1. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Содержание теоретического материала.

Механические колебания. Гармонические колебания. Пружинный и математический маятники. Условия, необходимые для возникновения и поддержания колебаний. Параметры колебательного движения. Свободные и вынужденные колебания. Резонанс.

Контрольные вопросы

1.1. Какие процессы называются колебаниями?

1.2. Какие колебания называются периодическими?

1.3. Какие колебания называются механическими?

1.4. Как происходят колебания пружинного маятника?

1.5. Какие преобразования энергии происходят при колебаниях пружинного маятника?

1.6. Что называется математическим маятником? Как происходят его колебания?

1.7. Каково направление равнодействующей сил, действующих на груз математического маятника в моменты, когда этот груз а) находится в крайних положениях, б) проходит через положение равновесия?

1.8. Какие преобразования энергии происходят при движениях математического маятника?

1.9. Исходя из описания процессов, происходящих в пружинном и математическом маятниках, сформулируйте общие закономерности и условия, при которых происходят колебания.

1.10. Дайте определения основных параметров колебаний: период, частота (и связь между ними), амплитуда, смещение.

1.11. Проведя аналогию между вращательным и колебательным движениями материальной точки, получите формулу зависимости величины смещения от времени.

1.12. Что называется фазой колебательного движения?

1.13. Нарисуйте график зависимости смещения колеблющейся точки от фазы колебания ωt.

1.14. Запишите уравнение для собственных колебаний, используя второй закон Ньютона, без учета потерь.

1.15. Какие колебания называются гармоническими?

1.16. Напишите формулы, определяющие период колебаний пружинного и математического маятников.

1.17. Является ли движение материального тела при гармонических колебаниях равнопеременным?

1.18. Получите формулы зависимости скорости и ускорения от времени при гармонических колебаниях.

1.19. Что такое начальная фаза колебаний?

1.20. Какова наименьшая разность фаз колебаний маятников, изображенных на рис. VII.1 *а*, *б*. Смещение каждого маятника на рисунках равно амплитуде. Сохранится ли со временем разность фаз неизменной для обоих случаев?

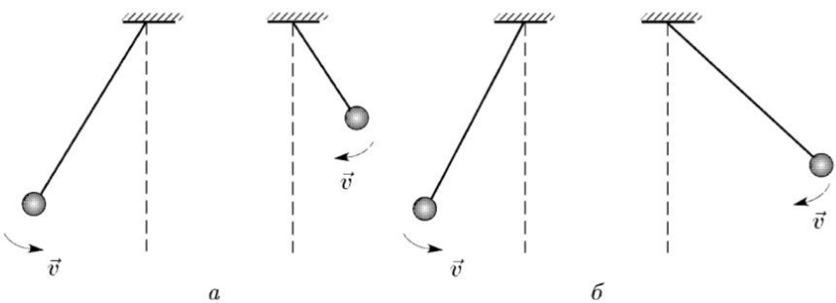

Рис. VII.1

1.21. Два пружинных маятника колеблются по вертикали с одинаковыми периодами. Второй маятник начинает колебаться с опозданием а) на два периода; б) на половину периода. Что можно сказать о направлениях скоростей этих маятников относительно друг друга в любой момент времени?

1.22. Какие колебания называются свободными?

1.23. Какие колебания являются затухающими?

1.24. Какие колебания называются вынужденными?

1.25. В чем заключается явление, называемое резонансом?

1.26. Чем объясняется резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний при резонансе?

1.27. Чему равна разность фаз между гармоническими колебаниями вынуждающей силы и смещением при резонансе?

1.28. Если вы несете воду в ведре, то она может начать сильно расплескиваться. Если сменить темп ходьбы, то расплескивание уменьшится или прекратится. Почему это происходит?

1.29. На горизонтальную каменную плиту вертикально падает стальной шарик и упруго отскакивает от нее, затем снова падает, отскакивает и т.д. Можно ли считать движения шарика гармоническими колебаниями?

1.30. Для какой цели «чечевица» маятника часов не закрепляется неподвижно на его стержне, а надевается на него так, что ее можно перемещать по этому стержню вверх-вниз и закреплять на любой высоте?

1.31. Как будет изменяться ход маятниковых часов при наступлении летних жарких дней по сравнению с холодными зимними днями, если часы установлены в неутепленном помещении? Стержень маятника металлический.

1.32. Как будут идти на полюсе и на экваторе маятниковые часы, установленные точно в Москве?

1.33. Изменится ли период колебаний качелей, если вместо одного человека на качели сядут двое?

1.34. Как возникают и распространяются механические волны?

1.35. Какие волны называют поперечными, какие — продольными?

1.36. Рассмотрите подробно процесс возникновения поперечных волн.

1.37. а) В бегущей поперечной волне частица A имеет направление скорости, указанное на рис. VII.2. В каком направлении движется волна?

б) На рис. VII.3 изображено расположение точек, участвующих в волновом движении в некоторый момент времени. Каковы направления векторов мгновенных скоростей точек A, B, C и D в рассматриваемый момент времени?

