КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Механические и электромагнитные колебания подчиняются совершенно *одинаковым законам*, т. е. описываются одними и теми же уравнениями. Именно поэтому мы изучаем их в одном разделе. Однако надо помнить, что физическая природа этих колебаний абсолютно разная.

Одинаковым количественным законам подчиняются и волновые процессы различной природы.

В современной физике выделился специальный раздел — *физика колебаний*. В нём колебания различной природы рассматриваются с единой точки зрения. Физика колебаний занимается исследованием вибраций машин и механизмов, её выводы лежат в основе электротехники и радиотехники.

ГЛАВА 3 МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

В этой главе мы рассмотрим особенности механических колебаний и их отличие от других видов механического движения.

§ 13 СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Какое движение называют механическим?
Можно ли назвать движение полотнища флага на ветру механическим движением?

Колебательные движения, или просто колебания, широко распространены в природе и технике.

Запомни

Колебаниями называются движения или процессы, обладающие свойством повторяемости во времени.

Запомни

Механические колебания — это движения, которые точно или приблизительно повторяются через определённые интервалы времени.

Колебания поршня в двигателе автомобиля, поплавка на поверхности воды, маятника часов, веток деревьев на ветру — примеры механических колебаний.

Свободные колебания. Группу взаимодействующих тел, движение которых мы изучаем, называют в механике *системой тел* или просто *системой*.

Запомни

Силы, действующие между телами системы, называют **внутренними.** **Внешними силами** называют силы, действующие на тела системы со стороны тел, не входящих в неё.

Самым простым видом колебаний являются свободные колебания.

Запомни

Свободными колебаниями называются колебания в системе под действием внутренних сил, после того как система выведена из положения равновесия и предоставлена затем самой себе.

Выясним, какими свойствами должна обладать система для того, чтобы в ней могли возникнуть свободные колебания.

> Обсудите с одноклассниками, какие силы действуют на систему груз—пружина. Почему эти силы можно считать внутренними?

Пружинный маятник. Удобнее всего рассмотреть вначале колебания маленького шарика, нанизанного на гладкий горизонтальный стержень, под действием силы упругости пружины.

Если немного сместить шарик из положения равновесия (рис. 3.1, *а*) вправо, то длина пружины увеличится на x_m (рис. 3.1, *б*) и на шарик будет действовать сила упругости. Эта сила согласно закону Гука пропорциональна удлинению пружины и направлена влево. Если отпустить шарик, то под действием этой силы он начнёт двигаться с ускорением влево, увеличивая свою скорость. Сила упругости при этом будет убывать, так как деформация пружины уменьшается. В момент, когда шарик достигнет положения равновесия, сила упругости пружины станет равной нулю. Следовательно, согласно второму закону Ньютона станет равным нулю и ускорение шарика.

> Объясните, почему колебания груза, прикреплённого к пружине, или груза, подвешенного на нити, можно рассматривать как примеры свободных колебаний.

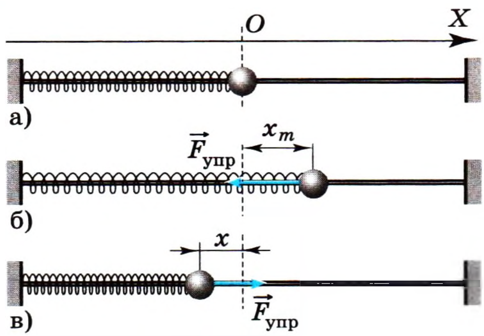


Рис. 3.1

К этому моменту скорость шарика достигнет максимального значения. Не останавливаясь в положении равновесия, он будет по инерции продолжать двигаться влево. Пружина при этом сжимается. В результате появляется сила упругости, направленная уже вправо и тормозящая движение шарика (рис. 3.1, *в*). Эта сила, а значит, и направленное вправо ускорение увеличиваются по модулю прямо пропорционально модулю смещения x шарика относительно положения равновесия. Скорость же будет уменьшаться до тех пор, пока в крайнем левом положении шарика не обратится в нуль. После этого шарик начнёт ускоренно

Интересно

Анализ колебаний шарика, подвешенного на вертикальной пружине, сложнее. В этом случае действуют одновременно переменная сила упругости пружины и постоянная сила тяжести. Но характер колебаний в том и другом случае совершенно одинаков.

двигаться вправо. С уменьшением модуля смещения x сила $F_{упр}$ убывает по модулю и в положении равновесия опять обращается в нуль. При этом скорость шарика увеличивается и в положении равновесия становится максимальной, и по инерции шарик проходит положение равновесия, продолжая двигаться вправо. Это движение приводит к растяжению пружины и появлению силы, направленной влево. Движение шарика тормозится до полной остановки в крайнем правом положении — система совершила одно полное колебание, после чего весь процесс повторяется сначала.

Как изменился бы ход рассуждений, если бы шарик был подвешен к пружине?

Если бы не было потерь механической энергии при трении шарика о стержень, то движение шарика не прекратилось бы никогда.

Уравнение движения тела, колеблющегося под действием силы упругости. Согласно второму закону Ньютона произведение массы тела m на его ускорение $\vec{a}$ равно равнодействующей $\vec{F}$ всех сил, приложенных к телу:

$$m\vec{a} = \vec{F}. \tag{3.1}$$

Запишем уравнение движения для шарика, движущегося прямолинейно вдоль горизонтали под действием силы упругости $\vec{F}$ пружины (см. рис. 3.1). Направим ось OX вправо. Пусть начало отсчёта координат соответствует положению равновесия шарика (см. рис. 3.1, *а*).

В проекции на ось OX уравнение (3.1) можно записать так: $ma_x = F_{x\ упр}$, где a_x и $F_{x\ упр}$ соответственно проекции ускорения и силы упругости пружины на эту ось.

Согласно закону Гука проекция $F_{x\ упр}$ прямо пропорциональна смещению шарика из положения равновесия. Смещение же равно координате x шарика, причём проекция силы и координата имеют противоположные знаки (см. рис. 3.1, *б*, *в*). Следовательно,

$$F_{x\ упр} = -kx, \tag{3.2}$$

где k — жёсткость пружины.

Уравнение движения шарика тогда примет вид

$$ma_x = -kx. \tag{3.3}$$

Разделив левую и правую части уравнения (3.3) на m, получим

$$a_x = -\frac{k}{m}x. \tag{3.4}$$

Так как масса m и жёсткость k — постоянные величины, то их отношение $\frac{k}{m}$ также постоянная величина.

Мы получили уравнение, описывающее колебания тела под действием силы упругости. Оно очень простое:

Важно

проекция a_x ускорения тела прямо пропорциональна его координате x, взятой с противоположным знаком.

Математический маятник.

Запомни

Математический маятник — это материальная точка, подвешенная на идеальной (невесомой и нерастяжимой) нити.

Важно

Математический маятник — модель обычного (реального) маятника.

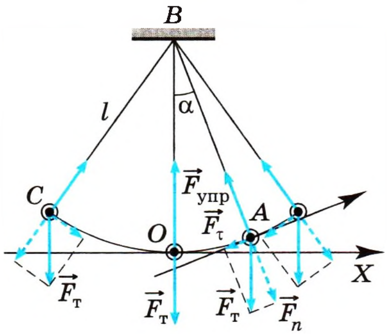


Рис. 3.2

Выведем тело маятника (шарик) из положения равновесия и отпустим. На шарик будут действовать две силы: сила тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g}$, направленная вертикально вниз, и сила упругости нити $\vec{F}_{упр}$, направленная вдоль нити (рис. 3.2). Конечно, при движении маятника на него ещё действует и сила сопротивления. Но мы будем считать её пренебрежимо малой.

Для того чтобы отчётливо представить себе динамику движения маятника, удобно силу тяжести разложить на две составляющие: $\vec{F}_n$, направленную вдоль нити, и $\vec{F}_{\tau}$, направленную перпендикулярно нити по касательной к траектории шарика. Силы $\vec{F}_n$ и $\vec{F}_{\tau}$ в сумме составляют силу $\vec{F}_т$. Сила упругости нити $\vec{F}_{упр}$ и составляющая силы тяжести $\vec{F}_n$ перпендикулярны скорости маятника и изменяют только направление скорости, т. е. сообщают ему центростремительное ускорение. Под действием составляющей $\vec{F}_{\tau}$ силы тяжести маятник начинает двигаться по дуге окружности вниз с нарастающей по модулю скоростью. При движении маятника эта составляющая силы тяжести, направленная к положению равновесия, уменьшается по модулю, и в момент, когда маятник проходит через положение равновесия, она становится равной нулю, а скорость шарика становится максимальной, и по инерции он продолжает движение. При этом $\vec{F}_{\tau}$ уже будет направлена против скорости. Поэтому модуль скорости маятника станет уменьшаться. В момент остановки маятника в верхней точке его траектории (точке C) модуль $\vec{F}_{\tau}$ максимален и эта сила будет вызывать движение маятника в сторону положения равновесия, в то же время в этой точке $F_n = F_{упр}$, а центростремительное ускорение равно нулю. Далее

Какие упрощения делают, когда тело, подвешенное на нити, считают математическим маятником?

Интересно

Нужно иметь в виду, что шарик, подвешенный на нити, будет представлять собой маятник лишь в том случае, если на него действует сила тяжести Земли. Вызывающий эту силу земной шар входит в колебательную систему, которую мы для краткости называем просто маятником.

скорость маятника увеличивается по модулю, и он снова движется к положению равновесия. Пройдя положение равновесия, он возвращается в исходное положение.

Уравнение движения математического маятника. При колебаниях шарика на нерастяжимой нити он всё время движется по дуге окружности, радиус которой равен длине l нити. Поэтому положение шарика в любой момент времени можно определить углом α отклонения нити от вертикали. Будем считать угол α положительным, если маятник отклонён вправо от положения равновесия, и отрицательным, если он отклонён влево (см. рис. 3.2).

Обозначим проекцию силы тяжести на касательную к траектории маятника через $\vec{F}_\tau$. Эта проекция в момент, когда нить маятника отклонена от положения равновесия на угол α, равна:

$$F_\tau = -mg\sin\alpha. \tag{3.5}$$

Знак «−» здесь стоит потому, что величины F_τ и α имеют противоположные знаки. При отклонении маятника вправо ($\alpha > 0$) составляющая силы тяжести $\vec{F}_\tau$ направлена влево и её проекция отрицательна: $F_\tau < 0$. При отклонении маятника влево ($\alpha < 0$) эта проекция положительна: $F_\tau > 0$.

Согласно второму закону Ньютона

$$ma_\tau = F_\tau,$$

или

$$ma_\tau = -mg\sin\alpha. \tag{3.6}$$

Разделив левую и правую части этого уравнения на m, получим

$$a_\tau = -g\sin\alpha. \tag{3.7}$$

Ранее предполагалось, что углы отклонения нити маятника от вертикали могут быть любыми. В дальнейшем будем считать их малыми. При малых углах, если угол измерен в радианах,

$$\sin\alpha \approx \alpha.$$

Следовательно, можно принять

$$a_\tau = -g\alpha. \tag{3.8}$$

Если угол α мал, то эта проекция ускорения примерно равна проекции ускорения на ось OX: $a_\tau \approx a_x$ (см. рис. 3.2). Из треугольника ABO для малого угла α имеем

$$\alpha = \frac{x}{l}. \tag{3.9}$$

Подставив это выражение в равенство (3.8) вместо угла α, получим

$$a_\tau = -\frac{g}{l}x. \tag{3.10}$$

Это уравнение имеет такой же вид, что и уравнение (3.4) для ускорения шарика, прикреплённого к пружине. Следовательно, и решение этого уравнения будет иметь тот же вид, что и решение уравнения (3.4). Это означает,

Интересно Силы, пропорциональные смещению и направленные в сторону, противоположную смещению, называют квазиупругими.

что движение шарика и колебания маятника происходят одинаковым образом. Смещения шарика на пружине и тела маятника от положений равновесия изменяются со временем по одному и тому же закону, несмотря на то что силы, вызывающие колебания, имеют различную физическую природу. Умножив уравнения (3.4) и (3.10) на m и вспомнив второй закон Ньютона $ma_x = F_{x\ \text{рез}}$, можно сделать вывод, что колебания в этих двух случаях совершаются под действием сил, равнодействующая которых прямо пропорциональна смещению колеблющегося тела от положения равновесия и направлена в сторону, противоположную этому смещению.

Свободные колебания. Пружинный и математический маятники Найти

1. Какие колебания называют свободными?
2. При каких условиях в системе возникают свободные колебания?
3. Чему равно перемещение шарика (см. рис. 3.1) за одно полное колебание?

1. Верно(-ы) утверждение(-я):
Свободным является колебание
А. груза, подвешенного к пружине, после однократного его отклонения от положения равновесия
Б. мембраны громкоговорителя во время работы приёмника
1) только А 2) только Б 3) А и Б 4) ни А, ни Б

2. Математический маятник совершает колебания под действием силы
1) тяжести
2) упругости нити
3) тяжести и силы упругости нити
4) тяготения

3. Выберите формулу, связывающую угол отклонения нити и смещение тела при колебаниях математического маятника.
1) $x = \alpha l$ 2) $x = -\alpha l$ 3) $x = g/l$ 4) $x = -g\alpha$

4. Могут ли в какой-то момент времени совпадать направления скорости и ускорения при колебаниях пружинного маятника?
1) ответ зависит от положения маятника в начальный момент времени
2) не могут ни в один из моментов времени
3) могут в моменты максимальной скорости
4) могут при движении от точки максимального отклонения к положению равновесия

5. При колебаниях математического маятника ускорение материальной точки перпендикулярно её скорости
1) в точках максимального отклонения
2) при прохождении положения равновесия
3) в определённой точке, находящейся между положением равновесия и максимального отклонения
4) не будет ни в одной точке

§ 14 ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Какое движение называется колебательным?
Каковы условия и причины колебаний пружинного и математического маятников?

Зная, как связаны между собой ускорение и координата колеблющегося тела, можно на основе математического анализа найти зависимость координаты от времени.

Ускорение — вторая производная координаты по времени. Мгновенная скорость точки, как вам известно из курса математики, представляет собой производную координаты точки по времени. Ускорение точки — это производная её скорости по времени, или вторая производная координаты по времени. Поэтому уравнения (3.4) и (3.10) можно записать так:

$$x'' = -\omega_0^2 x, \tag{3.11}$$

где x'' — вторая производная координаты по времени, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ для пружинного маятника и $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ для математического маятника. Уравнение (3.11) — дифференциальное уравнение гармонических колебаний, решением которого является функция синуса или косинуса, т. е.

Важно

координата тела, совершающего свободные колебания, меняется с течением времени по формуле синуса или косинуса.

На рисунке 3.3 показано изменение координаты точки со временем по формуле косинуса.

Запомни

Гармоническими колебаниями называются периодические изменения физической величины в зависимости от времени, происходящие по формуле синуса или косинуса. Такие колебания являются **незатухающими.**

Запишем решение уравнения (3.11) в виде

$$x = x_m \cos \omega_0 t. \tag{3.12}$$

Найдём скорость точки, совершающей гармонические колебания:

$$v_x = x' = -\omega_0 x_m \sin \omega_0 t, \tag{3.13}$$

где x_m — амплитуда колебаний.

Ускорение, равное второй производной от x, имеет вид

$$a_x = x'' = -\omega_0^2 x_m \cos \omega_0 t = -\omega_0^2 x. \tag{3.14}$$

Подставив выражение для a_x в уравнение (3.11), получим тождество. Следовательно, функция (3.12)

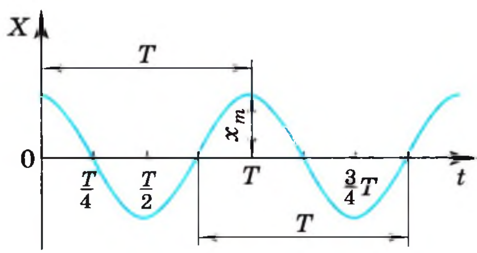


Рис. 3.3

есть решение исходного уравнения (3.11). Решением этого уравнения будет также функция $x = x_m \sin \omega_0 t$.

График зависимости координаты тела от времени согласно формуле (3.12) представляет собой *косинусоиду* (см. рис. 3.3).

Характеристики колебаний.

Запомни

Амплитудой гармонических колебаний называется модуль наибольшего смещения тела от положения равновесия.

Как вы понимаете, что такое полное колебание в разных колебательных системах?
Приведите примеры колебательных систем.

Амплитуда может иметь различные значения в зависимости от того, насколько мы смещаем тело от положения равновесия в начальный момент времени, или от того, какая скорость сообщается телу.

Важно

Амплитуда определяется энергией, сообщаемой телу.

При колебаниях движения тела периодически повторяются.

Запомни

Промежуток времени, за который система совершает одно полное колебание, называется **периодом** T колебаний.

Зная период, можно определить *частоту колебаний.*

Запомни

Частота ν колебаний — число колебаний в единицу времени, например за секунду.

Понаблюдайте за колебаниями математического маятника. Как изменить амплитуду колебаний, а как частоту?

Если одно колебание совершается за время T, то число колебаний за секунду

$$\nu = \frac{1}{T}. \tag{3.15}$$

Важно

В Международной системе единиц (СИ) частота колебаний равна единице, если за секунду совершается одно полное колебание.

Единица частоты называется *герцем* (сокращённо: Гц) в честь немецкого физика Г. Г е р ц а.

Число колебаний за 2π с равно:

$$\omega_0 = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \tag{3.16}$$

Запомни

Величина ω_0 — **циклическая,** или **круговая,** частота колебаний.

Если в уравнении (3.12) время t равно одному периоду, то $\omega_0 T = 2\pi$. Таким образом, если в момент времени $t = 0$ смещение $x = x_m$, то и в момент времени $t = T$ смещение $x = x_m$, т. е. через промежуток времени, равный одному периоду, колебания повторяются.

Запомни

Собственной частотой колебательной системы называют частоту свободных колебаний.

Зависимость частоты и периода свободных колебаний от свойств системы. Собственная частота колебаний тела, прикреплённого к пружине, согласно уравнению (3.4) равна:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Она тем больше, чем больше жёсткость пружины k, и тем меньше, чем больше масса тела m. Это легко понять: жёсткая пружина сообщает телу большее ускорение, быстрее меняет скорость тела. А чем тело массивнее, тем медленнее оно изменяет скорость под действием силы. Период колебаний равен:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.} \quad (3.17)$$

Важно

Период колебаний тела на пружине и период колебаний маятника при малых углах отклонения не зависят от амплитуды колебаний.

