	Янтарь	1,532
Органическое стекло	1,485 – 1,500	Золото	0,37
Полистирол	1,592	Серебро	0,18

15.8. Предельный угол полного отражения ($\alpha_{пр}$) видимого света

Вещество	$\alpha_{пр}$, град	Вещество	$\alpha_{пр}$, град
Алмаз	25	Стекло обычное	30 – 32
Вода	49	Стекло оптич. К 80	41
Глицерин	43	Стекло оптич. ТК 16	38
Лёд	50	Стекло оптич. ТФ 5	35
Органическое стекло	42	Стекло оптич. БК 10	40
Сероуглерод	38	Эфир этиловый	47
Спирт	47		

15.9. Коэффициенты отражения (ρ), поглощения (α), пропускания (τ) для пучка видимого света

Материал или среда	ρ	α	τ
Алюминий полированный	0,85 – 0,9	0,1 –0,15	-
Жесть белая	0,60 – 0,70	0,3 –0,4	-
Никель полированный	0,55 – 0,60	0,4 – 0,45	-
Серебро свежеполированное	0,90 – 0,92	0,08 – 0,1	-
Стеклянное посеребряное зеркало	0,85 – 0,88	0,12 – 0,15	-
Атмосферный воздух при исключительно ясной погоде	-	0,05	0,95
Атмосферный воздух при ясной погоде	-	0,1	0,90
Атмосферный воздух при сырой погоде	-	0,2	0,80
Атмосферный воздух при лёгком тумане	-	0,3	0,70
Атмосферный воздух при сильном тумане	-	0,4	0,60
Бумага белая	0,75	0,25	-
Белая краска	0,80	0,2	-
Жёлтая краска	0,40	0,6	-
Матированное стекло толщиной 1 – 4 мм	0,1	0,05	0,85
Органическое стекло толщиной $\cong$ 3мм	0,1	0,06	0,84
Молочное стекло толщиной 2 – 3 мм	0,45	0,15	0,40
Оконное стекло толщиной 1 – 3 мм	0,08	0,02	0,90
Фарфоровая эмаль	0,6	0,40	-
Чёрное сукно	0,02	0,98	-
Чёрный бархат	0,005	0,995	-
Чёрный слой сажи $\cong$ 1 – 2 мм	0,003	0,997	-

15.10. Диффузное отражение света (ρ_Σ) поверхностями

Поверхность	ρ_Σ	**Поверхность**	ρ_Σ
Поверхность, покрытая оксидом магния	0,98	Снег свежевыпавший	0,85
Бумага белая мелованная	0,88	Стена оштукатуренная и побеленная	0,7
Бумага белая для принтера	0,85	Кожа белого человека	0,35
Бумага жёлтая или голубая	0,23	Обои на бумажной основе светлые	0,2
Бумага чёрная	0,05	Сукно чёрное	0.02

15.11. Средние значения силы света некоторых источников

Источник света	Сила света, кд
Солнце	$3{\cdot}10^{27}$
Палубный ксеноновый военно-морской прожектор	$8{\cdot}10^{8} – 1{,}2{\cdot}10^{9}$
Морской маяк	$10^{5} – 10^{7}$
Осветительная ракета	$5{\cdot}10^{5}$ - 10^{6}
Электрическая дуга	10^{3} - 10^{5}
Фары автомобиля в режиме дальнего света	14000
Фары автомобиля в режиме ближнего света	7000
Фара мопеда	75
Лампа накаливания мощностью 60 Вт	51
Керосиновая лампа	1 – 19
Лампочка обычного карманного фонаря	0,5 – 4
Свеча стеариновая и пламя спички	0,5 – 2
Светлячок	0,01 – 0,001

15.12. Параметры излучения Солнца

Наименование параметра	Значение
Мощность излучения Солнца, Вт	$3{,}86{\cdot}10^{26}$
Еженесекундное уменьшение массы Солнца вследствие излучения, кг	$4{\cdot}10^{9}$
Мощность излучения Солнца, падающего на Землю, Вт	$2{,}1{\cdot}10^{18}$
Солнечная постоянная* Вт/м^2 (кал/(см^2·мин)	≅1400 (≅20)
Диапазоны длин волн солнечного излучения, пропускаемые на Землю атмосферой	290 нм – 24мкм
Диапазоны длин волн солнечного излучения, пропускаемые на Землю атмосферой	8 мм – 20 м
Глубина проникновения красных солнечных лучей через кожные покровы и мышцы человека, см	5 - 6
Глубина проникновения ультрафиолетовых лучей через кожные покровы человека, мм	0,2 – 0Б5

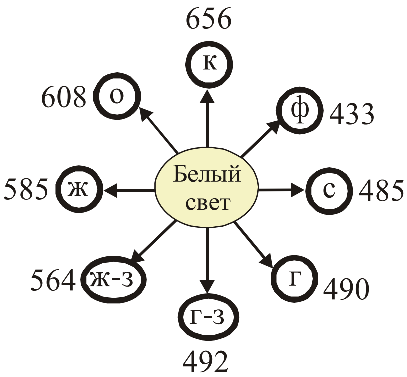
* *Солнечная постоянная представляет собой количество энергии, падающей в течение единицы времени на единичную поверхность, расположенную на границе атмосферы Земли, перпендикулярно к направлению падения*.

15.12. Сила света J (кд) электрических ламп накаливания различной мощности P, Вт

P	**15**	**25**	**40**	**60**	**100**	**150**	**300**	**500**	**10^3**
J	10	18	30	51	103	173	388	695	1530

15.13. Примерные интервалы длин волн (λ, нм) и частот (ν,$\cdot$ 10^{12} Гц) и соответствующие им цвета видимой части спектра света

Цвет спектра	λ, нм	ν,$\cdot10^{12}$ Гц	Число волн, укладывающихся на длине в 1мм
Красный	760 – 620	395 – 483	1316 – 1610
Оранжевый	620 – 590	483 – 508	1610 – 1695
Жёлтый	590 – 560	508 – 536	1695 –1786
Зелёный	560 – 500	536 – 600	1786 – 2000
Голубой	500 – 480	600 – 625	2000 – 2083
Синий	480 – 450	625 – 666	2083 – 2222
Фиолетовый	450 - 380	666 – 798	2222 – 2632



15.14. Пары дополнительных цветов, дающих при смешивании радикально белый цвет