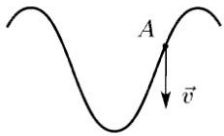

Рис. VII.2

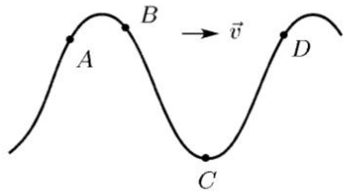

Рис. VII.3

1.38. Что такое длина волны и как вычислить скорость распространения волны?

1.39. Рассмотрите подробно процесс возникновения продольных волн.

1.40. Каков характер движения частиц при распространении волны в среде?

1.41. Описывая свойства механических волн, мы говорим о двух видах движения: движении частиц среды и движении волны. Постоянны ли скорости этих двух видов движений в однородной среде?

1.42. Какие волны называются сферическими, какие плоскими?

1.43. Что собой представляет звук? Какова его физическая природа?

1.44. Один камертон при колебании издает высокий звук, другой — низкий. Нарисуйте графики колебаний частиц среды для обоих случаев.

1.45. Один раз камертон издает тихий звук, другой раз тот же камертон звучит громче. Нарисуйте графики колебаний частиц среды для обоих случаев.

1.46. Два звука одинаковой громкости и высоты отличаются по тембру. Как различаются графики колебаний частиц среды при распространении звуков?

1.47. При полете большинство насекомых издают звук. Чем он вызывается?

1.48. Оцените диапазон длин звуковых волн, считая, что скорость звука в воздухе при нормальном давлении и 20 °C равна 343 м/с.

1.49. Как происходит отражение звука от преград?

1.50. Какое физическое явление лежит в основе метода гидролокации?

Ответы

1.1. Колебаниями называются движения или любые изменения в состоянии системы, которые повторяются через некоторые промежутки времени. Можно говорить не только о колебаниях при движении тел, но также и о колебаниях любых физических величин, характеризующих состояние систем тел: колебаниях температуры, давления, размеров, концентрации химических веществ и пр.

1.2. Колебания называются периодическими, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через равные промежутки времени.

1.3. При механических колебаниях тело (или материальная точка) периодически изменяет свое положение, причем оно движется по некоторой траектории поочередно в двух противоположных направлениях относительно положения наиболее устойчивого равновесия.

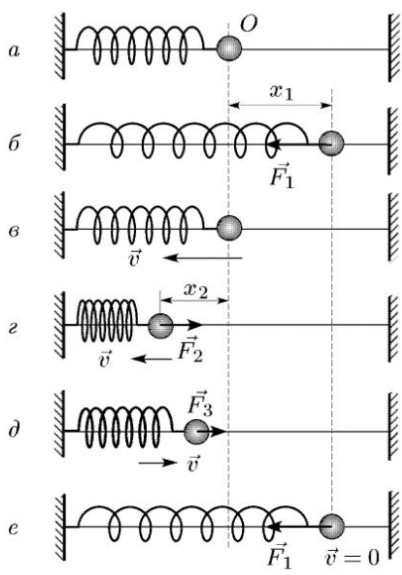

Рис. VII.4

1.4. Пружинный маятник (рис. VII.4 *а*) представляет собой массивный шар, просверленный по диаметру и надетый на горизонтальный стержень. Сила трения при движении шара по стержню мала, а сила тяжести шара компенсируется силой реакции со стороны стержня. Стержень закреплен между двумя вертикальными опорами. К шару одним концом прикреплена пружина, другой конец которой закреплен на опоре. Если пружина не деформирована, то шар находится в положении равновесия. При смещении шарика (например, вправо) на расстояние x_1 от положения равновесия (рис. VII.4 *б*) со стороны деформированной пружины на шар начнет действовать сила упругости $\vec{F}_1$. По закону Гука модуль упругой силы пропорционален удлинению пружины x. Сила упругости всегда направлена в сторону, противоположную направлению деформации: $F = -kx$, k — жесткость пружины, x — величина удлинения (или деформации). Под действием этой силы шарик движется к точке равновесия, при этом его скорость увеличивается. В положении равновесия (рис. VII.4 *в*) сила упругости равна нулю (т. к. $x = 0$), но благодаря инерции шарик проходит эту точку и начинает двигаться влево, сжимая пружину (рис. VII.4 *г*). Возникшая при этом сила упругости $\vec{F}_2$ $(x_2 < x_1)$ опять направлена в сторону к точке равновесия O, против направления скорости, поэтому на этом участке пути движение шарика замедленное. В некоторой точке шар на мгновение остановится, после чего под действием силы $\vec{F}_3$ начнет ускоренно двигаться опять к положению равновесия. Вновь пройдя точку O по инерции, шар, сжимая пружину, замедленно дойдет до правой крайней точки, то есть совершит одно полное колебание. Если трение мало, то значения наибольшего смещения вправо и влево одинаковы. Далее движения шарика будут повторяться. Из рис. VII.4 видно, что сила упругости при колебаниях маятника всегда направлена к положению равновесия, поэтому ее можно назвать возвращающей силой.

Подобным же образом ведет себя вертикальный пружинный маятник.