Собственная частота колебаний математического маятника согласно формуле (3.10) при малых углах отклонения нити от вертикали зависит от длины маятника и ускорения свободного падения:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (3.18)$$

Период же этих колебаний равен:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.} \quad (3.19)$$

Период колебаний возрастает с увеличением длины маятника. От массы маятника он не зависит. Это легко проверить на опыте

Интересно

Для краткости циклическую частоту обычно называют просто частотой. Отличить циклическую частоту от обычной частоты можно по обозначениям.

Подвешивая к разным пружинам разные по массе тела, подтвердите зависимость периода колебаний от параметров системы. Учтите, что жёсткость при уменьшении толщины проволоки пружины уменьшается, а при уменьшении длины увеличивается.

Интересно

Формула (3.19) была впервые получена и проверена на опыте голландским учёным Г. Гюйгенсом — современником И. Ньютона. Она справедлива только для малых углов отклонения нити.

с различными маятниками. Зависимость периода колебаний от ускорения свободного падения также можно обнаружить. Чем меньше g, тем больше период колебаний маятника и, следовательно, тем медленнее идут часы с маятником.

Интересно Часы с маятником в виде груза на стержне отстанут за сутки почти на 3 с, если их поднять из подвала на верхний этаж Московского университета (высота 200 м). И это произойдёт только за счёт уменьшения ускорения свободного падения с высотой.
В районах, где залегают плотные породы, ускорение g несколько большее. Это учитывают при поисках полезных ископаемых.
Так, железная руда обладает повышенной плотностью по сравнению с обычными породами. Проведённые под руководством академика А. А. Михайлова измерения ускорения свободного падения под Курском позволили уточнить места залегания железной руды. Сначала они были обнаружены посредством магнитных измерений.

Важно Согласно полученным формулам (3.17) и (3.19) период гармонических колебаний зависит от параметров системы (жёсткости пружины, длины нити и т. д.).

Фаза колебаний. Введём ещё одну величину, характеризующую гармонические колебания, — *фазу колебаний.*

При заданной амплитуде колебаний координата колеблющегося тела в любой момент времени однозначно определяется аргументом косинуса или синуса:

$$\varphi = \omega_0 t.$$

Запомни Величину φ, стоящую под знаком функции косинуса или синуса, называют **фазой** колебаний, описываемых этой функцией.

Выражается фаза в угловых единицах — *радианах.*

Фаза определяет не только значение координаты, но и значения других физических величин, например скорости и ускорения, изменяющихся также по гармоническому закону. Поэтому можно сказать, что

Важно фаза определяет при заданной амплитуде состояние колебательной системы в любой момент времени.

В этом состоит значение понятия фазы.

Колебания с одинаковыми амплитудами и частотами могут различаться фазами.

Так как $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, то

$$\varphi = \omega_0 t = 2\pi \frac{t}{T}. \quad (3.20)$$

Отношение $\frac{t}{T}$ указывает, сколько полных колебаний совершено от момента начала колебаний. Любому значению времени t соответствует значение фазы φ, выраженное в радианах. Так, по прошествии времени $t = \frac{T}{4}$ (четверти периода) $\varphi = \frac{\pi}{2}$, по прошествии половины периода $\varphi = \pi$, по прошествии целого периода $\varphi = 2\pi$ и т. д.

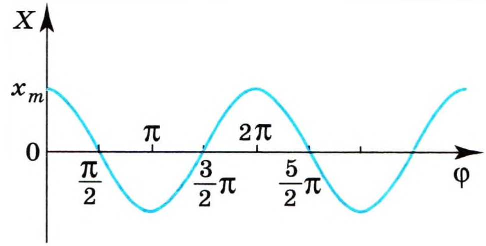


Рис. 3.4

Можно изобразить на графике зависимость координаты колеблющейся точки не от времени, а от фазы. На рисунке 3.4 показана та же косинусоида, что и на рисунке 3.3, но на горизонтальной оси отложены вместо времени различные значения фазы φ.

Описание гармонических колебаний с помощью косинуса и синуса. Вы уже знаете, что при гармонических колебаниях координата тела изменяется со временем по формуле косинуса или синуса.

Так как

$$\cos\varphi = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

то одно и то же колебание мы можем описать этими двумя тригонометрическими функциями, различающимися аргументом на $\frac{\pi}{2}$. Выбор функции зависит от начальных условий. Если смещение от положения равновесия максимально в начальный момент, то для описания колебаний удобнее пользоваться формулой $x = x_m \cos \omega_0 t$.

Если бы мы возбудили колебания покоящегося тела кратковременным толчком, то координата тела в начальный момент была бы равна нулю и изменения координаты со временем было бы удобнее описывать с помощью синуса, т. е. формулой

$$x = x_m \sin \omega_0 t,$$

так как при этом начальная фаза равна нулю.

Если в начальный момент времени (при $t = 0$) фаза колебаний равна φ_0, то уравнение колебаний можно записать в виде

$$x = x_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (3.21)$$

Сдвиг фаз. Колебания, происходящие с одинаковыми частотой и амплитудой, могут отличаться друг от друга фазами.

> Подумайте, какие значения начальной фазы φ_0 могут быть при разных способах возбуждения колебаний.

Рассмотрим два колебания: $x = x_m \sin \omega_0 t$ и $x = x_m \cos \omega_0 t$. Так как $\cos \omega_0 t = \sin(\omega_0 t + \pi/2)$, то разность фаз, или, как часто говорят, *сдвиг фаз*, этих колебаний составляет $\frac{\pi}{2}$. На рисунке 3.5 показаны графики зависимости координат от времени для этих двух гармонических колебаний,

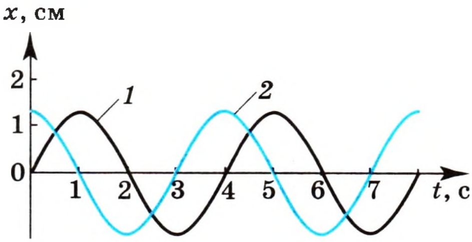


Рис. 3.5

сдвинутых по фазе на $\frac{\pi}{2}$. График *1* соответствует колебаниям, совершающимся по формуле синуса:

$$x = x_m \sin \omega_0 t,$$

а график *2* — колебаниям, совершающимся по формуле косинуса:

$$x = x_m \cos \omega_0 t = x_m \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Превращения энергии при гармонических колебаниях. Пусть в положении равновесия потенциальная энергия колебательной системы равна нулю. Смещая тело на расстояние x_m, мы сообщаем колебательной системе потенциальную энергию $W_п$ и таким образом создаём системе условия для начала движения тела (колебаний).

> Обсудите с одноклассниками, как будут выглядеть графики на рисунке 3.5, если сдвиг фаз будет равен π или $3\pi/2$.

При движении тела потенциальная энергия системы уменьшается. Но одновременно увеличивается скорость и, следовательно, возрастает кинетическая энергия. В момент прохождения телом положения равновесия потенциальная энергия колебательной системы становится равной нулю ($W_п = 0$ при $x = 0$). Кинетическая же энергия достигает максимума.

После прохождения положения равновесия скорость тела начинает уменьшаться. Следовательно, уменьшается и кинетическая энергия. Потенциальная же энергия системы снова увеличивается. Когда смещение тела вновь достигает максимума, то кинетическая энергия становится равной нулю. Таким образом, при колебаниях периодически происходит переход потенциальной энергии в кинетическую и обратно. Полная механическая энергия при гармонических колебаниях равна сумме кинетической и потенциальной энергий колебательной системы:

> Запишите формулу (3.22) в случаях колебаний пружинного и математического маятников с учётом выражений для потенциальной энергии.

$$W = W_к + W_п. \qquad (3.22)$$

Важно

Полная механическая энергия изолированной системы, в которой отсутствуют силы сопротивления, сохраняется (согласно закону сохранения механической энергии) неизменной:

$$W = \text{const}.$$

Она равна либо потенциальной энергии в момент максимального отклонения от положения равновесия, либо же кинетической энергии в момент, когда тело проходит положение равновесия.

Гармонические колебания — частный случай колебаний, происходящих в природе и технике. Однако любой колебательный процесс может быть представлен как сумма гармонических колебаний.

Приведём таблицу основных характеристик гармонических колебаний. Уравнение колебаний $x = x_m \sin(\omega t + \varphi_0)$.

Характеристика	Обозначение	Определение	Зависимость
Амплитуда	x_m, A	Максимальное отклонение от положения равновесия	От энергии, сообщённой системе, $x_m = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2W}{m}}$
Период колебаний	T	Время одного полного колебания	От параметров системы
Частота колебаний	ν	Число полных колебаний за 1 с	
Циклическая частота колебаний	ω	Число полных колебаний за 2π с	
Фаза колебаний	$\varphi = \omega t + \varphi_0$	Положение колеблющегося тела в данный момент времени	От времени, частоты и начальных условий
Начальная фаза колебаний	φ_0	Положение колеблющегося тела в начальный момент времени ($t = 0$)	От начальных условий

Гармонические колебания. Амплитуда. Период. Частота. Фаза. Энергия Найти

1. Какие колебания называют гармоническими?
2. Как связаны ускорение и координата при гармонических колебаниях?
3. Как связаны циклическая частота и период колебаний?
4. Почему частота колебаний тела, прикреплённого к пружине, зависит от его массы, а частота колебаний математического маятника от массы не зависит?

1. Груз массой 0,16 кг, подвешенный на лёгкой пружине, совершает свободные гармонические колебания. Определите массу груза, который надо подвесить к той же пружине, чтобы частота колебаний уменьшилась в 2 раза.
1) 0,04 кг 2) 0,08 кг 3) 0,32 кг 4) 0,64 кг

2. Маятниковые часы спешат. Чтобы часы шли точно, необходимо увеличить период колебаний маятника. Для этого надо
1) увеличить массу маятника
2) уменьшить массу маятника
3) увеличить длину маятника
4) уменьшить длину маятника

3. Если на некоторой планете период колебаний секундного земного математического маятника окажется равным 2 с, то ускорение свободного падения на этой планете равно
1) 2,5 м/с^2 2) 5 м/с^2 3) 20 м/с^2 4) 40 м/с^2

§ 15 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ»

Одной из самых сложных задач на эту тему является задача определения собственной частоты колебаний тела. Для этого надо согласно второму закону Ньютона записать уравнение динамики, затем привести его к виду (3.14). Постоянная при x определит квадрат циклической частоты колебаний.

Обратите внимание на отличие циклической частоты от частоты: $\omega = 2\pi\nu$.

При записи уравнения колебаний надо учитывать начальные условия, которые определяют начальную фазу колебаний.

Задача 1. Сколько колебаний совершает математический маятник длиной $l = 4{,}9$ м за время $t = 5$ мин?

Решение. Период колебаний определяется по формуле $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Искомое число колебаний можно найти так: $n = \frac{t}{T} = \frac{t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \approx 67$.

Задача 2. Вертикально подвешенная пружина растягивается прикреплённым к ней грузом на $\Delta l = 0{,}8$ см. Чему равен период T свободных колебаний груза? (Массой пружины можно пренебречь.)

Решение. Период колебаний груза, прикреплённого к пружине, определяется формулой $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, где m — масса груза; k — жёсткость пружины. На груз действуют сила тяжести $\vec{F}_т$ и сила упругости $\vec{F}_{упр}$. Когда груз находится в равновесии, эти силы равны по модулю: $F_т = F_{упр}$.

Так как $F_т = mg$ и $F_{упр} = k\Delta l$ (закон Гука), то $mg = k\Delta l$, откуда $\frac{m}{k} = \frac{\Delta l}{g}$.

Следовательно, $T = 2\pi\sqrt{\Delta l / g} \approx 0{,}2$ с.

Задача 3. На гладком горизонтальном стержне находится груз, прикреплённый к пружине. Другой конец пружины закреплён. Потянув за груз, пружину растягивают, при этом внешняя сила совершает работу 50 Дж. Затем груз отпускают. Жёсткость пружины 10^4 Н/м, масса груза 10 г. Запишите уравнение колебаний груза и определите его координаты в моменты времени, равные $\pi/4$ мс, $\pi/2$ мс, π мс.

Решение. Уравнение движения груза $x = x_m \cos(\omega t + \varphi_0)$.

Полная механическая энергия системы равна энергии, сообщённой системе, т. е. равна работе внешней силы: $\frac{kx_m^2}{2} = A$. Отсюда найдём амплитуду колебаний: $x_m = \sqrt{\frac{2A}{k}} = 0{,}1$ м.

Циклическую частоту колебаний определим по формуле для частоты колебаний пружинного маятника: $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = 10^3$ рад/с.

При $t = 0$ $x = x_m$, следовательно, начальная фаза колебаний равна нулю, $\varphi_0 = 0$. Уравнение колебаний груза имеет вид

$$x = 0{,}1 \cos(10^3 t). \qquad (1)$$

Период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot 10^{-3}$ с.

Подставим в уравнение (1) указанные моменты времени:

1) $t_1 = \dfrac{\pi}{4} \cdot 10^{-3}$ с, заметим, что этот момент времени соответствует 1/8 периода колебаний. Смещение $x_1 = 0{,}1 \cos\left(10^3 \cdot \dfrac{\pi}{4} \cdot 10^{-3}\right) \approx 0{,}071$ м.

2) $t_2 = \dfrac{\pi}{2} \cdot 10^{-3}$ с, этот момент времени соответствует 1/4 периода колебаний, из формулы (1) очевидно, что $x_2 = 0$.

3) За время $t_3 = \pi \cdot 10^{-3}$ с груз совершит половину одного полного колебания. Очевидно, что $x_3 = -0{,}1$ м.

Задача 4. В жидкости плотностью $\rho_ж$ плавает цилиндр высотой h (рис. 3.6). Если цилиндр погрузить в жидкость или, напротив, немного вытащить из жидкости, то после того, как его отпустят, цилиндр начинает колебаться. Плотность материала, из которого сделан цилиндр, равна $\rho_м$. Определите период колебаний цилиндра. Силами сопротивления можно пренебречь.

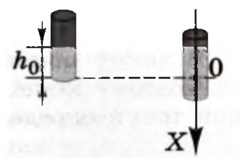


Рис. 3.6

Р е ш е н и е. Условие плавания цилиндра — равенство сил тяжести и Архимеда:

$$F_{Арх} = F_т, \quad \text{или} \quad \rho_ж S h_0 g = \rho_м S h g, \qquad (1)$$

где S — площадь поперечного сечения цилиндра, h_0 — глубина его погружения в жидкость.

Из соотношения (1) следует: $h_0 = \dfrac{\rho_м}{\rho_ж} h$.

Если увеличить глубину погружения цилиндра на x, то сила Архимеда станет больше силы тяжести и согласно второму закону Ньютона можно записать (проекция на ось X):

$$ma_x = mg - \rho_ж S(h_0 + x)g. \qquad (2)$$

Учитывая соотношение (1), получим $ma_x = -\rho_ж Sgx$.

Обратим внимание на то, что равнодействующая сил, действующих на цилиндр, прямо пропорциональна смещению тела от положения равновесия и направлена в сторону, противоположную смещению, следовательно, цилиндр совершает гармонические колебания.

Разделив на массу $m = \rho_м Sh$ левую и правую части уравнения (2), получим $a_x = -\frac{\rho_ж g}{\rho_м h}x$.

Отсюда согласно уравнению (3.14) найдём циклическую частоту колебаний: $\omega = \sqrt{\frac{\rho_ж g}{\rho_м h}}$.

Период колебаний цилиндра $T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_м h}{\rho_ж g}}$.

Мы видим, что период и частота колебаний определяются также параметрами системы.

Задача 5. Груз, прикреплённый к пружине, колеблется на горизонтальном гладком стержне (см. рис. 3.1). Определите отношение кинетической энергии груза к потенциальной энергии системы в момент, когда груз находится в точке, расположенной посредине между крайним положением и положением равновесия.

Решение. Координата указанной точки равна половине амплитуды колебаний: $x = x_m/2$. Потенциальная энергия системы в момент прохождения груза через эту точку равна $W_п = kx^2/2 = kx_m^2/8$.

В любой момент времени выполняется равенство $W_к + W_п = kx_m^2/2$.

Поэтому кинетическая энергия груза в момент прохождения им указанной точки определяется так:

$$W_к = \frac{kx_m^2}{2} - W_п = \frac{kx_m^2}{2} - \frac{kx_m^2}{8} = \frac{3}{8}kx_m^2.$$

Следовательно, $W_к/W_п = 3$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Груз массой 100 г совершает колебания с частотой 2 Гц под действием пружины. Определите жёсткость пружины.

2. В Санкт-Петербурге в Исаакиевском соборе висел маятник Фуко, длина которого была равна 98 м. Чему был равен период колебаний маятника?

3. Шарик на пружине сместили на расстояние 1 см от положения равновесия и отпустили. Какой путь пройдёт шарик за 2 с, если частота его колебаний $\nu = 5$ Гц? (Затуханием колебаний можно пренебречь.)

4. Тело массой 200 г совершает колебания в горизонтальной плоскости с амплитудой 2 см под действием пружины жёсткостью 16 Н/м. Определите циклическую частоту колебаний тела и энергию системы.

5. На горизонтальном стержне находится груз, прикреплённый к пружине (см. рис. 3.1). Другой конец пружины закреплён. В некоторый момент времени груз смещают от положения равновесия на $x_m = 10$ см и отпускают. Определите координату груза спустя 1/8 периода колебаний. (Трение не учитывайте.)

§ 16 ЗАТУХАЮЩИЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ. РЕЗОНАНС

Как меняется колебательное движение маятника с течением времени? Остаётся ли постоянной полная механическая энергия маятника? Какие силы действуют на маятник?

Свободные колебания груза, прикреплённого к пружине, или маятника являются гармоническими лишь в том случае, когда нет трения. Но силы трения, или, точнее, силы сопротивления окружающей среды, хотя, может быть, и малые, всегда действуют на колеблющееся тело.

Затухающие колебания. Обратимся к эксперименту, схематично изображённому на рисунке 3.1. Трение и сопротивление воздуха препятствуют движению шарика. Направление силы сопротивления как при движении шарика вправо, так и при его движении влево всё время противоположно направлению скорости. Размах его колебаний постепенно будет уменьшаться до тех пор, пока движение не прекратится. При малом трении затухание становится заметным лишь после того, как шарик совершит много колебаний. Если наблюдать движение шарика на протяжении не очень большого интервала времени, то затуханием колебаний можно пренебречь. В этом случае влияние силы сопротивления на движение можно не учитывать.

Если же сила сопротивления велика, то пренебречь её действием даже в течение малых интервалов времени нельзя. Опустите шарик на пружине в стакан с вязкой жидкостью, например с глицерином (рис. 3.7). Если жёсткость пружины мала, то выведенный из положения равновесия шарик совсем не будет колебаться. Под действием силы упругости он просто вернётся в положение равновесия (штриховая линия на рисунке 3.7). За счёт действия силы сопротивления скорость его в положении равновесия будет практически равна нулю.

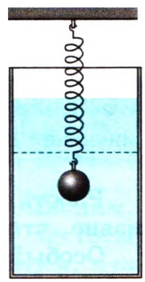


Рис. 3.7

Силы сопротивления совершают отрицательную работу и тем самым уменьшают механическую энергию системы. Поэтому с течением времени максимальные отклонения тела от положения равновесия становятся всё меньше и меньше. В конце концов, после того как запас механической энергии окажется исчерпанным, колебания прекратятся совсем.

Важно Колебания при наличии сил сопротивления являются *затухающими*.

График зависимости координаты тела от времени при затухающих колебаниях изображён на рисунке 3.8. Подобный график может вычертить само колеблющееся тело, например маятник.

На рисунке 3.9 изображён маятник с песочницей. Маятник на равномерно движущемся под ним листе картона струйкой песка вычерчивает график зависимости своей координаты от времени. Это простой метод временной

Как изменяется механическая энергия при затухающих колебаниях?
Похож ли график изменения энергии на график, приведённый на рисунке 3.8?

Подвесьте на длинную нить сначала маленький шарик, а затем кубик большого размера. Определите с помощью секундомера период их колебаний и время затухания этих колебаний. Сделайте выводы.

Интересно В автомобилях применяются специальные амортизаторы для гашения колебаний кузова при езде по неровной дороге. При колебаниях кузова связанный с ним поршень движется в цилиндре, заполненном жидкостью. Жидкость перетекает через отверстия в поршне, что приводит к появлению больших сил сопротивления и быстрому затуханию колебаний.

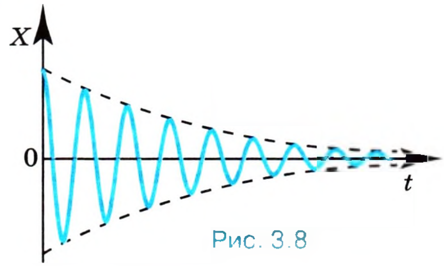


Рис. 3.8

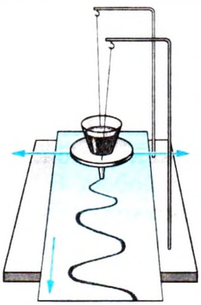


Рис. 3.9

развёртки колебаний, дающий достаточно полное представление о процессе колебательного движения. При небольшом сопротивлении затухание колебаний на протяжении нескольких периодов мало. Если же к нитям подвеса прикрепить лист плотной бумаги для увеличения силы сопротивления, то затухание станет значительным.

Вынужденные колебания. Большое значение имеют незатухающие колебания — те, которые могут длиться неограниченно долго.

Самый простой способ возбуждения незатухающих колебаний состоит в том, что на систему воздействуют внешней периодической силой.

Запомни **Вынужденными** называются колебания, происходящие под действием внешней периодической силы.

Работа внешней силы над системой обеспечивает приток энергии к системе извне, что не даёт колебаниям затухнуть, несмотря на действие сил трения.

Особый интерес представляют вынужденные колебания в системе, способной совершать почти свободные колебания. С этим случаем знакомы все, кому приходилось раскачивать ребёнка на качелях.

Качели — это маятник, т. е. колебательная система с определённой собственной частотой. Отклонить качели на большой угол от положения равновесия с помощью постоянной во времени небольшой силы невозможно. Не удаётся раскачать качели и в том случае, если их беспорядочно подталкивать в разные стороны. Однако если начать в правильном ритме подталкивать качели вперёд каждый раз, когда они поравняются с нами, то можно и без большого напряжения раскачать их очень сильно. Правда, для этого потребуется некоторое время. Каждый толчок сам по себе может

Почему постоянная сила не может поддерживать колебания?

быть незначительным. После первого толчка качели будут совершать лишь очень малые колебания. Но если темп этих колебаний и внешних толчков один и тот же, то второй толчок будет своевременным и усилит действие первого. Третий усилит колебания ещё больше и т. д. Эта возможность значительного увеличения амплитуды колебаний системы, способной совершать почти свободные колебания, при совпадении частоты внешней периодической силы с собственной частотой колебательной системы и представляет особый интерес.

Вынужденные колебания шарика, прикреплённого к пружине. Рассмотрим вынужденные колебания в системе, обладающей собственной частотой колебаний. Вместо маятника удобнее взять шарик, прикреплённый к пружине. Пусть конец одной из пружин будет прикреплён к нити, перекинутой через блок (рис. 3.10), а нить соединена со стерженьком на диске. Если вращать диск с помощью электродвигателя, то на пружину начнёт действовать периодическая внешняя сила.

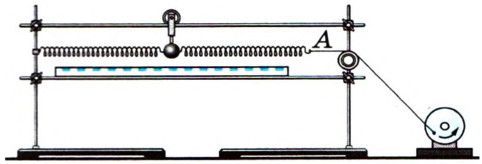


Рис. 3.10

Постепенно под действием пружины шарик начнёт раскачиваться. При этом амплитуда колебаний будет нарастать. Спустя некоторое время колебания приобретут *установившийся* характер: их амплитуда перестанет изменяться со временем. Причём можно обнаружить, что частота колебаний шарика (частоту вынужденных колебаний будем обозначать буквой ω в отличие от частоты собственных колебаний системы ω_0) равна частоте колебаний конца A пружины, т. е. частоте изменения внешней силы. (Эта частота равна числу оборотов диска в секунду.)

Важно

При установившихся вынужденных колебаниях частота колебаний всегда равна частоте внешней периодически действующей силы.

Резонанс. Пользуясь установкой, изображённой на рисунке 3.10, выясним, как амплитуда установившихся вынужденных колебаний зависит от частоты внешней силы. Плавно увеличивая частоту внешней силы, мы заметим, что амплитуда колебаний постепенно возрастает. Она достигает максимума, когда внешняя сила действует в такт со свободными колебаниями шарика.

При дальнейшем увеличении частоты амплитуда установившихся колебаний уменьшается. Зависимость амплитуды колебаний от частоты изображена на рисунке 3.11. При очень больших частотах внешней силы амплитуда вынужденных колебаний стремится к нулю с ростом частоты, так как тело вследствие своей инертности не успевает заметно смещаться за малые промежутки времени и «дрожит на месте».

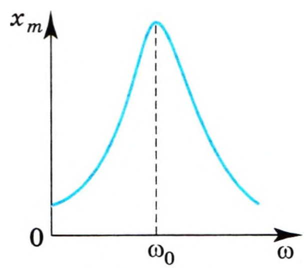


Рис. 3.11

Запомни

Резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний при совпадении частоты изменения внешней силы, действующей на систему, с частотой её свободных колебаний называется **резонансом** (от латинского слова *resonans* — дающий отзвук).

При резонансе амплитуда вынужденных колебаний максимальна из-за того, что на протяжении всего периода направление внешней силы совпадает с направлением скорости колеблющегося тела, поэтому эта сила совершает только положительную работу. При установившихся колебаниях положительная работа внешней силы равна по модулю отрицательной работе силы сопротивления.

Если частота внешней силы не равна собственной частоте ω_0 колебаний системы, то внешняя сила лишь в течение части периода совершает положительную работу. В течение же другой части периода направление силы противоположно направлению скорости и работа внешней силы будет отрицательной. В результате работа внешней силы за период невелика и соответственно невелика и амплитуда установившихся колебаний. Существенное влияние на резонанс оказывает трение в системе. Чем меньше коэффициент трения, тем больше амплитуда установившихся колебаний.

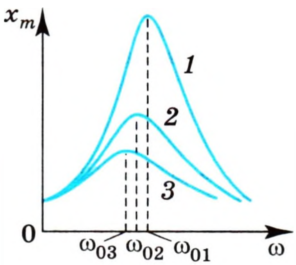


Рис. 3.12

Изменение амплитуды вынужденных колебаний в зависимости от частоты при различных коэффициентах трения и одной и той же амплитуде внешней силы изображено на рисунке 3.12. Кривой *1* соответствует минимальное трение, а кривой *3* — максимальное. На этом рисунке хорошо видно, что возрастание амплитуды вынужденных колебаний при резонансе выражено тем отчётливее, чем меньше трение в системе.

При малом трении резонанс «острый», а при большом — «тупой».

Важно

Если частота ω колебаний далека от резонансной, то амплитуда колебаний мала и почти не зависит от силы сопротивления в системе.

В системе с малым трением амплитуда колебаний при резонансе может быть очень большой даже в том случае, когда внешняя сила мала. Но большая амплитуда устанавливается только спустя продолжительное время после начала действия внешней силы. В соответствии с законом сохранения энергии вызвать в системе колебания с большой амплитудой, а значит, сообщить системе большую энергию небольшой внешней силой можно только за продолжительное время. Если трение велико, то амплитуда колебаний будет небольшой и для установления колебаний не потребуется много времени.

Воздействие резонанса и борьба с ним. Любое упругое тело, будь то мост, станина машины, её вал, корпус корабля, представляет собой колебательную систему и характеризуется собственными частотами колебаний. При работе двигателей нередко возникают периодические дополнительные

Подумайте, почему изменяется резонансная частота при увеличении силы трения.

напряжения, связанные с движением частей двигателя (например, поршней) или с недостаточно точной центровкой их вращающихся деталей (например, валов). Если частота этих периодических напряжений совпадает с частотой свободных колебаний системы, то возникает резонанс. Амплитуда колебаний может возрасти настолько, что возможна поломка машин, хотя напряжение в материале и не превышает предела прочности при статических нагрузках.

Во всех этих случаях принимаются специальные меры, чтобы не допустить наступления резонанса или ослабить его действие. Известны случаи, когда приходилось перестраивать океанские лайнеры, чтобы уменьшить вибрацию.

При переходе через мост воинским частям запрещается идти в ногу. Строевой шаг приводит к периодическому воздействию на мост. Если случайно частота этого воздействия совпадёт с собственной частотой колебаний моста, то он может разрушиться.

Затухающие и вынужденные колебания. Резонанс | Найти

1. Два маятника представляют собой шарики одинакового радиуса, подвешенные на нитях равной длины. Массы шариков различны. Колебания какого из маятников прекратятся быстрее: лёгкого или тяжёлого?
2. Какие колебания называют вынужденными? Приведите примеры вынужденных колебаний.
3. Приходилось ли вам наблюдать явление резонанса дома или на улице?
4. Для того чтобы удержать открытую дверь в вестибюле метро (дверь открывается в обе стороны и возвращается в положение равновесия пружинами), нужно приложить к ручке двери силу около 50 Н. Можно ли открыть дверь, приложив к ручке силу 0,005 Н? (Трение в петлях двери не учитывайте.)
5. При каком условии резонансные свойства колебательной системы проявляются отчётливо?
6. Автомобиль движется по неровной дороге, на которой расстояние между буграми приблизительно равно 8 м. Период свободных колебаний автомобиля на рессорах 1,5 с. При какой скорости автомобиля его колебания в вертикальной плоскости станут особенно заметными?

Повторите материал главы 3 по следующему плану:

1. Выпишите основные понятия и физические величины и дайте им определение.
2. Запишите основные формулы.
3. Укажите единицы физических величин. Выразите их через основные единицы СИ.
4. Опишите опыты, подтверждающие основные закономерности.

«Колебательные процессы в природе и технике»
1. Различные механические колебательные системы.
2. Эксперименты по исследованию колебательных систем.
3. Явление резонанса.
4. Сложение колебаний.

«Моделирование и экспериментальное исследование механических колебательных систем»

ГЛАВА 4 ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

В этой главе мы будем изучать электромагнитные колебания. Особо отметим единство колебательных процессов различной природы.

§ 17 СВОБОДНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Какое движение называется колебательным движением?
Как изменяются координаты при свободных колебаниях маятника?

Запомни

Периодические изменения заряда, силы тока и напряжения называются **электромагнитными колебаниями**.

Простейшая система, в которой могут происходить свободные электромагнитные колебания, состоит из конденсатора и катушки, присоединённой к его обкладкам (рис. 4.1), и называется **колебательным контуром.**

Интересно Электромагнитные колебания были открыты почти случайно. После того как изобрели лейденскую банку (первый конденсатор) и научились сообщать ей большой заряд с помощью электростатической машины, начали изучать электрический разряд банки. Замыкая обкладки лейденской банки с помощью проволочной катушки, обнаружили, что нельзя предсказать, какой конец сердечника катушки окажется северным полюсом, а какой — южным. Далеко не сразу поняли, что при разрядке конденсатора через катушку в электрической цепи возникают колебания, ток меняет направление много раз, в результате чего сердечник может намагничиваться различным образом.

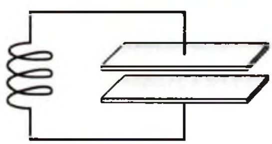


Рис. 4.1

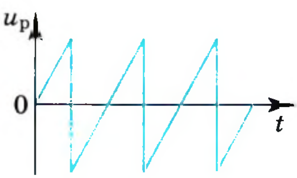


Рис. 4.2

Обычно эти колебания происходят с очень большой частотой, значительно превышающей частоту механических колебаний. Поэтому для их наблюдения и исследования очень удобен электронный осциллограф.

В электронно-лучевой трубке осциллографа узкий пучок электронов попадает на экран, способный светиться при его бомбардировке электронами. На горизонтально отклоняющие пластины трубки подаётся переменное напряжение развёртки u_p пилообразной формы (рис. 4.2). Сравнительно медленно напряжение повышается, а потом очень резко понижается. Электрическое поле между пластинами заставляет электронный луч пробегать экран в горизонтальном направлении с постоянной скоростью и затем почти мгновенно возвращаться назад. После этого весь процесс повторяется. Если теперь присоединить вертикально отклоняющие пластины трубки к конденсатору, то колебания напряжения при его разрядке вызовут колебания луча в вертикальном направлении. В результате на экране образуется временна́я развёртка колебаний (рис. 4.3), подобная той, которую вычерчивает маятник с песочницей над движущимся листом бумаги. Колебания затухают с течением времени. Эти колебания являются *свободными*.

Вспомните, какие колебания называют свободными.

Превращение энергии при электромагнитных колебаниях. Зарядим конденсатор, присоединив его на некоторое время к батарее с помощью переключателя (рис. 4.4, *а*). При этом конденсатор получит энергию

$$W_э = \frac{q_m^2}{2C}, \qquad (4.1)$$

где q_m — заряд конденсатора, C — его электроёмкость. Между обкладками конденсатора возникнет разность потенциалов U_m.

Переведём переключатель в положение *2* (рис. 4.4, *б*). Конденсатор начнёт разряжаться, и в цепи появится электрический ток. Благодаря явлению самоиндукции сила тока не сразу достигает максимального значения, а увеличивается постепенно.

Рис. 4.3

По мере разрядки конденсатора энергия электрического поля уменьшается, но одновременно возрастает энергия магнитного поля тока, которая определяется формулой

$$W_м = \frac{Li^2}{2}, \qquad (4.2)$$

где i — сила переменного тока, L — индуктивность катушки.

Полная энергия W электромагнитного поля контура равна сумме энергий его магнитного и электрического полей:

$$W = \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}. \qquad (4.3)$$

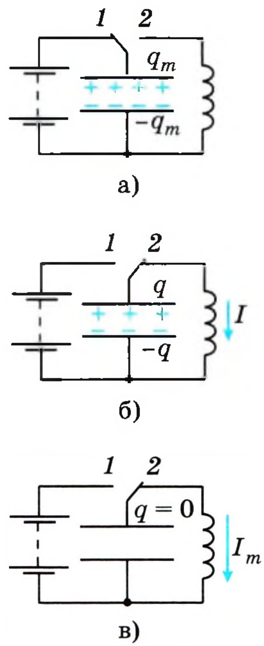


Рис. 4.4

В момент, когда конденсатор полностью разрядится ($q = 0$), энергия электрического поля станет равной нулю. Энергия же магнитного поля тока согласно закону сохранения энергии будет максимальной. В этот момент сила тока также достигнет максимального значения I_m (рис. 4.4, *в*).

Несмотря на то что к этому моменту разность потенциалов на концах катушки становится равной нулю, электрический ток не может прекратиться сразу. Как только сила тока и созданное им магнитное поле начнут уменьшаться, возникает ЭДС самоиндукции, стремящаяся поддержать ток.

В результате конденсатор будет перезаряжаться до тех пор, пока сила тока, постепенно уменьшаясь, не станет равной нулю. Энергия магнитного поля в этот момент также будет равна нулю, энергия электрического поля конденсатора опять станет максимальной.

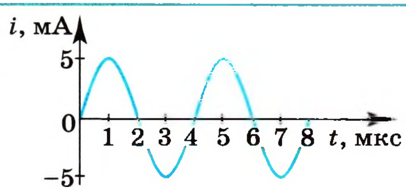
Какие преобразования энергии происходят в идеальном колебательном контуре?

После этого конденсатор вновь начнёт перезаряжаться, и система возвратится в исходное состояние. Если бы не было потерь энергии, то этот процесс продолжался бы сколь угодно долго. Колебания были бы незатухающими. Через промежутки времени, равные периоду колебаний, состояние системы в точности повторялось бы. Полная энергия при этом сохранялась бы неизменной, и её значение в любой момент времени было бы равно максимальной энергии электрического поля или максимальной энергии магнитного поля:

$$W = \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = \frac{q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2}. \qquad (4.4)$$

Электромагнитные колебания. Колебательный контур. Энергия контура Найти

1. Что называют электромагнитными колебаниями?
2. Чему равна энергия контура в произвольный момент времени?
3. Почему при подключении конденсатора к катушке он разряжается постепенно?



1. На рисунке приведён график зависимости силы тока от времени в колебательном контуре. Сколько раз энергия катушки достигает максимального значения в течение первых 6 мкс после начала отсчёта?

1) 1 раз 3) 3 раза
2) 2 раза 4) 4 раза

2. На рисунке (см. рис. задания 1) приведён график зависимости силы тока от времени в колебательном контуре. Какое утверждение о соотношении меняющихся в ходе колебаний величин верно для момента времени $t = 2$ с?

1) энергия катушки минимальна, энергия конденсатора максимальна
2) энергия катушки максимальна, энергия конденсатора минимальна
3) энергия катушки равна энергии конденсатора
4) сумма энергий катушки и конденсатора минимальна

3. Отношение максимальных значений силы тока и напряжения в колебательном контуре равно 10^2. Отношение индуктивности катушки к электроёмкости конденсатора в этом контуре равно

1) 10^4 2) 10^2 3) 10^{-4} 4) 10^{-2}

§ 18 АНАЛОГИЯ МЕЖДУ МЕХАНИЧЕСКИМИ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ

При каких начальных условиях возможны электрические колебания в колебательном контуре?
Какие физические процессы происходят в колебательном контуре?
Какие физические величины изменяются?