1.5. Сжатая пружина обладает потенциальной энергией упругого взаимодействия ее витков, которая равна $W_п = kx^2/2$. По мере уменьшения величины деформации x значение потенциальной энергии пружины (а, следовательно, и потенциальной энергии связанного с ней шара) убывает, но возрастает скорость и, соответственно, кинетическая энергия шарика ($W_к = mv^2/2$). В положении равновесия потенциальная энергия равна нулю (т.к. $x = 0$), а кинетическая энергия максимальна. При дальнейшем движении тела, связанного с пружиной, его скорость уменьшается, а пружина сжимается. Теперь кинетическая энергия превращается в потенциальную. В крайнем положении шарика его скорость равна 0 и $W_к = 0$, а $W_п$ — максимальна. Следовательно, происходит попеременное превращение потенциальной энергии в кинетическую и наоборот. Полная механическая энергия пружинного маятника равна сумме его кинетической и потенциальной энергий:

$$W = W_п + W_к = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2}.$$

1.6. Математический маятник представляет собой тяжелый шарик, подвешенный на длинной нити, при условиях: 1) размеры шарика малы по сравнению с длиной нити, и шарик можно рассматривать как материальную точку; 2) нить невесома и нерастяжима; 3) всеми процессами, приводящими к потерям, пренебрегаем.

На шарик действуют сила тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g}$ и сила упругого натяжения нити $\vec{F}_н$. Если маятник покоится, то в положении равновесия (рис. VII.5 *а*) эти силы компенсируют друг друга. Если математический маятник отклонить от положения равновесия и отпустить, то он будет совершать колебания, двигаясь по дуге окружности, радиус которой равен длине нити.

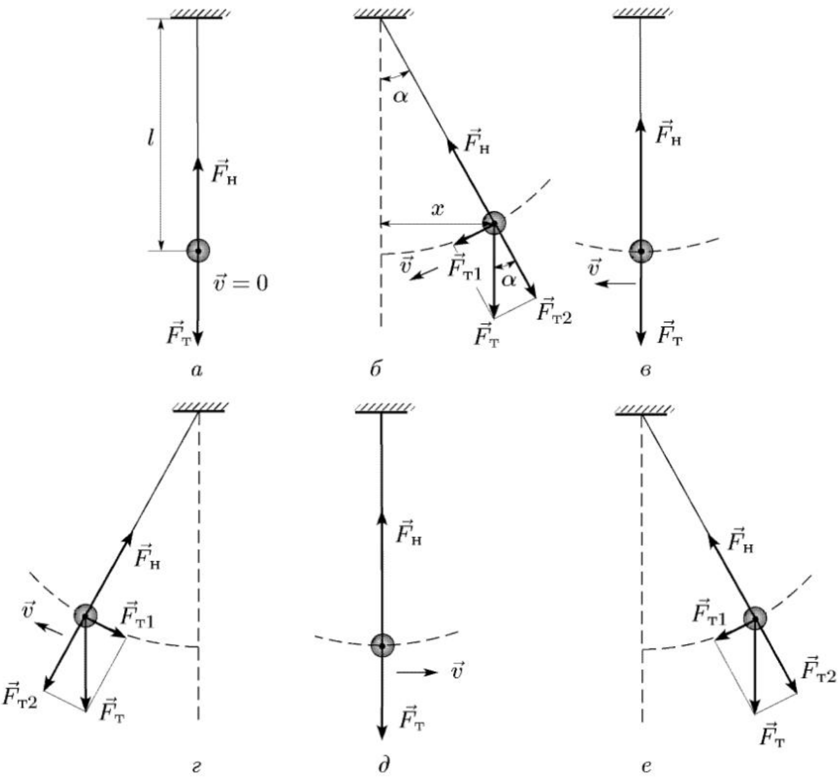

Рис. VII.5

При отклонении маятника (например, вправо — рис. VII.5 *б*) сила тяжести и сила натяжения нити уже не компенсируют друг друга. Силу тяжести $\vec{F}_т$ можно разложить на две составляющие и направлена к положению равновесия. Во втором случае она направлена к точке подвеса маятника.

1.8. Если математический маятник отклонить от положения равновесия, то при этом увеличится его потенциальная энергия гравитационного взаимодействия с Землей. Если за нулевой уровень потенциальной энергии принять уровень его положения равновесия, то в отклоненном положении он будет обладать потенциальной энергией $W_п = mgh$ (h — высота подъема маятника относительно нулевого уровня потенциальной энергии — рис. VII.6). Если отпустить маятник, то при его движении потенциальная энергия убывает, а кинетическая $W_к$ — возрастает. В положении равновесия $W_п = 0$, а $W_к$ — максимальна. После прохождения средней точки скорость, и, соответственно, $W_к$ уменьшаются, шарик поднимается вдоль дуги и увеличивается $W_п$. В точке наивысшего подъема шарик на мгновение останавливается, поэтому кинетическая энергия становится равной нулю, а потенциальная максимальна. Далее процесс повторяется.

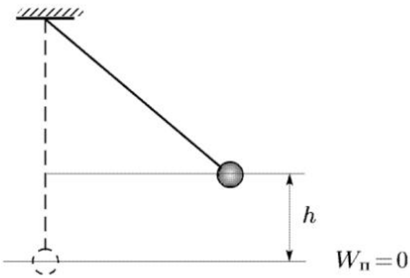

Рис. VII.6

Таким образом, в математическом маятнике, так же, как и в пружинном, происходят преобразования потенциальной энергии в кинетическую и наоборот — в соответствии с законом сохранения механической энергии. Полная механическая энергия математического маятника в каждой точке равна

$$W = W_п + W_к = mgh + \frac{mv^2}{2}.$$

Если трение при движении математического маятника мало, то полная механическая энергия долго остается неизменной, а слагаемые $W_п$ и $W_к$ попеременно уменьшаются и увеличиваются. Это представлено на рис. VII.7,

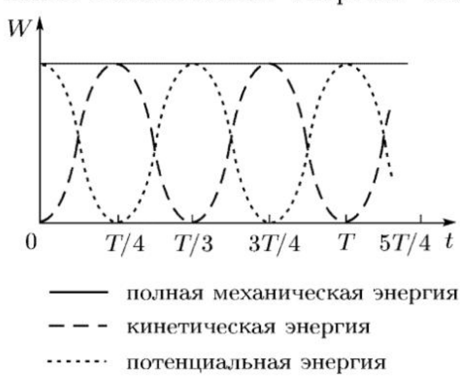

Рис. VII.7

где изображены изменения во времени потенциальной, кинетической и полной энергий маятника. Подобный график справедлив и для пружинного маятника.

1.9. Колебания в математическом и пружинном маятниках начинались с того, что деформировали пружину или отклоняли шарик (сообщали потенциальную энергию). Колебания также будут происходить, если материальное тело маятника подтолкнуть, то есть сообщить кинетическую энергию. Таким образом, можно сформулировать первое условие:

1. *Наличие некоторого начального запаса энергии у материальной точки.*

В пружинном и математическом маятниках действуют силы, все время направленные к положению равновесия — возвращающие силы. В случае пружинного маятника это упругая сила, у математического маятника — тангенциальная составляющая силы тяжести. Сравнивая формулы для этих сил ($F = -kx$ и $F = -mgx/l$), легко увидеть их сходство: обе силы направлены в сторону, противоположную смещению тела — этому соответствует знак «$-$»; обе силы пропорциональны смещению x; коэффициенты пропорциональности k и (mg/l) зависят от свойств маятников. Для случая математического маятника возвращающую силу можно назвать квазиупругой (подобной упругой)[1].

Исходя из вышесказанного, второе необходимое для колебательного движения условие следующее:

2. *Действие на материальную точку возвращающей силы.*

Если бы тело, связанное с пружиной или нитью подвеса, было очень легким, то в положении равновесия, когда квазиупругая сила равна нулю, оно могло остановиться. Поэтому третье условие состоит в следующем:

3. *Наличие инерции у колеблющегося тела.*

Очевидно и то, что полученная материальной точкой энергия при смещении из положения равновесия не должна полностью расходоваться на преодоление сопротивления внутри колеблющейся системы, когда тело возвращается в положение равновесия. Поэтому можно отметить последнее условие:

---

[1] Квазиупругими силами могут быть силы разной природы: при колебаниях поплавка на поверхности воды это равнодействующая силы Архимеда и силы тяжести, при вертикальном пружинном маятнике — равнодействующая силы тяжести и упругости подвеса, при колебании зарядов — силы электрической природы и т.п.

4. *Потери энергии при колебаниях маятника должны быть пренебрежимо малы.*

1.10. Время, за которое совершается одно полное колебание, называется периодом. Обозначается так же, как и при рассмотрении движения тела по окружности буквой T, измеряется в секундах (СИ).

Число колебаний, совершаемых телом за 1 с, называется частотой. Обозначается частота — «ν». Единица измерения частоты — герц (Гц). 1 Гц — частота, при которой за 1 с тело совершает одно полное колебание.

Используются кратные единицы частоты:

1 килогерц (кГц)=10^3 Гц;
1 мегагерц (МГц)=10^6 Гц.

Если за время t маятник совершил n колебаний, то период и частоту можно вычислить следующим образом:

$$T = \frac{t}{n}; \qquad \nu = \frac{n}{t}.$$

Из сравнения этих формул можно записать связь между T и ν:

$$T = \frac{1}{\nu}.$$

Максимальное смещение колеблющегося тела от положения равновесия называется амплитудой колебания. Обозначим амплитуду — x_{m}, измеряется она в метрах (а также других кратных и дольных единицах метра). Если речь идет о колебаниях каких-либо других физических величин (например, давления, температуры, напряжения и т.п.), то амплитуда измеряется в единицах, соответствующих данной величине.

Отклонение колеблющейся точки от положения равновесия в данный момент времени называется смещением. Значение смещения меняется от нуля до значения амплитуды.

1.11. Пусть материальная точка равномерно движется по окружности в направлении, указанном стрелкой (рис. VII.8 a), из точки M.