Электромагнитные колебания в контуре имеют сходство со свободными механическими колебаниями, например с колебаниями тела, закреплённого на пружине (пружинный маятник). Хотя причины, вызывающие колебания, имеют разную физическую природу, характер периодического изменения различных величин одинаков.

При механических колебаниях периодически изменяются координата тела x и проекция его скорости v_x, а при электромагнитных колебаниях изменяются заряд q конденсатора и сила тока i в цепи. Одинаковый характер изменения величин (механических и электрических) объясняется тем, что имеется аналогия в условиях, при которых возникают механические и электромагнитные колебания.

Возвращение к положению равновесия тела на пружине вызывается силой упругости $F_{x\ \text{упр}}$, пропорциональной смещению тела от положения равновесия. Коэффициентом пропорциональности является жёсткость пружины k.

Разрядка конденсатора (появление тока) обусловлена напряжением u между пластинами конденсатора, которое пропорционально заряду q. Коэффициентом пропорциональности является величина $\frac{1}{C}$, обратная ёмкости, так как $u = \frac{1}{C}q$.

Подобно тому как вследствие инертности тело лишь постепенно увеличивает скорость под действием силы и эта скорость после прекращения действия силы не становится сразу равной нулю, электрический ток в катушке за счёт явления самоиндукции увеличивается под действием напряжения постепенно и не исчезает сразу, когда это напряжение становится равным нулю. Индуктивность контура L выполняет ту же роль, что и масса тела при механических колебаниях. Соответственно кинетическая энергия тела $\frac{mv_x^2}{2}$ аналогична энергии магнитного поля тока $\frac{Li^2}{2}$.

Зарядка конденсатора от батареи аналогична сообщению телу, прикреплённому к пружине, потенциальной энергии $\frac{kx_m^2}{2}$ при смещении тела на расстояние x_m от положения равновесия (рис. 4.5, *а*). Сравнивая это выражение с энергией конденсатора $\frac{q_m^2}{2C}$, замечаем, что жёсткость k пружины играет при механических колебаниях ту же роль, что и величина $\frac{1}{C}$,

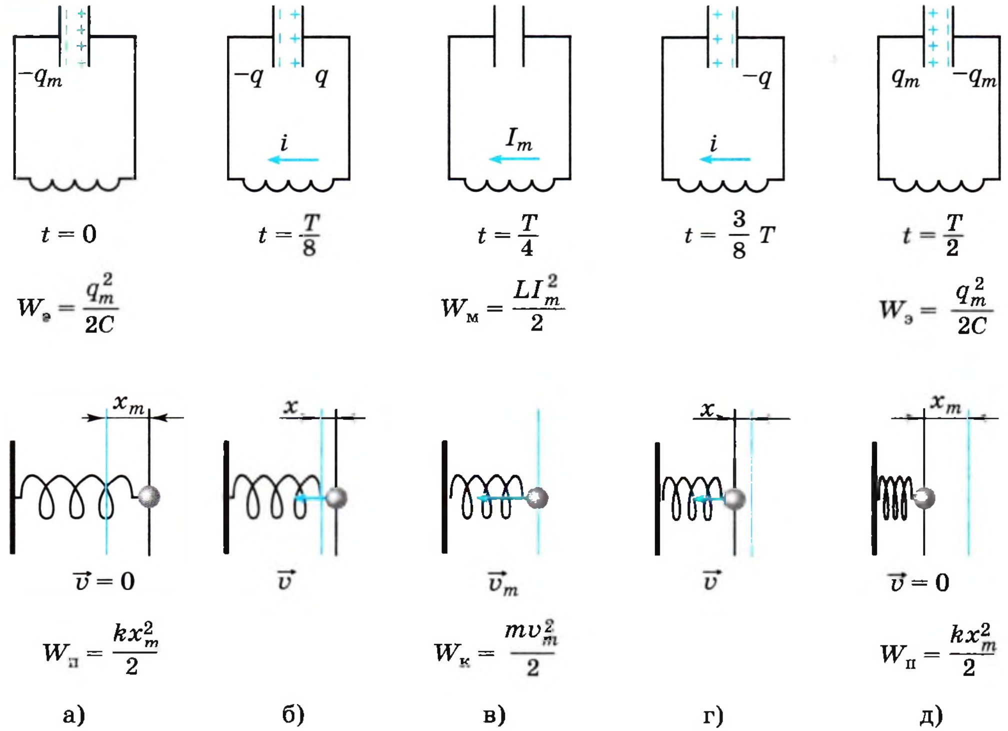


Рис. 4.5

обратная ёмкости, при электромагнитных колебаниях. При этом начальная координата x_m соответствует заряду q_m.

Возникновение в электрической цепи тока i соответствует появлению в механической колебательной системе скорости тела v_x под действием силы упругости пружины (рис. 4.5, *б*).

Момент времени, когда конденсатор полностью разрядится, а сила тока достигнет максимума, аналогичен тому моменту времени, когда тело будет проходить с максимальной скоростью (рис. 4.5, *в*) положение равновесия.

Далее конденсатор в ходе электромагнитных колебаний начнёт перезаряжаться, а тело в ходе механических колебаний — смещаться влево от положения равновесия (рис. 4.5, *г*). По прошествии половины периода T конденсатор полностью перезарядится и сила тока станет равной нулю.

При механических колебаниях этому соответствует отклонение тела в крайнее левое положение, когда его скорость равна нулю (рис. 4.5, *д*).

Нарисуйте аналогичные схемы состояний колебательных систем для моментов времени, равных $\frac{3}{4}T$ и T.

Обсудите с одноклассниками, можно ли провести аналогию между электрическими колебаниями в колебательном контуре и колебаниями математического маятника.

Соответствие между механическими и электрическими величинами при колебательных процессах приведено в таблице.

Механическая величина	**Электрическая величина**
Координата x	Заряд q
Скорость v_x	Сила тока i
Масса m	Индуктивность L
Жёсткость пружины k	Величина, обратная ёмкости, $\frac{1}{C}$
Потенциальная энергия $\frac{kx^2}{2}$	Энергия электрического поля $\frac{q^2}{2C}$
Кинетическая энергия $\frac{mv_x^2}{2}$	Энергия магнитного поля $\frac{Li^2}{2}$

Важно

Таким образом, электромагнитные и механические колебания имеют разную природу, но описываются одинаковыми уравнениями.

Колебательный контур. Маятник. Аналогия между колебаниями

Найти

?

1. В чём проявляется аналогия между электромагнитными колебаниями в контуре и колебаниями пружинного маятника?
2. За счёт какого явления электрический ток в колебательном контуре не исчезает сразу, когда напряжение на конденсаторе становится равным нулю, а тело не останавливается, проходя положение равновесия?
3. Какие превращения энергии происходят при механических и электромагнитных колебаниях, если затухание мало?
4. Какая величина, характеризующая электромагнитные колебания, аналогична ускорению тела при механических колебаниях?
5. Можно ли говорить о том, что электромагнитные колебания происходят благодаря ЭДС самоиндукции подобно тому, как мы говорим, что механические колебания происходят благодаря действию силы упругости?

§ 19 ГАРМОНИЧЕСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ. ФОРМУЛА ТОМСОНА

В какой момент времени сила тока в колебательном контуре максимальна? В какой момент времени ток в контуре не идёт?

Рассмотрим уравнения, которые позволят рассчитать значения физических величин при колебаниях в контуре.

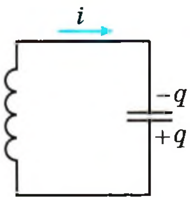


Рис. 4.6

Уравнение, описывающее процессы в колебательном контуре. Рассмотрим колебательный контур, сопротивлением R которого можно пренебречь (рис. 4.6).

Уравнение, описывающее свободные электрические колебания в контуре, можно получить с помощью закона сохранения энергии. Полная электромагнитная энергия W контура в любой момент времени равна сумме энергий магнитного и электрического полей:

$$W = \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}.$$

Эта энергия не меняется с течением времени, если сопротивление R контура равно нулю. Значит, производная полной энергии по времени равна нулю. Следовательно, равна нулю сумма производных по времени от энергий магнитного и электрического полей:

$$\left(\frac{Li^2}{2}\right)' + \left(\frac{q^2}{2C}\right)' = 0,$$

или

$$\left(\frac{Li^2}{2}\right)' = -\left(\frac{q^2}{2C}\right)'. \qquad (4.5)$$

Физический смысл уравнения (4.5) состоит в том, что скорость изменения энергии магнитного поля по модулю равна скорости изменения энергии электрического поля; знак «−» указывает на то, что, когда энергия электрического поля возрастает, энергия магнитного поля убывает (и наоборот).

Вычислив производные в уравнении (4.5), получим

$$\frac{L}{2} \cdot 2ii' = -\frac{1}{2C} \cdot 2qq'. \qquad (4.6)$$

Важно

Мы вычисляем производные по времени. Поэтому производная $(i^2)'$ равна не просто $2i$, как было бы при вычислении производной по i. Нужно $2i$ умножить ещё на производную i' силы тока по времени, так как вычисляется производная от сложной функции. То же самое относится к производной $(q^2)'$.

Но производная заряда по времени представляет собой силу тока в данный момент времени:

$$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = q'. \qquad (4.7)$$

Поэтому уравнение (4.6) можно переписать в следующем виде:

$$Li'i = -\frac{qi}{C}, \quad \text{или} \quad Li' = -\frac{q}{C}. \qquad (4.8)$$

Производная силы тока по времени есть не что иное, как вторая производная заряда по времени, подобно тому как производная скорости по времени (ускорение) есть вторая производная координаты по времени. Подставив в уравнение (4.8) $i' = q''$ и разделив левую и правую части этого уравнения на L, получим *основное уравнение, описывающее свободные гармонические электрические колебания в контуре*:

> Выведите уравнение (4.9), приравнивая разность потенциалов между пластинами конденсатора к ЭДС самоиндукции.

$$\boxed{q'' = -\frac{1}{LC}q.} \qquad (4.9)$$

Уравнение (4.9) аналогично уравнению (3.11), описывающему гармонические механические колебания.

Формула Томсона. В уравнении (3.11) коэффициент ω_0^2 представляет собой квадрат собственной частоты колебаний. Поэтому и коэффициент $\frac{1}{LC}$ в уравнении (4.9) также представляет собой квадрат циклической частоты для свободных электрических колебаний:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \qquad (4.10)$$

Период свободных колебаний в контуре, таким образом, равен:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}.} \qquad (4.11)$$

Запомни

Формула (4.11) называется **формулой Томсона** в честь английского физика У. Томсона (Кельвина), который её впервые вывел.

Увеличение периода свободных колебаний с возрастанием L и C наглядно можно пояснить так. При увеличении индуктивности L ток медленнее нарастает со временем и медленнее падает до нуля. А чем больше ёмкость C, тем большее время требуется для перезарядки конденсатора.

Гармонические колебания заряда и тока. Подобно тому как координата при механических колебаниях (в случае, когда в начальный момент времени отклонение тела маятника от положения равновесия максимально) изменяется со временем по гармоническому закону:

$$x = x_m \cos \omega_0 t,$$

заряд конденсатора меняется с течением времени по такому же закону:

$$q = q_m \cos \omega_0 t, \qquad (4.12)$$

где q_m — амплитуда колебаний заряда.

Сила тока также совершает гармонические колебания:

$$i = q' = -\omega_0 q_m \sin \omega_0 t = I_m \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right), \qquad (4.13)$$

где $I_m = q_m \omega_0$ — амплитуда колебаний силы тока. Колебания силы тока опережают по фазе на $\frac{\pi}{2}$ колебания заряда (рис. 4.7).

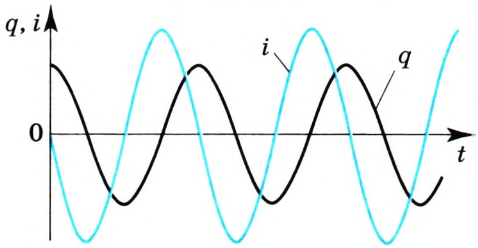


Рис. 4.7

Точно так же колебания скорости тела в случае пружинного или математического маятника опережают на $\frac{\pi}{2}$ колебания координаты (смещения) этого тела.

В действительности из-за неизбежного наличия сопротивления электрической цепи колебания будут затухающими. Сопротивление R также будет влиять и на период колебаний: чем больше сопротивление R, тем бо́льшим будет период колебаний. При достаточно большом сопротивлении колебания совсем не возникнут. Конденсатор разрядится, но перезарядки его не произойдёт, энергия электрического и магнитного полей перейдёт в тепло.

Чему равны сила тока и напряжение при $t = 0$? Как записать закон изменения заряда, если в начальный момент времени $q = 0$, а сила тока максимальна?

Уравнение гармонических колебаний в контуре. Формула Томсона

1. В чём различие между свободными и вынужденными электрическими колебаниями?
2. Как изменится период свободных электрических колебаний в контуре, если ёмкость конденсатора в нём вдвое увеличить или же вдвое уменьшить?
3. Как связаны амплитуды колебаний заряда и тока при разрядке конденсатора через катушку?

1. Что из перечисленных предметов **обязательно** входит в состав цепи постоянного тока и колебательного контура? К каждой позиции первого столбца подберите нужную позицию второго и запишите выбранные цифры рядом с соответствующими буквами.

Физическое устройство	Его необходимый элемент
А) Цепь постоянного тока	1) Амперметр 2) Источник тока
Б) Колебательный контур	3) Конденсатор 4) Постоянный магнит

§ 20 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ГАРМОНИЧЕСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ»

Для решения задач на данную тему, как правило, необходимо уметь составлять уравнения колебаний заряда на пластинах конденсатора и силы тока, идущего через катушку, учитывая начальные условия. Кроме этого, нужно знать выражения для энергии электрического поля конденсатора и магнитного поля катушки и понимать, за счёт чего происходят изменения этих энергий.

Задача 1. Максимальный заряд на обкладках конденсатора колебательного контура $q_m = 10^{-6}$ Кл. Амплитудное значение силы тока в контуре $I_m = 10^{-3}$ А. Определите период колебаний. (Потерями на нагревание проводников можно пренебречь.)

Р е ш е н и е. Амплитудные значения силы тока и заряда связаны соотношением $I_m = \omega_0 q_m$, откуда $\omega_0 = \dfrac{I_m}{q_m}$.

Следовательно, $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \dfrac{q_m}{I_m} \approx 6,3 \cdot 10^{-3}$ (с).

Задача 2. В колебательном контуре, состоящем из катушки индуктивностью $L = 2$ Гн и конденсатора ёмкостью $C = 4,5$ мкФ, максимальное значение заряда на пластинах конденсатора $q_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл. Определите максимальную силу тока, а также силу тока в тот момент, когда заряд на пластинах равен половине максимального.

Р е ш е н и е. В идеальном колебательном контуре энергия электрического поля полностью переходит в энергию магнитного поля и обратно. Поэтому $\dfrac{q_0^2}{2C} = \dfrac{LI_0^2}{2}$. Отсюда $I_0 = \dfrac{q_0}{\sqrt{LC}} \approx 6,7 \cdot 10^{-4}$ А.

Полная энергия электромагнитного поля при колебаниях в колебательном контуре остаётся постоянной и равной сумме энергий электрического поля конденсатора и магнитного поля катушки. Тогда $\dfrac{q_0^2}{2C} = \dfrac{LI^2}{2} + \dfrac{q^2}{2C}$.

Если в какой-то момент времени $q = q_0/2$, то $\dfrac{q_0^2}{2C} = \dfrac{LI^2}{2} + \dfrac{q_0^2}{8C}$ и $\dfrac{3q_0^2}{8C} = \dfrac{LI^2}{2}$.

Сила тока в этот момент $I = \dfrac{\sqrt{3}q_0}{2\sqrt{CL}} = 5,8 \cdot 10^{-4}$ А.

Задача 3. Как изменяется амплитуда колебаний силы тока в катушке колебательного контура, если в момент, когда заряд на пластинах конденсатора максимален, расстояние между ними увеличивается в 1,44 раза?

Р е ш е н и е. При увеличении расстояния между пластинами положительную работу совершают внешние силы и энергия увеличивается.

Энергия электрического поля конденсатора $W_э = \frac{q_0^2}{2C}$. При увеличении расстояния между пластинами в 1,44 раза электроёмкость уменьшается также в 1,44 раза, а энергия соответственно увеличивается.

Так как максимальная энергия электрического поля при колебаниях равна максимальной энергии магнитного поля, то и энергия магнитного поля увеличивается в 1,44 раза.

Индуктивность катушки не меняется, амплитуда колебаний силы тока $I_{02} = \sqrt{1{,}44}\ I_{01} = 1{,}2\,I_{01}$.

Задача 4. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 0{,}2$ Гн и конденсатора ёмкостью $C = 2 \cdot 10^{-5}$ Ф. Конденсатор зарядили до напряжения 4 В, т. е. в момент времени $t = 0$ напряжение $U_0 = 4$ В. Какими будут сила тока в контуре, напряжение и заряд на пластинах конденсатора в момент времени, когда отношение энергий электрического и магнитного полей равно 0; 1/2?

Р е ш е н и е. Напряжение и заряд на обкладках конденсатора изменяются по закону $U = U_0 \cos \omega t$, $q = q_0 \cos \omega t$, где U_0 и q_0 — амплитудные значения напряжения и заряда, а $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Сила тока изменяется по формуле $I = -q_0\omega \sin \omega t = -I_0 \sin \omega t$.

Энергии электрического и магнитного полей равны $W_э = \frac{CU^2}{2}$, $W_м = \frac{LI^2}{2}$.

Отношение энергий $\frac{W_э}{W_м} = \frac{CU^2}{LI^2}$.

1) При $\frac{W_э}{W_м} = 0$ $W_э = 0$. Это означает, что заряд и напряжение на обкладках конденсатора равны нулю: $q_1 = 0$, $U_1 = 0$. Энергия магнитного поля максимальна и равна $W_м = \frac{LI_0^2}{2}$, т. е. равна энергии электрического поля в начальный момент времени: $W_м = W_э = \frac{CU_0^2}{2}$, откуда амплитудное значение силы тока $I_0 = I_1 = U_0\sqrt{\frac{C}{L}} = 0{,}04$ А. Здесь q_1, U_1, I_1 – значения заряда, напряжения и силы тока в момент времени, когда отношение $\frac{W_э}{W_м} = 0$.

2) При $\frac{W_э}{W_м} = 1/2$ отношение напряжения к силе тока $\frac{U}{I} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{L}{C}} = \pm\frac{U_0}{I_0}\operatorname{ctg}\omega t$.

В свою очередь, $\frac{U_0}{I_0} = \sqrt{\frac{L}{C}}$, тогда $\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{L}{C}} = \pm\sqrt{\frac{L}{C}}\,\mathrm{ctg}\,\omega t$, $\mathrm{ctg}\,\omega t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Первый раз отношение энергий будет равно $\frac{1}{2}$ в момент времени t_1 при условии, что $0 < \omega t_1 < \frac{\pi}{2}$. Тогда $\omega t_1 = \mathrm{arcctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$, и $\omega t_1 \approx 54{,}7°$.

Рассчитаем значения силы тока, напряжения и заряда при $\frac{W_э}{W_м} = \frac{1}{2}$:

$I_2 = -I_0 \sin\omega t_1 \approx -3{,}3 \cdot 10^{-2}$ А, $U_2 = U_0 \cos\omega t_1 \approx 2{,}3$ В,

$q_2 = q_0 \cos\omega t_1 = \frac{I_0}{\omega}\cos\omega t_1 \approx 4{,}7 \cdot 10^{-5}$ Кл.

Здесь q_2, U_2, I_2 – значения заряда, напряжения и силы тока в момент времени t_1, когда отношение $\frac{W_э}{W_м} = \frac{1}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. После того как конденсатору колебательного контура был сообщён заряд $q = 10^{-5}$ Кл, в контуре возникли затухающие колебания. Какое количество теплоты выделится в контуре к тому времени, когда колебания в нём полностью затухнут? Ёмкость конденсатора $C = 0{,}01$ мкФ.

2. В колебательном контуре, состоящем из катушки индуктивностью $L = 2$ Гн и конденсатора ёмкостью $C = 4{,}5$ мкФ, максимальное значение заряда на обкладках конденсатора $q_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл. Запишите законы изменения напряжения на конденсаторе и силы тока в контуре от времени.

3. В колебательном контуре происходят колебания с амплитудой напряжения U_1. В момент времени, когда заряд на пластинах конденсатора максимален, их сдвигают, уменьшая расстояние между ними в $N = 2$ раза, при этом заряд на пластинах не успевает измениться. Определите амплитуду напряжения. Во сколько раз изменится частота колебаний после сдвига пластин?

4. Определите отношение энергий магнитного и электрического полей $W_м/W_э$ в колебательном контуре в момент времени $T/6$, где T — период колебаний контура. В начальный момент времени сила тока $I = 0$.

1. Энергия электромагнитного поля в колебательном контуре, содержащем катушку индуктивностью 0,1 Гн и конденсатор ёмкостью 0,9 мкФ, равна 1,8 мкДж. В момент, когда напряжение на конденсаторе максимально, подключают на короткое время источник напряжением 5 В. Определите изменение амплитудного значения силы тока, идущего через катушку.

2. Конденсатор контура с периодом колебаний 10^{-5} с заполнили диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 1{,}6$. Индуктивность катушки увеличили в 1000 раз, вставив железный сердечник. Чему стал равен период колебаний энергии магнитного поля в контуре?

§ 21 ПЕРЕМЕННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК. РЕЗИСТОР В ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Что происходит с амплитудой колебаний в колебательном контуре?

Рис. 4.8

Переменный ток в осветительной сети квартиры, применяемый на заводах и фабриках и т. д., представляет собой не что иное, как вынужденные электромагнитные колебания. Сила тока и напряжение меняются со временем по гармоническому закону, частота колебаний определяется частотой подключённого в цепь источника напряжения.

Колебания напряжения легко обнаружить с помощью осциллографа. Если на вертикально отклоняющие пластины осциллографа подать напряжение от сети, то временна́я развёртка на экране будет представлять собой синусоиду (рис. 4.8). Зная скорость движения луча по экрану в горизонтальном направлении (она определяется частотой пилообразного напряжения), можно вычислить частоту колебаний. Частота переменного тока — это число колебаний в 1 с.

Если напряжение на концах цепи меняется по гармоническому закону, то и напряжённость электрического поля внутри проводников будет также меняться гармонически. Эти гармонические изменения напряжённости поля, в свою очередь, вызывают гармонические колебания скорости упорядоченного движения заряженных частиц и, следовательно, гармонические колебания силы тока. Но при изменении напряжения на концах цепи электрическое поле не меняется мгновенно во всей цепи. Изменения поля распространяются хотя и с очень большой, но не с бесконечно большой скоростью.

Однако, если время распространения изменений поля в цепи много меньше периода колебаний напряжения, можно считать, что электрическое поле во всей цепи сразу же меняется при изменении напряжения на концах цепи. При этом сила тока в данный момент времени будет иметь практически одно и то же значение во всех сечениях неразветвлённой цепи.

Переменное напряжение в гнёздах розетки осветительной сети создаётся генераторами на электростанциях.

Интересно Стандартная частота промышленного переменного тока равна 50 Гц. Это означает, что на протяжении 1 с ток 50 раз идёт в одну сторону и 50 раз — в противоположную. Частота 50 Гц принята для промышленного тока во многих странах мира. В США принята частота 60 Гц.

На основании какой формулы мы можем доказать, что гармонические изменения напряжённости поля вызывают гармонические колебания средней скорости упорядоченного движения заряженных частиц и, следовательно, гармонические колебания силы тока?

Модель генератора переменного тока. Проволочную рамку, вращающуюся в постоянном однородном магнитном поле, можно рассматривать как простейшую модель генератора переменного тока. Поток магнитной индукции Ф, пронизывающий поверхность, ограниченную проволочной рамкой площадью S, пропорционален косинусу угла α между нормалью к рамке и вектором магнитной индукции (рис. 4.9): $\Phi = BS \cos \alpha$.

При равномерном вращении рамки угол α увеличивается прямо пропорционально времени: $\alpha = \omega t$, где ω — угловая скорость вращения рамки. Поток магнитной индукции меняется по гармоническому закону:

$$\Phi = BS \cos \omega t.$$

Здесь величина ω играет уже роль циклической частоты.

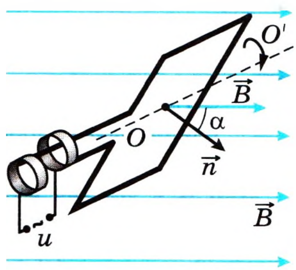


Рис. 4.9

Согласно закону электромагнитной индукции ЭДС индукции в рамке равна взятой со знаком «−» скорости изменения потока магнитной индукции, т. е. производной потока магнитной индукции по времени:

$$e = -\Phi' = -BS\,(\cos \omega t)' = BS\omega \sin \omega t = \mathscr{E}_m \sin \omega t,$$

где $\mathscr{E}_m = BS\omega$ — амплитуда ЭДС индукции. Возникающее переменное напряжение снимается с помощью контактных колец.

Если к рамке подключить колебательный контур, то угловая скорость ω вращения рамки определит частоту ω колебаний значений ЭДС, напряжения на различных участках цепи и силы тока.

Мы будем изучать в дальнейшем вынужденные электрические колебания, происходящие в цепях под действием напряжения, меняющегося с циклической частотой ω по формуле синуса или косинуса:

$$u = U_m \sin \omega t \text{ или } u = U_m \cos \omega t, \tag{4.14}$$

где U_m — амплитуда напряжения, т. е. максимальное по модулю значение напряжения.

Если напряжение меняется с циклической частотой ω, то и сила тока в цепи будет меняться с той же частотой. Но колебания силы тока необязательно должны совпадать по фазе с колебаниями напряжения. Поэтому в общем случае сила тока i в любой момент времени (мгновенное значение силы тока) определяется по формуле

$$i = I_m \sin (\omega t + \varphi_c), \tag{4.15}$$

где I_m — амплитуда силы тока, т. е. максимальное по модулю значение силы тока, а φ_c — разность (сдвиг) фаз между колебаниями силы тока и напряжения.

Резистор в цепи переменного тока. Пусть цепь состоит из соединительных проводов и нагрузки с малой индуктивностью и большим сопротивлением R (рис. 4.10).

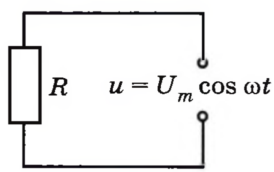


Рис. 4.10

Запомни

Величину, которую мы до сих пор называли электрическим сопротивлением или просто сопротивлением, теперь будем называть **активным сопротивлением.**

Сопротивление R называется активным, потому что при наличии нагрузки, обладающей этим сопротивлением, цепь поглощает энергию, поступающую от генератора. Эта энергия превращается во внутреннюю энергию проводников — они нагреваются. Будем считать, что напряжение на зажимах цепи меняется по гармоническому закону:

$$u = U_m \cos \omega t.$$

Подумайте: учитываем ли мы при написании формулы $u = U_m \cos \omega t$ сопротивление соединительных проводов?

Как и в случае постоянного тока, мгновенное значение силы тока прямо пропорционально мгновенному значению напряжения. Поэтому для нахождения мгновенного значения силы тока можно применить закон Ома:

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m \cos \omega t}{R} = I_m \cos \omega t. \tag{4.16}$$

Важно

В проводнике с активным сопротивлением колебания силы тока совпадают по фазе с колебаниями напряжения (рис. 4.11), а амплитуда силы тока определяется равенством

$$I_m = \frac{U_m}{R}. \tag{4.17}$$

Мощность в цепи с резистором. В цепи переменного тока промышленной частоты (ν = 50 Гц) сила тока и напряжение изменяются сравнительно быстро. Поэтому при прохождении тока по проводнику, например по нити электрической лампочки, количество выделенной энергии также будет быстро меняться со временем.

Как правило, нас интересует значение *средней мощности* тока на участке цепи за большой промежуток времени, включающий много периодов. Для этого достаточно найти среднюю мощность за один период.

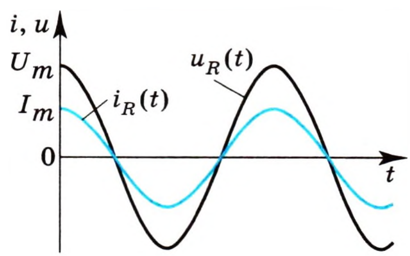


Рис. 4.11

Важно

Под средней за период мощностью переменного тока понимают отношение суммарной энергии, поступающей в цепь за период, к периоду.

Мгновенная мощность в цепи переменного тока на участке, имеющем активное сопротивление R, определяется формулой

$$P_{мгн} = i^2_{мгн} R. \tag{4.18}$$

Найдём среднее значение мощности за период. Для этого сначала преобразуем формулу (4.18), подставляя в неё выражение (4.16) для силы тока и используя известное тригонометрическое соотношение $\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$:

$$P = \frac{I_m^2 R}{2}(1 + \cos 2\omega t) = \frac{I_m^2 R}{2} + \frac{I_m^2 R}{2}\cos 2\omega t. \qquad (4.19)$$

График зависимости мгновенной мощности от времени изображён на рисунке 4.12, *а*. Согласно графику (рис. 4.12, *б*) на протяжении одной восьмой периода, когда $\cos 2\omega t > 0$, мощность в любой момент времени больше, чем $\dfrac{I_m^2 R}{2}$. Зато на протяжении следующей восьмой части периода, когда $\cos 2\omega t < 0$, мощность в любой момент времени меньше, чем $\dfrac{I_m^2 R}{2}$. Среднее за период значение $\cos 2\omega t$ равно нулю (см. рис. 4.12, *б*), а значит, равно нулю второе слагаемое в уравнении (4.19).

Вспомните и запишите выражение для мощности постоянного тока.

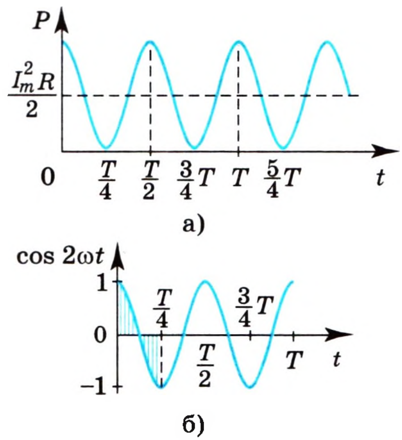


Рис. 4.12

Средняя мощность $\overline{P}$ равна, таким образом, первому слагаемому в формуле (4.19):

$$\overline{P} = \overline{i^2} R = \frac{I_m^2 R}{2}. \qquad (4.20)$$

Действующие значения силы тока и напряжения. Из формулы (4.20) видно, что величина $\dfrac{I_m^2}{2}$ есть среднее за период значение квадрата силы тока:

$$\overline{i^2} = \frac{I_m^2}{2}. \qquad (4.21)$$

Запомни

Величина, равная квадратному корню из среднего значения квадрата силы тока, называется **действующим значением** силы переменного тока.

Действующее значение силы переменного тока обозначается через I:

$$I = \sqrt{\overline{i^2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \qquad (4.22)$$

Важно

Действующее значение силы переменного тока равно силе такого постоянного тока, при котором в проводнике выделяется то же количество теплоты, что и при переменном токе за то же время.

Действующее значение переменного напряжения определяется аналогично действующему значению силы тока:

$$U = \sqrt{\overline{u^2}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}. \tag{4.23}$$

Почему удобнее пользоваться не мгновенными значениями силы тока и напряжения, а действующими значениями?

Заменяя в формуле (4.17) амплитудные значения силы тока и напряжения на их действующие значения, получаем

$$I = \frac{U}{R}. \tag{4.24}$$

Это закон Ома для участка цепи переменного тока с резистором.

Амперметры и вольтметры регистрируют именно действующие значения силы переменного тока и напряжения.

Среднее значение мощности P переменного тока

$$P = I^2R = UI.$$

Переменный ток. Действующие значения силы тока и напряжения Найти

1. При каких условиях в электрической цепи возникают вынужденные электромагнитные колебания?
2. Одинаково ли мгновенное значение силы переменного тока в данный момент времени во всех участках неразветвлённой цепи?
3. Чему равна амплитуда напряжения в осветительных сетях переменного тока, рассчитанных на напряжение 220 В?
4. Что называют действующими значениями силы тока и напряжения?

1. Напряжение на выходных клеммах генератора меняется по закону $u = 280\cos(100t)$. Действующее значение напряжения в этом случае равно
1) 396 В 2) 280 В 3) 200 В 4) 100 В

2. По участку цепи сопротивлением R идёт переменный ток, меняющийся по гармоническому закону. В некоторый момент времени действующее значение напряжения на этом участке увеличили в 2 раза, а сопротивление участка уменьшили в 4 раза. При этом мощность тока
1) не изменилась
2) возросла в 16 раз
3) возросла в 4 раза
4) уменьшилась в 2 раза

§ 22 КОНДЕНСАТОР И КАТУШКА ИНДУКТИВНОСТИ В ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Как изменяется за период заряд на конденсаторе в колебательном контуре? Как изменяется за период сила тока в катушке индуктивности?

Конденсатор в цепи переменного тока. Постоянный ток, в отличие от переменного, не может идти по цепи, содержащей конденсатор. Ведь фактически при этом цепь оказывается разомкнутой. В этом можно убедиться с помощью простого опыта.

Пусть у нас имеются источники постоянного и переменного напряжений. Цепь состоит из конденсатора и лампы накаливания (рис. 4.13), соединённых последовательно. При включении постоянного напряжения (переключатель повёрнут влево, цепь подключена к точкам AA') лампа не светится. Но при включении переменного напряжения (переключатель повёрнут вправо, цепь подключена к точкам BB') лампа загорается, если ёмкость конденсатора и действующее напряжение источника достаточно велики. Как же переменный ток может идти по цепи, если она фактически разомкнута? Всё дело в том, что происходит периодическая зарядка и разрядка конденсатора под действием переменного напряжения. Ток, идущий в цепи при перезарядке конденсатора, нагревает нить лампы.

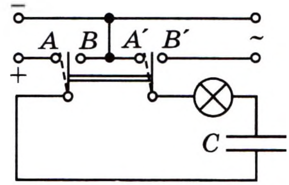


Рис. 4.13

Установим, как меняется со временем сила тока в цепи, содержащей только конденсатор, если сопротивлением проводов и обкладок конденсатора можно пренебречь (рис. 4.14).

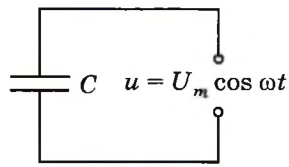


Рис. 4.14

Напряжение на конденсаторе $u = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{C}$ равно напряжению на концах цепи. Следовательно,

$$\frac{q}{C} = U_m \cos \omega t. \tag{4.25}$$

Заряд конденсатора меняется по гармоническому закону:

$$q = CU_m \cos \omega t. \tag{4.26}$$

Сила тока, представляющая собой производную заряда по времени, равна:

$$i = q' = -U_m C\omega \sin \omega t = U_m C\omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \tag{4.27}$$

Важно

Колебания силы тока опережают по фазе колебания напряжения на конденсаторе на $\frac{\pi}{2}$ (рис. 4.15).

Амплитуда силы тока равна:

$$I_m = U_m C\omega. \tag{4.28}$$

Если ввести обозначение

$$\frac{1}{\omega C} = X_C \qquad (4.29)$$

и вместо амплитуд силы тока и напряжения использовать их действующие значения, то получим

$$I = \frac{U}{X_C}. \qquad (4.30)$$

Запомни

Величину X_C, обратную произведению ωC циклической частоты на электрическую ёмкость конденсатора, называют **ёмкостным сопротивлением.**

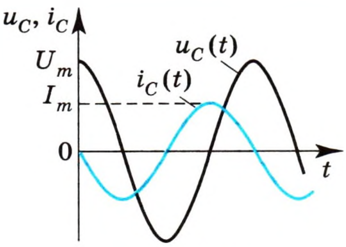


Рис. 4.15

Роль этой величины для амплитудных и действующих значений силы тока и напряжения аналогична роли активного сопротивления R в законе Ома (см. формулу (4.17)). Это позволяет рассматривать величину X_C как сопротивление конденсатора переменному току (ёмкостное сопротивление).

Чем больше ёмкость конденсатора, тем больше ток перезарядки. Это легко обнаружить по увеличению накала лампы при увеличении ёмкости конденсатора. В то время как сопротивление конденсатора постоянному току бесконечно велико, его сопротивление переменному току имеет конечное значение X_C. С увеличением ёмкости оно уменьшается. Уменьшается оно и с увеличением частоты ω.

Следует отметить, что на протяжении четверти периода, когда конденсатор заряжается до максимального напряжения, энергия поступает в цепь и запасается в конденсаторе в форме энергии электрического поля. В следующую четверть периода, при разрядке конденсатора, эта энергия возвращается в сеть.

Предложите способы изменения ёмкостного сопротивления в электрической цепи.

Катушка индуктивности в цепи переменного тока. Индуктивность в цепи, так же как и ёмкость, влияет на силу переменного тока. Это можно доказать с помощью простого опыта.