За период материальная точка совершит один полный оборот, причем радиус, связанный с вращающейся точкой, поворачивается на угол φ, меняющийся от $0°$ до $360°$ (от 0 до 2π радиан). Разделим период на 8 равных частей и на рис. VII.8 a отметим цифрами соответствующие положения материальной точки. Нарисуем ось координат Ox, параллельную вертикальному

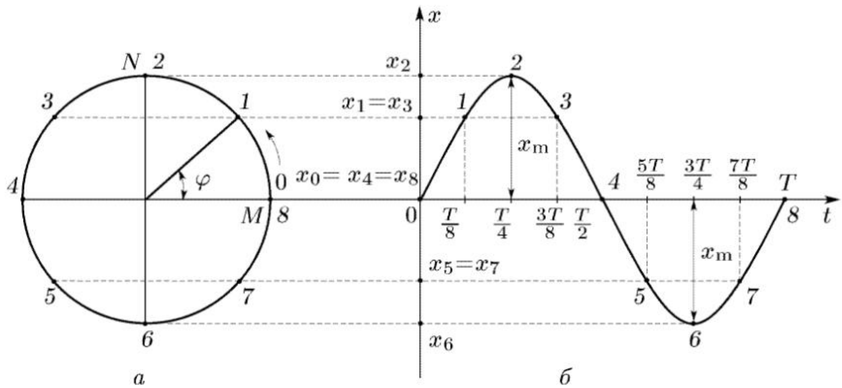

Рис. VII.8

диаметру окружности; начало координат совместим с проекцией материальной точки в начальный момент времени (рис. VII.8 *б*). Далее, опуская перпендикуляры на ось Ox из точек *0, 1, 2, …, 8*, отметим положение проекций (или значения координат) вращающейся точки в моменты времени $t_0 = 0$, $t_1 = T/8$, $t_2 = 2T/8 = T/4$, $t_3 = 3T/8$, $t_4 = 4T/8 = T/2$, $t_5 = 5T/8$, $t_6 = 6T/8 = 3T/4$, $t_7 = 7T/8$, $t_8 = 8T/8 = T$. Значения координат обозначены соответствующими индексами: $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_8$. Для того, чтобы более наглядно увидеть, как меняется с течением времени значение координаты вращающейся точки, надо построить ось абсцисс и отметить на ней зафиксированные моменты времени: $0, T/8, T/4, \ldots, T$. Найдем точки пересечения оси абсцисс с соответствующими ординатами и соединим их (см. внимательно рис. VII.8 *б*). Получили график зависимости от времени координаты точки, движущейся по окружности $x = f(t)$. Графиком оказалась синусоида. Действительно, если φ — угол между радиусом, связанным с вращающейся материальной точкой и горизонтальным диаметром, то в любом положении точки координата ее проекции равна

$$x = x_{\mathrm{m}} \sin\varphi,$$

где x_{m} — радиус окружности, а для колебательного движения это амплитуда. Амплитуда равна величине $x_{\mathrm{m}} = |Ox_2| = |Ox_6|$.

Если движение материальной точки начнется (при $t = 0$) из точки N, то график зависимости $x(t)$ будет представлять собой косинусоиду и формула для ординаты будет следующая:

$$x = x_{\mathrm{m}} \cos\varphi.$$

Постройте график для этого случая самостоятельно, подобно тому, как построен график на рис. VII.8 *б*.

Из вышесказанного следует, что проекция на ось Ox точки, движущейся равномерно по окружности, совершает колебательное движение около точки O: проекция материальной точки отклоняется поочередно то в одну, то в другую сторону от точки O на одинаковое расстояние, равное радиусу окружности (внимательно посмотрите, как последовательно меняется положение точек $x_0, x_1, \cdots, x_8$ на рис. VII.8 *б*).

При выбранном расположении оси Ox и начала координат значение ординаты проекции вращающейся точки равно значению смещения от средней точки O.

Выявленная аналогия между вращательным и колебательным движениями позволяет использовать полученные выше соотношения для описания колебательного движения.

Для характеристики вращательного движения материальной точки была введена угловая скорость ω:

$$\omega = \frac{\varphi}{t},$$

φ — угол поворота радиуса, связанного с вращающейся точкой, за время t. Используя эту формулу, можно записать выражение для смещения от положения равновесия в виде

$$x = x_{\mathrm{m}} \sin \omega t \quad \text{или} \quad x = x_{\mathrm{m}} \cos \omega t.$$

Величина ω при использовании ее для описания колебательного движения называется круговой или циклической частотой колебания. Она связана с периодом T и частотой ν так же, как и в формулах вращательного движения:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}; \qquad \omega = 2\pi\nu.$$

$[\omega]$=рад/с или 1/с (так как радиан — величина безразмерная).

1.12. В формулах, полученных в ответе на предыдущий вопрос, смещение зависит только от аргумента тригонометрической функции $\varphi = \omega t$. Эта величина называется фазой колебания. Она меняется с течением времени и определяет состояние колебательного процесса в данный момент времени.