Соберём цепь из катушки с большой индуктивностью и электрической лампы накаливания (рис. 4.16). С помощью переключателя можно подключить эту цепь либо к источнику постоянного напряжения, либо к источнику переменного напряжения. При этом постоянное напряжение и действующее значение переменного напряжения должны быть равны. Опыт показывает, что лампа светится ярче при постоянном напряжении. Следовательно, действующее значение силы переменного тока в рассматриваемой цепи меньше силы постоянного тока.

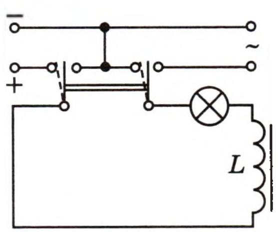


Рис. 4.16

Объясняется это различие явлением самоиндукции.

> Вспомните, от чего зависит скорость установления постоянного тока в цепи, содержащей катушку индуктивности.

При подключении катушки индуктивности к источнику постоянного напряжения сила тока в цепи нарастает постепенно. Возникающее при этом вихревое электрическое поле тормозит движение электронов. Лишь по прошествии некоторого времени сила тока достигает наибольшего (установившегося) значения, соответствующего данному постоянному напряжению.

Если напряжение быстро меняется, то сила тока не будет успевать достигнуть тех значений, которые она приобрела бы с течением времени при постоянном напряжении.

Следовательно, максимальное значение силы переменного тока (его амплитуда) ограничивается индуктивностью цепи и будет тем меньше, чем больше индуктивность и чем больше частота приложенного напряжения.

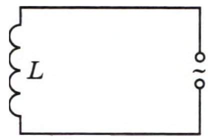


Рис. 4.17

Определим силу тока в цепи, содержащей катушку, активным сопротивлением которой можно пренебречь (рис. 4.17). Для этого предварительно найдём связь между напряжением на катушке и ЭДС самоиндукции в ней.

Если сопротивление катушки равно нулю, то и напряжённость электрического поля внутри проводника в любой момент времени должна быть равна нулю. Иначе сила тока согласно закону Ома была бы бесконечно большой. Равенство нулю напряжённости поля оказывается возможным потому, что напряжённость $\vec{E}_i$ вихревого электрического поля, порождаемого переменным магнитным полем, в каждой точке равна по модулю и противоположна по направлению напряжённости $\vec{E}_к$ кулоновского поля, создаваемого в проводнике зарядами, расположенными на зажимах источника и в проводах цепи.

Из равенства $\vec{E}_i = -\vec{E}_к$ следует, что

Важно

работа сил вихревого поля по перемещению единичного электрического заряда равна по модулю и противоположна по знаку удельной работе кулоновского поля.

Учитывая, что удельная работа кулоновского поля равна напряжению на концах катушки, можно записать: $e_i = -u$.

> Вспомните, чему равна работа кулоновских сил в замкнутом контуре.

При изменении силы тока по гармоническому закону $i = I_m \sin \omega t$ ЭДС самоиндукции равна:

$$e_i = -Li' = -L\omega I_m \cos \omega t. \qquad (4.31)$$

Так как $u = -e_i$, то напряжение на концах катушки оказывается равным:

$$u = L\omega I_m \cos \omega t = L\omega I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

где $U_m = L\omega I_m$ — амплитуда напряжения.

Важно

Колебания напряжения на катушке опережают по фазе колебания силы тока на $\frac{\pi}{2}$, или, что то же самое, колебания силы тока отстают по фазе от колебаний напряжения на $\frac{\pi}{2}$ (рис. 4.18).

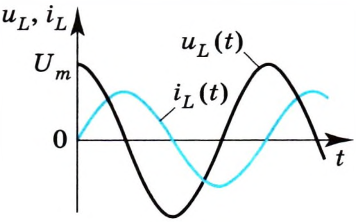


Рис. 4.18

Амплитуда силы тока в катушке равна:

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L}. \qquad (4.32)$$

Если ввести обозначение

$$\omega L = X_L \qquad (4.33)$$

и вместо амплитуд силы тока и напряжения использовать их действующие значения, то получим

$$I = \frac{U}{X_L}. \qquad (4.34)$$

Запомни

Величину X_L, равную произведению циклической частоты на индуктивность, называют **индуктивным сопротивлением.**

Согласно формуле (4.34) действующее значение силы тока связано с действующим значением напряжения и индуктивным сопротивлением соотношением, подобным закону Ома для цепи постоянного тока.

Индуктивное сопротивление зависит от частоты ω. Постоянный ток вообще «не замечает» индуктивности катушки. При $\omega = 0$ индуктивное сопротивление равно нулю ($X_L = 0$).

Чем быстрее меняется напряжение, тем больше ЭДС самоиндукции и тем меньше амплитуда силы тока.

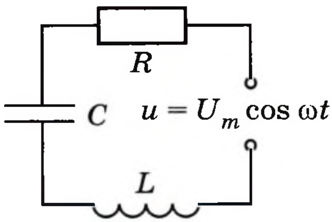


Рис. 4.19

Резистор, конденсатор и катушка индуктивности в цепи переменного тока. Рассмотрим цепь, содержащую все элементы: резистор сопротивлением R, катушку индуктивностью L, конденсатор ёмкостью C и источник переменного напряжения $u = U_m \cos \omega t$ (рис. 4.19). В любой момент времени ЭДС источника равна сумме напряжений на отдельных элементах цепи:

$$\mathscr{E} = u_R + u_L + u_C.$$

Важно

Так как эти напряжения отличаются по фазе, то сумма амплитудных значений напряжений *не будет* равна амплитудному значению ЭДС источника.

Полное сопротивление цепи состоит из активного, ёмкостного и индуктивного сопротивлений:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Из этой формулы видно, что полное сопротивление цепи зависит от частоты подаваемого источником напряжения.

Для силы тока в цепи имеем выражение $i = I_m \cos(\omega t - \varphi_0)$, где $I_m = \frac{U_m}{Z}$, а φ_0 — разность фаз между током и напряжением — определяется равенством $\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{X_L - X_C}{R}$.

Подумайте, как объяснить, что при равенстве ёмкостного и индуктивного сопротивлений колебания тока и напряжения источника происходят в фазе.

Средняя мощность, выделяемая в цепи на активном сопротивлении R, равна:

$$P = i^2 Z \cos \varphi_0 = IU \cos \varphi_0, \qquad (4.35)$$

где $\cos \varphi_0$ называется коэффициентом мощности. Если $X_L - X_C = 0$, то $\varphi_0 = 0$ и выражение для мощности имеет вид

$$P = IU.$$

В этом случае в цепи выделяется максимальная мощность, наступает явление резонанса.

Ёмкостное и индуктивное сопротивления. Полное сопротивление Найти

1. Как связаны между собой действующие значения силы тока и напряжения на конденсаторе в цепи переменного тока?
2. Выделяется ли энергия в цепи, содержащей только конденсатор, если активным сопротивлением цепи можно пренебречь?
3. Выключатель цепи представляет собой своего рода конденсатор. Почему же выключатель надёжно размыкает цепь?
4. Как связаны между собой действующие значения силы тока и напряжения на катушке индуктивности, активным сопротивлением которой можно пренебречь?

1. Ёмкость конденсатора, включённого в цепь переменного тока, равна 2 мкФ. Уравнение колебаний напряжения на конденсаторе $u = 75 \cos(2 \cdot 10^3 t)$, где все величины выражены в СИ. Определите амплитуду силы тока

1) 0,003 А 2) 0,3 А 3) 0,58 А 4) 50 А

2. Напряжение на конденсаторе в цепи переменного тока меняется с циклической частотой $\omega = 4000\ \text{с}^{-1}$. Амплитуда колебаний напряжения и силы тока $U_m = 200$ В и $I_m = 4$ А. Определите ёмкость конденсатора.

1) 500 Ф 2) 0,5 мкФ 3) 5 мкФ 4) 2 мкФ

3. Индуктивность катушки равна 0,125 Гн. Уравнение колебаний силы тока в ней $i = 0{,}4 \cos(2 \cdot 10^3 t)$, где все величины выражены в СИ. Определите амплитуду напряжения на катушке.

1) 100 В 2) 50 В 3) 10 В 4) 0,1 В

§ 23 РЕЗОНАНС В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

При каких условиях происходит явление резонанса при вынужденных колебаниях математического маятника?
Что играет роль внешней силы при переменном электрическом токе на участке цепи?

В электрической цепи, так же как и в механической колебательной системе, наблюдается явление резонанса.

Вспомните, какие превращения энергии происходят в механической колебательной системе.

При механических колебаниях резонанс выражен отчётливо при малых силах сопротивления. В электрической цепи роль сил сопротивления играет её активное сопротивление R. Ведь именно наличие этого сопротивления в цепи приводит к превращению энергии тока во внутреннюю энергию проводника (проводник нагревается).

Поэтому резонанс в электрическом колебательном контуре (см. рис. 4.19) должен быть выражен отчётливо при малом активном сопротивлении R.

Сила тока при вынужденных колебаниях должна достигать максимальных значений, когда частота переменного напряжения, приложенного к контуру, равна собственной частоте ω_0 колебательного контура:

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \qquad (4.36)$$

Запомни

Резонансом в электрическом колебательном контуре называется явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний силы тока или напряжения при совпадении частоты внешнего переменного напряжения с собственной частотой колебательного контура.

Амплитуда силы тока при резонансе. Как и в случае механического резонанса, при резонансе в колебательном контуре создаются оптимальные условия для поступления энергии от внешнего источника в контур. Мощность в контуре максимальна в том случае, когда сила тока совпадает по фазе с напряжением ($\varphi_0 = 0$).

Интересно Здесь наблюдается полная аналогия с механическими колебаниями: при резонансе в механической колебательной системе внешняя сила (аналог напряжения в цепи) совпадает по фазе со скоростью (аналог силы тока).

Не сразу после включения внешнего переменного напряжения в цепи устанавливается резонансное значение силы тока. Амплитуда колебаний силы тока нарастает постепенно — до тех пор, пока энергия, выделяющаяся за период на резисторе, не сравняется с энергией, поступающей в контур за это же время:

$$\frac{I_m^2 R}{2} T = \frac{U_m I_m}{2} T. \qquad (4.37)$$

Отсюда амплитуда установившихся колебаний силы тока при резонансе определяется уравнением

$$I_m = \frac{U_m}{R}. \qquad (4.38)$$

При $R \to 0$ резонансное значение силы тока неограниченно возрастает: $(I_m)_{рез} \to \infty$. С увеличением R максимальное значение силы тока уменьшается. Зависимости амплитуды силы тока от частоты при различных сопротивлениях ($R_1 < R_2 < R_3$) показаны на рисунке 4.20.

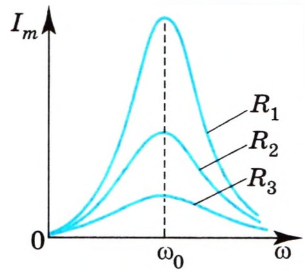


Рис. 4.20

Одновременно с увеличением силы тока при резонансе резко возрастают напряжения на конденсаторе и катушке индуктивности. Эти напряжения при малом активном сопротивлении во много раз превышают внешнее напряжение.

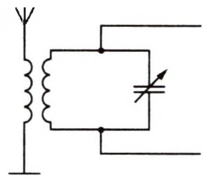


Рис. 4.21

Использование резонанса в радиосвязи. Явление электрического резонанса широко используется при осуществлении радиосвязи. Радиоволны от различных передающих станций возбуждают в антенне радиоприёмника переменные токи различных частот, так как каждая передающая радиостанция работает на своей частоте. С антенной индуктивно связан колебательный контур (рис. 4.21), в катушке которого возникают вынужденные колебания силы тока и напряжения. Но только при резонансе колебания силы тока в контуре и напряжения в нём будут значительными, т. е. из колебаний различных частот, возбуждаемых в антенне, контур выделяет только те, частота которых равна его собственной частоте. Настройка контура на нужную частоту ω_0 обычно осуществляется путём изменения ёмкости конденсатора. В этом обычно состоит настройка радиоприёмника на определённую радиостанцию.

Интересно

В некоторых случаях резонанс в электрической цепи может принести большой вред. Если цепь не рассчитана на работу в условиях резонанса, то его возникновение может привести к аварии. Чрезмерно большие токи могут перегреть провода. Большие напряжения приводят к пробою изоляции.

Резонанс в электрической цепи Найти

1. Может ли амплитуда силы тока при резонансе превысить силу постоянного тока в цепи с таким же активным сопротивлением и постоянным напряжением, равным амплитуде переменного напряжения?
2. Чему равна разность фаз между колебаниями силы тока и напряжения при резонансе?
3. При каком условии резонансные свойства контура выражены наиболее отчётливо?

§ 24 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ПЕРЕМЕННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК»

Задачи на переменный ток очень разнообразны, однако для их решения достаточно знать закон Ома и то, как вычисляется полное сопротивление цепи переменного тока, а также разность фаз между током и напряжением. Также следует обращать внимание на то, что иногда в условии задачи даются амплитудные значения, а иногда действующие значения силы тока и напряжения.

Задача 1. Проволочная рамка площадью $S = 3000$ см^2 имеет $N = 200$ витков и вращается в однородном магнитном поле с индукцией $B = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ Тл. Максимальная ЭДС в рамке $\mathcal{E}_m = 1{,}5$ В. Определите период вращения рамки.

Решение. Магнитный поток, пронизывающий поверхность, ограниченную рамкой, $\Phi = BSN\cos\omega t$.

Согласно закону электромагнитной индукции $e = -\Phi' = BSN\omega\sin\omega t$.

Амплитуда ЭДС индукции $\mathcal{E}_m = BSN\omega$. Отсюда $\omega = \dfrac{\mathcal{E}_m}{BSN}$.

Время одного оборота рамки $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi BSN}{\mathcal{E}_m} \approx 3{,}8$ с.

Задача 2. В цепь переменного тока с частотой $\nu = 500$ Гц включена катушка индуктивностью $L = 10$ мГн. Определите ёмкость конденсатора, который надо включить в эту цепь, чтобы наступил резонанс.

Решение. Электрическая цепь согласно условию задачи представляет собой колебательный контур. Резонанс в этой цепи наступит, когда частота переменного тока будет равна собственной частоте колебательного контура ($\nu = \nu_0$). Но собственная частота $\nu_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$. Отсюда $C = \dfrac{1}{4\pi^2 L\nu^2} \approx$ $\approx 10^{-5}$ Ф $= 10$ мкФ.

Задача 3. В схеме на рисунке 4.19 (см. с. 94) сопротивление $R = 25$ Ом, индуктивность $L = 30$ мГн и ёмкость $C = 12$ мкФ, амплитуда переменного напряжения $U_m = 90$ В, его частота $\nu = 500$ Гц. Определите: 1) сопротивления каждого из участков цепи; 2) действующее значение силы тока в цепи; 3) действующее значение напряжения на каждом из участков цепи; 4) сдвиг фаз между током и напряжением; 5) мощность, выделяемую в цепи.

Решение. 1) Индуктивное и ёмкостное сопротивления равны соответственно: $X_L = 2\pi\nu L \approx 94$ Ом, $X_C = \dfrac{1}{2\pi\nu C} \approx 27$ Ом.

2) Полное сопротивление цепи $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \approx 72$ Ом. Действующее значение силы тока $I = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}Z} \approx 0{,}88$ А.

3) Действующие значения напряжения $U_R = IR \approx 22$ В, $U_L = IX_L \approx 83$ В, $U_C = IX_C \approx 23$ В.

Обратите внимание на то, что сумма действующих напряжений в случае переменного тока не равна действующему напряжению источника.

4) Сдвиг фаз между током и напряжением $\cos\varphi = R/Z = 0{,}37$, $\varphi \approx 70°$.

5) Мощность, выделяемая в цепи, $P = IU\cos\varphi = 19$ Вт.

Задача 4. Определите силу тока в соленоиде, индуктивность и сопротивление которого равны соответственно $L = 0{,}6$ Гн, $R = 4$ Ом, если к нему приложено:

1) постоянное напряжение $U = 60$ В;

2) переменное напряжение $u = U_m \sin\omega t$, $U_m = 60$ В, частота $\nu = 20$ Гц.

Решение. 1) При постоянном напряжении значение силы тока определяем по закону Ома: $I = \dfrac{U}{R} = 15$ А.

Мощность $P_{\text{пост}} = IU = 900$ Вт.

2) При переменном напряжении суммарное сопротивление $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ и амплитуда силы тока $I_m = \dfrac{U_m}{Z}$.

Силу тока определяем из выражения $i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$, где начальная фаза $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\omega L}{R}\right)$, $\omega = 2\pi\nu$, $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{2\pi\nu L}{R}\right) = 87° = 0{,}48\pi$, $I_m = \dfrac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = 0{,}8$ А. Тогда $i = 0{,}8\sin(40\pi t - 0{,}48\pi)$ А.

Задача 5. В цепи (см. рис. 4.19, с. 94) сопротивление $R = 20$ Ом, индуктивность $L = 0{,}2$ Гн, ёмкость $C = 100$ мкФ, действующее напряжение $U = 75$ В и частота $\nu = 50$ Гц. Определите действующее значение силы тока и разность фаз между напряжением и током.

Решение. Индуктивное сопротивление $X_L = \omega L = 2\pi\nu L$, ёмкостное сопротивление $X_C = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{2\pi\nu C}$.

Полное сопротивление участка цепи определим по формуле

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = 37 \text{ Ом}.$$

Тогда действующее значение силы тока $I = \dfrac{U}{Z} = 2$ А.

Сдвиг фаз между напряжением и током определим по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = 1{,}55;\ \varphi = 57°.$$

Задача 6. Электрическая цепь состоит из резистора сопротивлением $R = 10$ Ом, катушки индуктивностью $L = 2$ Гн, конденсатора ёмкостью $C_1 = 3$ мкФ и источника с действующим напряжением $U = 200$ В и частотой $\nu = 50$ Гц. Чему равна электроёмкость C_2 конденсатора, который при параллельном подключении к конденсатору электроёмкостью C_1 обеспечит резонанс в электрической цепи? Чему при этом будет равно действующее значение силы тока?

Решение. Действующее значение силы тока

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(2\pi\nu L - \frac{1}{2\pi\nu C}\right)^2}}.$$

Сила тока в цепи максимальна при условии $2\pi\nu L - \frac{1}{2\pi\nu C} = 0$.

При собственной частоте

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad (1)$$

в цепи наблюдается резонанс, при котором сила тока максимальна и её действующее значение равно $I = \frac{U}{R} = \frac{200}{10} = 20$ А.

Из соотношения (1) следует, что ёмкость системы конденсаторов должна быть равна $C = \frac{1}{4\pi^2\nu_0^2 L} = 5 \cdot 10^{-6}$ Ф $= 5$ мкФ.