Если записать фазу в виде $\varphi = \omega t = 2\pi t/T$, то можно определить ее физический смысл. Отношение (t/T) показывает, какая часть периода прошла к моменту времени t. Из аналогии вращательного и колебательного движений ясно, что одному периоду T соответствует поворот радиуса на угол 2π. Поэтому можно сказать, что фаза показывает, какая часть периода, выраженная в угловой мере, прошла к моменту времени t.

1.13. Составим таблицу соответствия между временем t, выраженным в долях периода T, и значением фазы:

t	0	$T/4$	$T/2$	$3T/4$	T
$\varphi = \omega t = 2\pi t/T$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

В соответствии с этим график, изображенный на рис. VII.8 *б*, можно нарисовать, отложив по горизонтальной оси фазу колебаний (ωt) (рис. VII.9). Сплошной линией изображен график, соответствующий зависимости x от фазы по закону синуса ($x = x_{\mathrm{m}} \sin \omega t$), штриховой линией — по закону косинуса ($x = x_{\mathrm{m}} \cos \omega t$).

1.14. Согласно II закону Ньютона произведение массы тела на ускорение равно векторной сумме сил, действующих на тело. Собственные колебания происходят под действием внутренних упругих или квазиупругих сил системы. Равнодействующая этих сил меняется при смещении маятника, величина ускорения также меняется. Поэтому мгновенное значение ускорения следует записать как вторую производную от смещения: $a = \mathrm{d}^2x/(\mathrm{d}t^2)$ (или $a = x''$). Так как для пружинного маятника сила $F = -kx$, то II закон Ньютона запишем следующим образом:

$$\frac{m \cdot \mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \qquad (\text{или } mx'' = -kx).$$

Уравнения, которые объединяют переменные и их производные, называются дифференциальными. Полученное дифференциальное уравнение можно записать, введя обозначение $k/m = \omega^2$, в следующей форме:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0, \quad \text{или} \quad x'' + \omega^2 x = 0.$$

Это и есть дифференциальное уравнение собственных колебаний маятника. Математический анализ дает решение этого уравнения в следующем виде:

$$x = x_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad \text{или} \quad x = x_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Постоянные x_{m} и φ_0 определяются начальными условиями колебаний — значениями начального запаса энергии и того момента времени, с которого начали наблюдать за колебаниями. Нетрудно проверить, что при подстановке выражения для x в дифференциальное уравнение получим тождество.

Величина $\omega = \sqrt{k/m}$ в полученном решении соответствует круговой циклической частоте колебаний.

Для математического маятника выражение для квазиупругой силы имеет вид

$$F = -\frac{mg}{l}\,x,$$

где коэффициенту жесткости соответствует отношение mg/l. Дифференциальное уравнение для математического маятника точно такое же, как и для пружинного, только коэффициент ω^2 будет иметь вид

$$\omega^2 = \frac{g}{l}.$$

Круговая частота для математического маятника $\omega = \sqrt{g/l}$.

1.15. Гармонические колебания являются простейшим видом колебаний, при которых физическая величина, описывающая поведение системы, меняется по закону синуса или косинуса. При механических колебаниях это смещение, хотя в других случаях можно говорить и о колебаниях силы тока, напряжения, характеристиках электрического и магнитного полей, давления и пр.

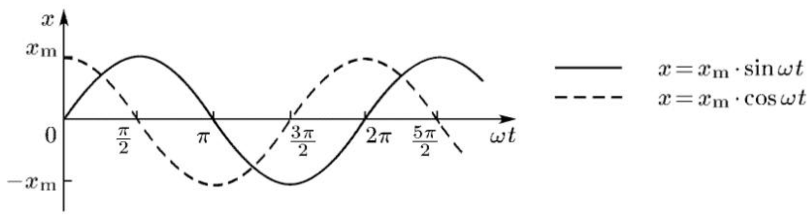

Рис. VII.9

Графики, соответствующие гармоническим колебаниям любой природы, представлены на рис. VII.9.

1.16. Исходя из того, что с одной стороны круговая частота $\omega = 2\pi/T$, а с другой стороны $\omega = \sqrt{k/m}$ для пружинного маятника, и $\omega = \sqrt{g/l}$ для математического, можно получить формулы для периодов:
— пружинного маятника,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

m — масса тела, связанного с пружиной, k — жесткость пружины;

— математического маятника,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

l — длина нити, g — ускорение свободного падения.

1.17. Ускорение при движении тела будет постоянно, если движение совершается под действием силы, модуль которой не меняется. Как мы видели на примере пружинного и математического маятников, возвращающая сила зависит от смещения, то есть меняется от точки к точке. Поэтому движение при механических колебаниях происходит с переменным ускорением.