При параллельном подключении конденсаторов $C = C_1 + C_2$, откуда $C_2 = C - C_1 = 2$ мкФ.

Задачи для самостоятельного решения

1. Определите амплитуду ЭДС, наводимой в рамке, вращающейся в однородном магнитном поле, если частота вращения составляет 50 об/с, площадь рамки 100 см^2 и магнитная индукция 0,2 Тл.

2. Катушка индуктивностью $L = 0{,}08$ Гн присоединена к источнику переменного напряжения с частотой $\nu = 1000$ Гц. Действующее значение напряжения $U = 100$ В. Определите амплитуду силы тока I_m в цепи.

3. Катушка индуктивностью 0,1 Гн и активным сопротивлением 25 Ом включена в сеть переменного тока частотой 50 Гц. Определите действующее значение силы тока в катушке, если амплитуда напряжения на её вводах 120 В.

4. К источнику переменного напряжения, изменяющегося по формуле $u = 2\sin 200\pi t$ (В), подключили последовательно катушку индуктивностью 86 мГн, конденсатор ёмкостью 160 мкФ и резистор сопротивлением 100 Ом. Определите полное сопротивление цепи, частоту переменного тока, амплитудное значение силы тока.

1. При подключении к колебательному контуру источника переменной ЭДС $e = 100\sin(800\pi t)$, где все величины выражены в СИ, наблюдается резонанс токов. Определите частоту собственных колебаний в данном контуре.

2. Резистор сопротивлением $R = 100$ Ом и два параллельно подключённых конденсатора ёмкостью $C = 40$ мкФ соединены последовательно и подключены к источнику с максимальным напряжением $U_m = 220$ В и частотой $\nu = 50$ Гц. Определите тепловую мощность, выделяемую в резисторе.

§ 25 АВТОКОЛЕБАНИЯ

Что необходимо для того, чтобы колебания не затухали?
В каких случаях возникают вынужденные механические и электромагнитные колебания?

Мы знаем, что во всех реальных колебательных системах колебания затухают. Если в систему включён периодически действующий источник, то колебания не затухают, происходят вынужденные колебания. В этом параграфе мы познакомимся с ещё одним видом незатухающих колебаний — автоколебаниями.

Запомни

Автоколебания — незатухающие колебания в системе, поддерживаемые за счёт постоянного источника энергии.

Системы, в которых генерируются незатухающие колебания за счёт поступления энергии от источника внутри самой системы, называются **автоколебательными**.

Механические автоколебания. Примерами автоколебаний в механических системах являются незатухающие колебания маятника часов, струн при равномерном движении смычка, воздуха в органных трубах и т. д.

Рассмотрим механические автоколебания на примере маятниковых часов (рис. 4.22). На рисунке видно, что подвешенная гиря стремится вращать зубчатое колесо. К маятнику прикреплён анкер — перекладина с изогнутыми пластинами. При колебаниях анкер зацепляет зубец колеса, и маятник получает толчок. При этом энергия, сообщаемая маятнику, равна изменению потенциальной энергии гири и компенсирует потери энергии при колебаниях за счёт сил сопротивления.

> Почему амплитуда колебаний маятника часов не увеличивается, даже если вы вначале отклоняете его на большой угол?

Автоколебательные системы в электрической цепи. Генератор на транзисторе также пример автоколебательной системы, в которой происходят электромагнитные колебания. Он состоит из колебательного контура с конденсатором ёмкостью C и катушкой индуктивностью L, источника энергии и транзистора.

Пусть в системе, в которой могут существовать свободные электромагнитные колебания, имеется источник энергии. Если сама система будет регулировать поступление энергии в колебательный контур для компенсации потерь энергии на резисторе, то в ней могут возникнуть незатухающие колебания.

Известно, что если конденсатор колебательного контура зарядить, то в контуре возникнут затухающие колебания. В конце каждого периода колебаний заряд

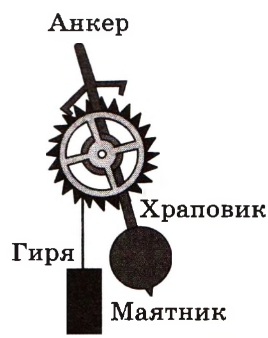


Рис. 4.22

на пластинах конденсатора имеет меньшее значение, чем в начале периода. В результате энергия колебаний уменьшается, так как она согласно формуле (4.1) (см. с. 75), пропорциональна квадрату заряда одной из пластин конденсатора. Чтобы колебания не затухали, нужно компенсировать потери энергии за каждый период.

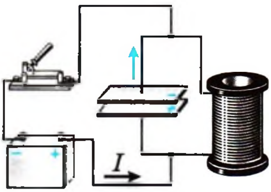


Рис. 4.23

Пополнять энергию в контуре можно, например, подзаряжая конденсатор. Для этого надо периодически подключать контур к источнику постоянного напряжения. Конденсатор должен подключаться к источнику только в те интервалы времени, когда присоединённая к положительному полюсу источника пластина заряжена положительно, а присоединённая к отрицательному полюсу — отрицательно (рис. 4.23). Только в этом случае источник будет подзаряжать конденсатор, пополняя его энергию.

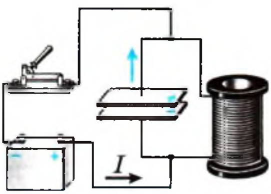


Рис. 4.24

Если же ключ замкнуть в момент, когда присоединённая к положительному полюсу источника пластина имеет отрицательный заряд, а присоединённая к отрицательно му полюсу — положительный, то конденсатор будет разряжаться через источник (рис. 4.24). Энергия конденсатора при этом будет убывать.

Следовательно, необходимо обеспечить автоматическую работу ключа (или *клапана*, как его часто называют). При высокой частоте колебаний ключ должен обладать надёжным быстродействием. В качестве такого практически безынерционного ключа и используется транзистор.

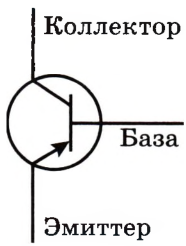


Рис. 4.25

Транзистор, напомним, состоит из трёх различных полупроводников: эмиттера, базы и коллектора. Эмиттер и коллектор имеют одинаковые основные носители заряда, например дырки (это полупроводник *p*-типа), а база имеет основные носители противоположного знака, например электроны (полупроводник *n*-типа). Схематическое изображение транзистора показано на рисунке 4.25.

Работа генератора на транзисторе. Упрощённая схема генератора на транзисторе показана на рисунке 4.26. Колебательный контур соединён последовательно с источником напряжения и транзистором таким образом, что на эмиттер подаётся положительный потенциал, а на коллектор — отрицательный. При этом переход эмиттер — база (эмиттерный переход) является прямым, а переход база — коллектор (коллекторный переход) оказывается обратным, и ток в цепи не идёт. Это соответствует разомкнутому ключу на рисунке 4.24.

Чтобы в цепи контура возникал ток и подзаряжал конденсатор контура в ходе колебаний, нужно сообщать базе отрицательный относительно эмиттера потенциал, причём в те интервалы времени, когда верхняя (см. рис. 4.26) пластина конденсатора заряжена положительно, а нижняя — отрицательно. Это соответствует замкнутому ключу на рисунке 4.23.

В те интервалы времени, когда верхняя пластина конденсатора заряжена отрицательно, а нижняя — положительно, ток в цепи контура должен отсутствовать. Для этого база должна иметь положительный потенциал относительно эмиттера.

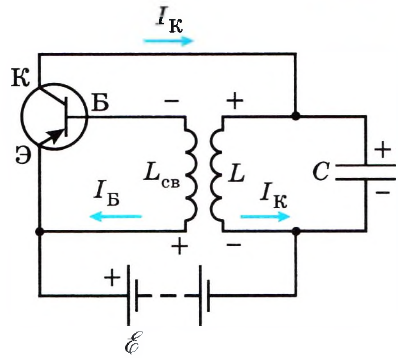


Рис. 4.26

Таким образом, для компенсации потерь энергии колебаний в контуре напряжение на эмиттерном переходе должно периодически менять знак в строгом соответствии с колебаниями напряжения в контуре. Необходима, как говорят, *обратная связь*, состоящая в том, что колебания в контуре влияют на транзистор.

В рассматриваемом генераторе обратная связь — индуктивная. К эмиттерному переходу подключена катушка индуктивностью $L_{св}$, индуктивно связанная с катушкой индуктивностью L контура. Колебания в контуре вследствие электромагнитной индукции возбуждают колебания напряжения на концах катушки, а тем самым и на эмиттерном переходе. Если фаза колебаний напряжения на эмиттерном переходе подобрана правильно, то «толчки» тока в цепи контура действуют на контур в нужные интервалы времени и колебания не затухают. Напротив, амплитуда колебаний в контуре возрастает до тех пор, пока потери энергии в контуре не станут точно компенсироваться поступлением энергии от источника. Эта амплитуда тем больше, чем больше напряжение источника. Увеличение напряжения приводит к усилению «толчков» тока, подзаряжающего конденсатор.

Подумайте, чем определяется частота автоколебаний, от чего зависит амплитуда автоколебаний.

Основные элементы любой автоколебательной системы. На примере генератора на транзисторе можно выделить основные элементы, характерные для многих автоколебательных систем (рис. 4.27).

1. Источник энергии, за счёт которого поддерживаются незатухающие колебания (в генераторе на транзисторе это источник постоянного напряжения).

2. Колебательная система — та часть автоколебательной системы, непосредственно в которой происходят колебания (в генераторе на транзисторе это колебательный контур).

3. Устройство, регулирующее поступление энергии от источника в колебательную систему, — клапан (в рассмотренном генераторе роль клапана выполняет транзистор).

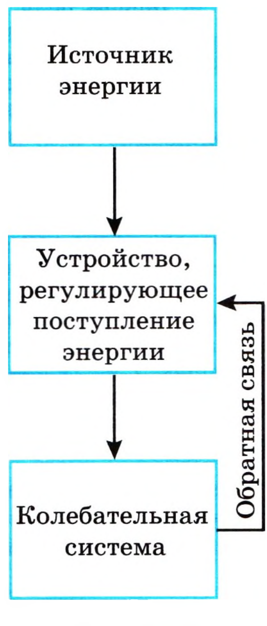


Рис. 4.27

4. Устройство, обеспечивающее обратную связь, с помощью которой колебательная система управляет клапаном (в генераторе на транзисторе предусмотрена индуктивная связь катушки контура с катушкой в цепи эмиттер — база).

Интересно Генераторы на транзисторах широко применяются не только во многих радиотехнических устройствах: радиоприёмниках, передающих радиостанциях, усилителях и т. д., но и в современных электронно-вычислительных машинах.

Обсудите с одноклассниками, какие элементы маятниковых часов соответствуют элементам генератора на транзисторе.

Вынужденные колебания возникают под действием переменного напряжения, вырабатываемого генераторами на электростанциях. Такие генераторы не могут создавать колебания высокой частоты, необходимые для радиосвязи. Потребовалась бы чрезмерно большая скорость вращения ротора. Генераторы на транзисторе позволяют получить колебания высокой частоты.

Автоколебания. Маятниковые часы. Транзистор. Обратная связь Найти

1. Что такое автоколебательная система?
2. В чём отличие автоколебаний от вынужденных и свободных колебаний?
3. Опишите свойства p—n-перехода в полупроводниках.
4. Как устроен транзистор?
5. Какова роль транзистора в генерации автоколебаний?
6. Что такое обратная связь?
7. Как осуществляется обратная связь в генераторе на транзисторе?
8. Укажите основные элементы автоколебательной системы.
9. Приведите примеры автоколебательных систем, не рассмотренные в тексте.
10. Почему колебания струны при равномерном движении смычка можно считать автоколебаниями?
11. Изменится ли работа генератора, если база будет иметь в качестве основных носителей тока дырки, а коллектор и эмиттер — электроны?

§ 26 ГЕНЕРАТОР ПЕРЕМЕННОГО ТОКА. ТРАНСФОРМАТОР

Что является основным источником электроэнергии?
В какие формы энергии переходит энергия электрического тока?

Электрический ток вырабатывается в генераторах — устройствах, преобразующих энергию того или иного вида в электрическую энергию.

Основную роль в наше время выполняют *электромеханические индукционные генераторы переменного тока*. В этих генераторах механическая энергия превращается в электрическую. Их действие основано на явлении электромагнитной индукции. Такие генераторы имеют сравнительно простое устройство и позволяют получать большие токи при достаточно высоком напряжении.

В дальнейшем, говоря о генераторах, мы будем иметь в виду именно индукционные электромеханические генераторы.

Генератор переменного тока. Принцип действия генератора переменного тока уже был рассмотрен в § 21.

В настоящее время имеется много различных типов индукционных генераторов. Но все они состоят из одних и тех же основных частей. Это, во-первых, электромагнит или постоянный магнит, создающий магнитное поле, и, во-вторых, обмотка, в которой индуцируется переменная ЭДС (в рассмотренной модели генератора это вращающаяся рамка). Так как ЭДС, наводимые в последовательно соединённых витках, складываются, то амплитуда ЭДС индукции в рамке пропорциональна числу её витков. Она пропорциональна также амплитуде переменного магнитного потока ($\Phi_m = BS$) через каждый виток, а также угловой скорости вращения (см. § 21).

Какие законы изменения магнитного потока и ЭДС индукции справедливы при вращении рамки? Запишите формулу зависимости ЭДС индукции от времени, если рамка имеет несколько витков.

Интересно

К генераторам относятся гальванические элементы, электростатические машины, термобатареи, солнечные батареи и т. п. В термобатареях используется свойство двух контактов разнородных материалов создавать ЭДС за счёт разности температур контактов. Исследуются возможности создания принципиально новых типов генераторов. Например, разрабатываются так называемые топливные элементы, в которых энергия, освобождающаяся в результате реакции водорода с кислородом, непосредственно превращается в электрическую.

В больших промышленных генераторах вращается электромагнит, создающий магнитное поле и называемый *ротором*, а обмотки, в которых наводится ЭДС, называемые *статором*, остаются неподвижными. Дело в том, что сила тока в обмотках электромагнита, создающего магнитное поле, значительно меньше силы тока, отдаваемого генератором во внешнюю цепь. Поэтому генерируемый ток удобнее снимать с неподвижных обмоток, а через скользящие

Вспомните устройство генератора постоянного тока.

Интересно Современный генератор электрического тока — это внушительное сооружение из медных проводов, изоляционных материалов и стальных конструкций. При размерах в несколько метров важнейшие детали генераторов изготовляются с точностью до миллиметра. Нигде в природе нет такого сочетания движущихся частей, которые могли бы порождать электрическую энергию столь же непрерывно и экономично.

контакты с помощью контактных колец и щёток подводить сравнительно слабый ток к вращающемуся электромагниту. Этот ток вырабатывается отдельным генератором постоянного тока (возбудителем), расположенным на том же валу.

В маломощных генераторах магнитное поле создаётся вращающимся постоянным магнитом. В таком случае кольца и щётки вообще не нужны.

Появление ЭДС в неподвижных обмотках статора объясняется возникновением в них вихревого электрического поля, порождённого изменением магнитного потока при вращении ротора.

Трансформатор. ЭДС генераторов электростанций, как правило, не очень велика (около 10—20 кВ) по причине опасности пробоя обмоток генератора. Однако при передаче электроэнергии необходимо увеличивать напряжение для уменьшения потерь в линии электропередачи. Между тем для практических нужд потребителей обычно необходимо напряжение 220 или 380 В.

Важно

Преобразование переменного тока, при котором напряжение увеличивается или уменьшается в несколько раз практически без потери мощности, осуществляется с помощью *трансформаторов.*

Устройство трансформатора. Трансформатор состоит из замкнутого стального сердечника, собранного из пластин, на который надеты две (иногда и более) катушки с проволочными обмотками (рис. 4.28).

Запомни

Одна из обмоток трансформатора, называемая **первичной,** подключается к источнику переменного напряжения. Другая обмотка, к которой присоединяют нагрузку, т. е. приборы и устройства, потребляющие электроэнергию, называется **вторичной.**

Интересно Впервые трансформаторы были использованы в 1878 г. русским учёным П. Н. Яблочковым для питания изобретённых им электрических свечей — нового в то время источника света.

Условное обозначение трансформатора приведено на рисунке 4.29.

Трансформатор на холостом ходу. Действие трансформатора основано на явлении электромагнитной индукции. При прохождении переменного тока по первичной обмотке в ней возникает ЭДС самоиндукции. В сердечнике появляется переменный магнитный поток, который возбуждает ЭДС индукции в витках вторичной обмотки. Сердечник из трансформаторной стали концентрирует магнитное поле так, что магнитный поток существует практически только внутри сердечника и одинаков во всех его сечениях.

При изменении со временем магнитного потока в каждом витке первичной обмотки возникает ЭДС самоиндукции

$$e = -\Phi', \tag{4.39}$$

> Подумайте, почему сердечник делают не сплошным, а состоящим из отдельных пластин.

где Φ' — производная потока магнитной индукции через поверхность, ограниченную одним витком, по времени. Если число витков в первичной обмотке равно N_1, то мгновенное значение ЭДС самоиндукции в этой обмотке $e_1 = N_1 e$. Так как магнитный поток через первичную и вторичную обмотки одинаков, то во вторичной обмотке полная ЭДС индукции e_2 равна $N_2 e$ (N_2 — число витков этой обмотки). Отсюда следует, что

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{N_1}{N_2}. \qquad (4.40)$$

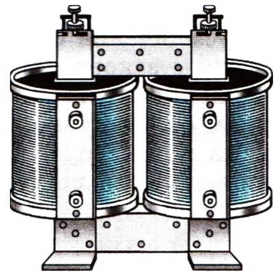


Рис. 4.28

Обычно активное сопротивление обмоток трансформатора мало, и им можно пренебречь. В этом случае напряжение на первичной обмотке равно ЭДС самоиндукции, взятой с обратным знаком. Тогда

$$|u_1| \approx |e_1|. \qquad (4.41)$$

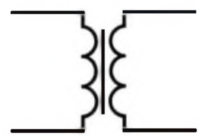


Рис. 4.29

При разомкнутой вторичной обмотке трансформатора ток в ней не идёт и напряжение на ней равно ЭДС индукции, взятой с обратным знаком, соответственно имеет место соотношение

$$|u_2| \approx |e_2|. \qquad (4.42)$$

Мгновенные значения ЭДС e_1 и e_2 изменяются синфазно (одновременно достигают максимума и одновременно проходят через нуль). Поэтому их отношение в формуле (4.40) можно заменить отношением действующих значений $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ этих ЭДС или, учитывая равенства (4.41) и (4.42), отношением действующих значений напряжений U_1 и U_2:

$$\frac{\mathscr{E}_2}{\mathscr{E}_1} \approx \frac{U_2}{U_1} \approx \frac{N_2}{N_1} = K. \qquad (4.43)$$

Запомни

Величина K называется **коэффициентом трансформации.** Он равен отношению напряжений во вторичной и первичной обмотках трансформатора.