1.18. Пусть смещение при гармонических колебаниях определяется по закону синуса:

$$x(t) = x_{\text{m}}\sin\omega t. \qquad (а)$$

Формулу для мгновенного значения скорости получим, взяв производную от $x(t)$:

$$v(t) = x' = (x_{\text{m}}\sin\omega t)' = x_{\text{m}}(\sin\omega t)' = x_{\text{m}}\omega\cos\omega t,$$
$$\text{или} \quad v(t) = v_0\cos\omega t. \qquad (б)$$

Множитель $(x_m\omega)$ соответствует максимальному (амплитудному) значению скорости v_0, и имеет соответствующую размерность:

$$[x_{\text{m}}\omega] = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ускорение при колебательном движении найдем, взяв производную от скорости:

$$\alpha(t) = v' = x_{\text{m}}\omega(\cos\omega t)' = -x_{\text{m}}\omega^2\sin\omega t. \qquad (в)$$

Множитель $(x_{\text{m}}\omega^2)$ есть максимальное (амплитудное) значение ускорения a_{m},

$$[a_{\text{m}}] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

1.19. Рассмотрим равномерное движение материальной точки по окружности подобно тому, как это сделано в ответе на вопрос 1.11, но с одним отличием: движение точки начинается с произвольного места на окружности — точки K. При этом радиус, связанный с точкой K, составляет с горизонтальным диаметром некоторый угол φ_0 (рис. VII.10 *а*). Зависимость координаты проекции движущейся точки от времени для этого

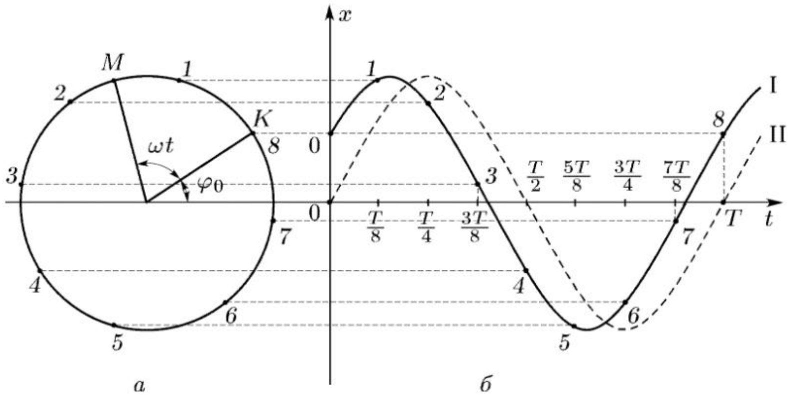

Рис. VII.10

случая изображена на рис. VII.10 *б* (сплошная линия — график I). Рядом штрихами изображен график синусоиды (линия II). Из сравнения видно, что график I сдвинут вперед вдоль оси времени относительно синусоиды II (опережает ее).

При любом положении вращающейся точки угол φ, определяющий фазу колебаний, равен $\varphi = \omega t + \varphi_0$; при $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$, поэтому величину φ_0 называют начальной фазой колебания. В соответствии с этим формулы для смещения колеблющейся точки от положения равновесия в общем виде будут такими:

$$x = x_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \varphi_0),$$

$$x = x_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Если в частном случае $\varphi_0 = 0$, то эти формулы совпадают с полученными в 1.11. Значение φ_0 обычно задается в радианах, так же как и величина ωt. Знак у φ_0 может быть как положительный, так и отрицательный. Если $\varphi_0 < 0$, то график зависимости $x(t)$ будет отставать от синусоиды, как изображено на рис. VII.11.

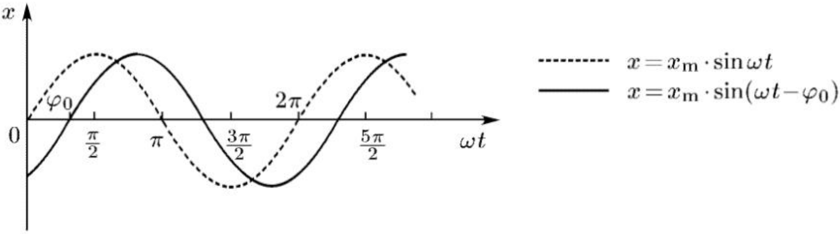

Рис. VII.11

1.20. В обоих случаях разность фаз колебаний равна π; у маятников, изображенных на рис. VII.1 *а*, разные длины, поэтому их периоды отличаются и сдвиг по фазе с течением времени меняется; у маятников, изображенных на рис. VII.1 *б*, длины нитей и, соответственно, периоды одинаковы, и поэтому разность фаз остается все время неизменной.

1.21. В первом случае направления скоростей обоих маятников одинаковы, и они колеблются в одинаковых фазах; во втором случае направления скоростей противоположны, и они колеблются в противоположных фазах.

1.22. Колебания, которые совершаются только за счет первоначального запаса энергии колеблющего тела и только под действием внутренних сил, называются свободными. Частота, с которой совершаются свободные колебания, называется собственной частотой. Если потери энергии в колебательной системе малы, то свободные колебания могут происходить достаточно долго с неизменной амплитудой.

1.23. При реальных колебаниях маятника часть энергии затрачивается на преодоление силы трения в системе и сил сопротивления окружающей среды. Поэтому амплитуда колебаний со временем уменьшается, и через некоторое время они затухают. На рис. VII.12 изображен график зависимости смещения от времени для затухающих колебаний.