При $K < 1$ ($N_2 < N_1$) $U_2 < U_1$ и трансформатор является понижающим, а при $K > 1$ ($N_2 > N_1$) $U_2 > U_1$ и трансформатор является повышающим.

Работа нагруженного трансформатора. Если к концам вторичной обмотки присоединить цепь, потребляющую электроэнергию, или, как говорят, нагрузить трансформатор, то сила тока во вторичной обмотке уже не будет равна нулю. Появившийся ток создаст в сердечнике свой переменный магнитный поток, который будет уменьшать изменения магнитного потока в сердечнике.

Уменьшение амплитуды колебаний результирующего магнитного потока, казалось бы, должно, в свою очередь, уменьшить ЭДС самоиндукции в первичной обмотке. Этого, однако, не произойдёт, так как согласно формуле (4.41) $|u_1| \approx |e_1|$. Поэтому при замыкании цепи вторичной обмотки автоматически увеличится сила тока в первичной обмотке. Его амплитуда возрастёт таким образом, что восстановится прежнее значение амплитуды колебаний результирующего магнитного потока.

Увеличение силы тока в цепи первичной обмотки происходит в соответствии с законом сохранения энергии: отдача электроэнергии в цепь, присоединённую к вторичной обмотке трансформатора, сопровождается потреблением от сети такой же энергии первичной обмоткой. Мощность в первичной цепи при нагрузке трансформатора, близкой к номинальной, примерно равна мощности во вторичной цепи:

$$U_1 I_1 \approx U_2 I_2, \tag{4.44}$$

отсюда

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1}. \tag{4.45}$$

Это означает, что, повышая с помощью трансформатора напряжение в несколько раз, мы во столько же раз уменьшаем силу тока (и наоборот).

Вспомните закон, который устанавливает связь количества теплоты, выделяемой в проводнике, с силой тока и сопротивлением проводника.

Мощности в первичной и вторичной обмотках одинаковы, если пренебречь потерями, причиной которых является неизбежное нагревание проводов и сердечника. Нагревание сердечника происходит за счёт токов, идущих по нему, а также за счёт его непрерывного перемагничивания. Для уменьшения нагревания сердечника за счёт силы тока его изготавливают из отдельных пластин, что увеличивает его сопротивление и уменьшает силу тока.

КПД трансформатора равен отношению мощности в нагрузке к мощности, подаваемой из сети на первичную обмотку:

Что может произойти, если случайно подключить трансформатор к источнику постоянного тока?

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} \cdot 100\,\% = \frac{I_2 U_2}{I_1 U_1} \cdot 100\,\%.$$

КПД зависит от нагрузки. При больших нагрузках КПД практически постоянен и, как правило, достаточно велик (98—99 %), при малых нагрузках КПД уменьшается.

Индукционный генератор переменного тока. Трансформатор Найти

1. Какими преимуществами обладает переменный ток по сравнению с постоянным?
2. На каком принципе основана работа генераторов переменного тока?
3. Что такое коэффициент трансформации?
4. Что понижает или повышает трансформатор?

§ 27 ПРОИЗВОДСТВО, ПЕРЕДАЧА И ПОТРЕБЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Как устроен генератор переменного тока?
Какие функции выполняют ротор и статор генератора?
Каков принцип действия трансформатора?

Производство электроэнергии. Рассмотрим два основных типа электростанций: тепловые и гидроэлектрические. Различаются эти электростанции двигателями, вращающими роторы генераторов.

На *тепловых электростанциях* источником энергии является топливо: уголь, газ, нефть, мазут, горючие сланцы. Роторы электрических генераторов приводятся во вращение паровыми и газовыми турбинами или двигателями внутреннего сгорания. Наиболее экономичны крупные тепловые паротурбинные электростанции (сокращённо: ТЭС). Большинство ТЭС нашей страны использует в качестве топлива угольную пыль. Для выработки 1 кВт · ч электроэнергии затрачивается несколько сот граммов угля. В паровом котле свыше 90 % выделяемой топливом энергии передаётся пару. В турбине кинетическая энергия струй пара передаётся ротору. Вал турбины жёстко соединён с валом генератора. Паровые турбогенераторы весьма быстроходны: число оборотов ротора составляет несколько тысяч в минуту.

Известно, что КПД тепловых двигателей увеличивается с повышением температуры нагревателя и соответственно начальной температуры рабочего тела (пара, газа). Поэтому поступающий в турбину пар доводят до высоких параметров: температуру — почти до 550 °С и давление — до 25 МПа. Коэффициент полезного действия ТЭС достигает 40 %. Бóльшая часть энергии теряется вместе с горячим отработанным паром. Превращения энергии показаны на схеме, приведённой на рисунке 4.30.

Тепловые электростанции — так называемые теплоэлектроцентрали (ТЭЦ) — позволяют значительную часть энергии отработанного пара использовать на промышленных предприятиях и для бытовых нужд. В результате КПД ТЭЦ достигает 60—70 %.

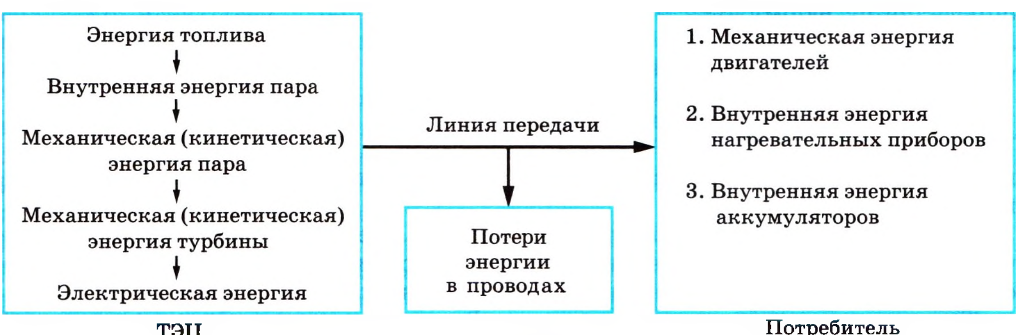


Рис. 4.30

На *гидроэлектростанциях* (ГЭС) для вращения роторов генераторов используется потенциальная энергия воды. Роторы электрических генераторов приводятся во вращение гидравлическими турбинами. Мощность такой станции зависит от создаваемой плотиной разности уровней воды (напор) и от массы воды, проходящей через турбину в каждую секунду (расход воды). Превращения энергии показаны на схеме, приведённой на рисунке 4.31.

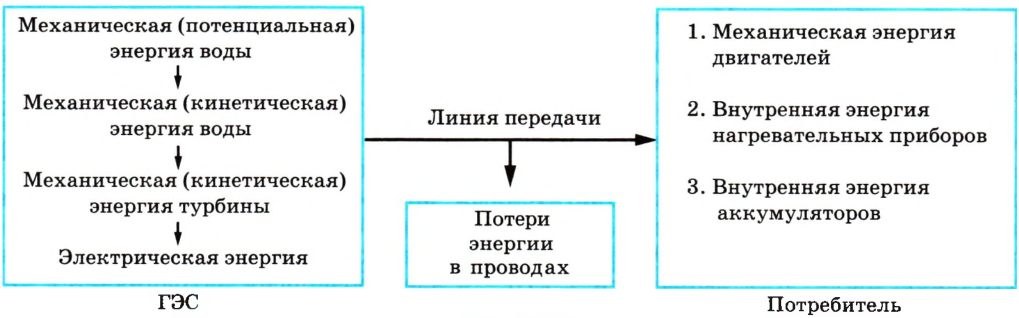


Рис. 4.31

Гидроэлектростанции дают около 20 % всей вырабатываемой в нашей стране электроэнергии.

Значительную роль в энергетике играют атомные электростанции (АЭС). О них вы прочитаете в главе 12. В настоящее время АЭС в России дают около 10 % электроэнергии.

Передача электроэнергии. Потребители электроэнергии имеются повсюду. Производится же она в сравнительно немногих местах, близких к источникам топливо- и гидроресурсов. Электроэнергию не удаётся консервировать в больших масштабах. Она должна быть потреблена сразу же после получения. Поэтому возникает необходимость в передаче электроэнергии на большие расстояния.

Передача электроэнергии связана с заметными потерями, так как электрический ток нагревает провода линий электропередачи. В соответствии с законом Джоуля—Ленца энергия, расходуемая на нагрев проводов линии, определяется формулой

Выведите формулу расчёта потерь энергии в зависимости от расстояния, на которое она передаётся.

$$Q = I^2Rt = \frac{P^2}{U^2}Rt,$$

где R — сопротивление линии, U — передаваемое напряжение, P — мощность источника тока.

При очень большой длине линии передача энергии может стать экономически невыгодной. Значительно снизить сопротивление R линии практически весьма трудно. Поэтому приходится уменьшать силу тока I.

Так как мощность источника тока P равна произведению силы тока I на напряжение U, то для уменьшения передаваемой мощности нужно повысить передаваемое напряжение в линии передачи. Поэтому на крупных электростанциях устанавливают *повышающие трансформаторы.* Трансформатор увеличивает напряжение в линии во столько же раз, во сколько раз уменьшает силу тока.

Чем длиннее линия передачи, тем выгоднее использовать более высокое напряжение. Так, в высоковольтной линии передачи Волжская ГЭС — Москва и некоторых других используют напряжение 500 кВ. Между тем генераторы переменного тока настраивают на напряжения, не превышающие 16—20 кВ. Более высокое напряжение потребовало бы принятия сложных специальных мер для изоляции обмоток и других частей генераторов.

Для непосредственного использования электроэнергии в двигателях электропривода станков, в осветительной сети и для других целей напряжение на концах линии нужно понизить. Это достигается с помощью *понижающих трансформаторов.* Общая схема передачи энергии и её распределения показана на рисунке 4.32.

Электрические станции ряда районов страны объединены высоковольтными линиями электропередачи, образуя общую электрическую сеть, к которой подключены потребители. Такое объединение, называемое *энергосистемой,* даёт возможность сгладить пиковые нагрузки потребления энергии в утренние и вечерние часы.

Интересно

Энергосистема обеспечивает бесперебойность подачи энергии потребителям вне зависимости от места их расположения. Сейчас почти вся территория нашей страны обеспечивается электроэнергией объединёнными энергетическими системами. Действует Единая энергетическая система европейской части страны.

Потребление электроэнергии. Главным потребителем электроэнергии является промышленность, на долю которой приходится около 70 % производимой электроэнергии. Крупным потребителем является также транспорт. Все большее количество железнодорожных линий переводится на электрическую тягу. Почти все деревни и сёла получают электроэнергию от электростанций для производственных и бытовых нужд.

Бо́льшая часть используемой электроэнергии сейчас превращается в механическую энергию. Почти все механизмы в промышленности приводятся в движение электрическими двигателями. Они удобны, компактны, допускают возможность автоматизации производства.

Около трети электроэнергии, потребляемой промышленностью,

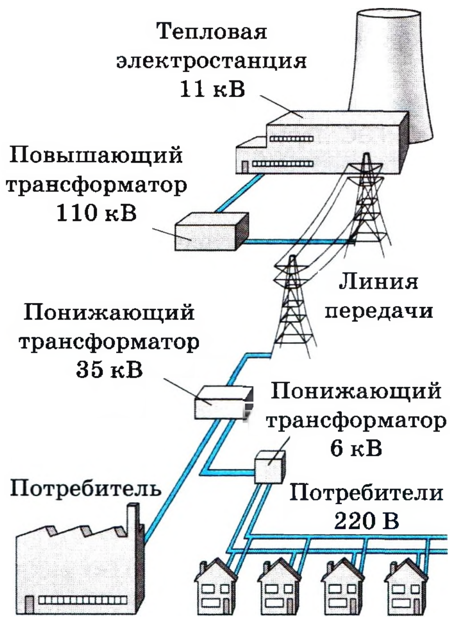


Рис. 4.32

используется для технологических целей (электросварка, электрический нагрев и плавление металлов, электролиз и т. п.).

Потребность в электроэнергии постоянно увеличивается как в промышленности, на транспорте, в научных учреждениях, так и в быту.

Возможности для более эффективного использования электроэнергии имеются, и немалые. Одна из них связана с освещением, на которое расходуется около 25 % всей производимой электроэнергии. В настоящее время в нашей стране используются компактные люминесцентные лампы, которые потребляют на 80 % меньше электроэнергии, чем лампы накаливания. Стоимость таких ламп значительно превышает стоимость обычных, но окупаются они быстро. Наряду с этим и самые простые меры по экономному применению освещения в домах и производственных помещениях способны дать немалый эффект. Не надо оставлять напрасно включёнными лампы, необходимо позаботиться о том, чтобы освещались лишь рабочие участки, и т. д.

Имеется и множество других возможностей повышения эффективности использования электроэнергии в быту: в холодильных установках, телевизорах, компьютерах и т. д. Сэкономленные средства можно использовать для разработки, например, устройств, преобразующих солнечную энергию в электрическую. Большие надежды возлагаются сейчас на получение энергии с помощью управляемых термоядерных реакций. Электростанции, в которых будет использоваться огромная энергия, высвобождающаяся при ядерном синтезе, не будут представлять столь большой опасности, как обычные атомные электростанции.

Важно

Приоритет должен быть отдан увеличению эффективности использования электроэнергии, а не повышению мощности электростанций.

ТЭС. ГЭС. Пути экономии электрической энергии Найти

1. Приведите примеры машин и механизмов, в которых совершенно не использовался бы электрический ток.
2. Чего лишились бы жители большого города при аварии электрической сети?
3. Как осуществляется передача электроэнергии на большие расстояния?
4. В чём преимущества передачи энергии на большие расстояния при использовании постоянного тока?

§ 28 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ТРАНСФОРМАТОР. ПЕРЕДАЧА ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ»

При решении задач по данной теме нужно прежде всего понимать, в каких условиях работает трансформатор: при наличии нагрузки или на холостом ходу. Необходимо знать две характеристики трансформатора: коэффициент трансформации, который может быть больше или меньше единицы, и коэффициент полезного действия, который всегда меньше единицы.

Задача 1. Первичная обмотка трансформатора в радиоприёмнике имеет $N_1 = 2000$ витков, напряжение на первичной обмотке (напряжение от сети) $U_1 = 220$ В. Определите число витков N_2 во вторичной обмотке, необходимое для нормального нагревания спирали лампы, рассчитанной на напряжение $U_л = 10$ В и силу тока $I_л = 0{,}5$ А. Сопротивление вторичной обмотки $R = 2$ Ом.

Решение. Индуцируемая в первичной обмотке ЭДС приблизительно равна подаваемому на трансформатор напряжению: $\mathscr{E}_1 = N_1\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} \approx U_1$. Отсюда скорость изменения магнитного потока в витке данного трансформатора

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{U_1}{N_1}. \qquad (1)$$

Сопротивление лампы $R_л = \dfrac{U_л}{I_л}$. Тогда ЭДС, индуцируемая во вторичной обмотке,

$$\mathscr{E}_2 = I_л(R_л + R) = N_2\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \qquad (2)$$

Подставив в формулу (2) выражение (1) для скорости изменения магнитного потока, найдём число витков во вторичной обмотке:

$$N_2 = \frac{\mathscr{E}_2}{\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}} = \frac{I_л\left(\dfrac{U_л}{I_л} + R\right)}{U_1}N_1 = 100 \text{ витков}.$$

Задача 2. Трансформатор, повышающий напряжение с $U_1 = 120$ В до $U_2 = 360$ В, имеет замкнутый сердечник в виде кольца (рис. 4.33). Через кольцо пропущен провод, к которому присоединён вольтметр, показывающий напряжение $U_0 = 0{,}5$ В. Определите, сколько витков имеют первичная и вторичная обмотки трансформатора.

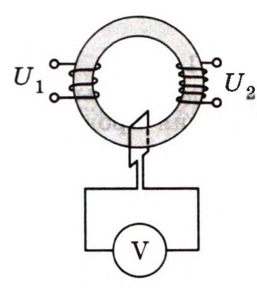


Рис. 4.33

Решение. Показания вольтметра определяют скорость изменения магнитного потока через один виток: $U_0 = \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$.

Как мы знаем, действующие значения ЭДС индукции, равные действующим значениям напряжения, $\mathscr{E}_1 = N_1 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \approx U_1$; $\mathscr{E}_2 = N_2 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \approx U_2$.

Отсюда $N_1 = \frac{U_1}{U_0} = 240$ витков, $N_2 = \frac{U_2}{U_0} = 720$ витков.

Задача 3. Первичная обмотка понижающего трансформатора включена в сеть с напряжением $U_1 = 380$ В, напряжение на зажимах вторичной обмотки, сопротивление которой равно $R_2 = 2$ Ом, $U_2 = 25$ В, а сила тока, идущего через неё, $I_2 = 1{,}5$ А.

Определите коэффициент трансформации и КПД трансформатора. Потери энергии в первичной обмотке не учитывайте.

Решение. Коэффициент трансформации K равен отношению напряжения на вторичной обмотке трансформатора к напряжению на первичной обмотке (напряжение на вторичной обмотке равно сумме напряжений на её зажимах и на её активном сопротивлении):

$$\frac{U_2 + I_2R_2}{U_1} = K \approx 0{,}07.$$

КПД трансформатора в данном случае равен отношению мощности, снимаемой с зажимов вторичной обмотки, к полной мощности, выделяющейся в ней:

$$\eta = \frac{I_2U_2}{I_2(U_2 + I_2R)} \cdot 100\ \% \approx 89\ \%.$$

Задача 4. Определите мощность, теряемую в линии электропередачи под напряжением 35 кВ при передаче мощности 1 МВт на расстояние $l = 80$ км по медным проводам площадью поперечного сечения 15 мм^2. Сдвиг фаз между током и напряжением в нагрузке φ, $\cos\varphi = 0{,}7$.

Решение. Мощность, теряемая в проводах,

$$P_{\text{тер}} = I^2R. \qquad (1)$$

Действующее значение силы тока $I = \frac{P}{U\cos\varphi}$, сопротивление проводов $R = \rho\frac{2l}{S}$. По таблице найдём удельное сопротивление меди: $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-2}$ Ом · мм^2/м. Обратим внимание на то, что в данном случае не имеет смысла переводить единицы в СИ, так как площадь поперечного сечения проводов дана в квадратных миллиметрах (мм^2).

Подставив эти выражения в формулу (1), получим

$$P_{\text{тер}} = \frac{2\rho l P^2}{SU^2\cos^2\varphi} = 3 \cdot 10^5\ \text{Вт}.$$

Потери достаточно большие: теряется около 30 % передаваемой мощности.