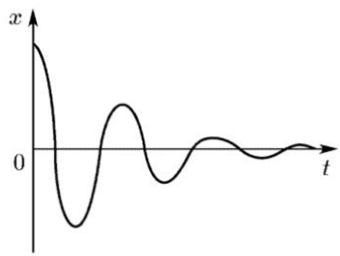

Рис. VII.12

1.24. Чтобы сделать колебания маятников незатухающими, необходимо периодически пополнять запас энергии колеблющегося тела. Для этого на тело надо периодически действовать внешней силой в определенном направлении. Например, чтобы колебания качелей не прекращались, мы их периодически подталкиваем в направлении их движения.

Колебания, совершаемые под действием внешней, периодически изменяющейся силы, называются вынужденными. Частота вынужденных колебаний равна частоте действия вынуждающей силы. Кроме этого условия еще необходимо, чтобы совпадали фазы колебания тела и внешней периодической силы. В отличие от свободных, вынужденные колебания являются незатухающими, так как энергия, затрачиваемая на преодоление трения, периодически пополняется за счет работы внешней силы.

1.25. Амплитуда вынужденных колебаний зависит от соотношения частот внешней периодической силы ν и собственной частоты тела ν_0. Наибольшая амплитуда будет при совпадении этих частот.

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний тела, происходящее при совпадении частоты действующей на тело внешней силы с собственной частотой ν_0 свободных колебаний данного тела, называют резонансом.

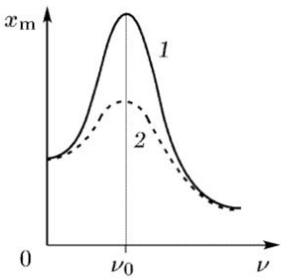

Рис. VII.13

На рис. VII.13 изображены зависимости амплитуды вынужденных колебаний двух тел от частоты действующей на эти тела внешней силы. Из рисунка видно, что амплитуда вынужденных колебаний возрастает с приближением частоты ν к собственной частоте тела ν_0 и становится максимальной при $\nu \approx \nu_0$, т.е. наступает резонанс. Кроме равенства частот для резонанса необходимым является следующее условие: изменения вынуждающей силы должны совпадать по фазе с изменением скорости.

Возрастание амплитуды вынужденных колебаний при резонансе тем больше, чем меньше трение в системе. При малом трении резонанс «острый» (кривая *1* на рис. VII.13), при большом трении — «тупой» (кривая *2*).

1.26. При резонансе ($\nu \approx \nu_0$) внешняя сила действует в такт с колебаниями тела. На протяжении всего периода направление силы совпадает с направлением скорости колеблющегося тела, поэтому внешняя сила совершает положительную работу и энергия маятника возрастает. При установившихся колебаниях (т.е. при неизменной амплитуде) положительная работа внешней силы равна по величине отрицательной работе силы сопротивления.

Если $\nu \neq \nu_0$, то внешняя сила лишь в течение части периода совершает положительную работу. В течение другой же части периода направление силы противоположно вектору скорости и работа внешней силы отрицательна. В целом за период работа внешней силы невелика и, соответственно, невелика амплитуда установившихся колебаний.

1.27. Чтобы работа вынуждающей силы была положительна, ее направление должно совпадать с направлением скорости движения. Так как скорость определяется производной от смещения, то график зависимости $v(t)$ (и также $F(t)$) опережает на $\pi/2$ график $x(t)$ (рис. VII.14 *а*, *б*, *в*).

Из рис. VII.14 видно, что значение вынуждающей силы наибольшее при прохождении точки равновесия, а в точке наибольшего смещения значение вынуждающей силы равно нулю.

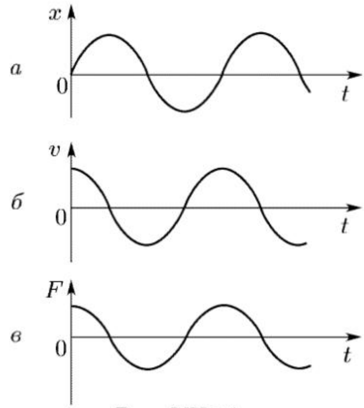

Рис. VII.14

1.28. При изменении темпа ходьбы меняется частота внешней вынуждающей силы, вызвавшей резонансные колебания ведра. Поэтому система «уходит» из состояния резонанса.

1.29. Нет, так как движение шарика при движении вниз равноускоренное, а вверх — равнозамедленное. При этом величина ускорения постоянна ($g = 9,8$ м/с^2) и направлено оно всегда вертикально вниз. При гармонических колебаниях ускорение меняется по гармоническому закону.

1.30. Это нужно для того, чтобы скорректировать ход часов: если часы отстают, то надо уменьшить период маятника. Для этого «чечевицу» надо немного поднять, то есть уменьшить длину подвеса; если часы спешат, то период маятника надо увеличить, для чего «чечевицу» следует немного опустить.

1.31. Летом часы будут отставать, так как при более высокой температуре маятник удлинится, а зимой — спешить.

1.32. На полюсе будут спешить, на экваторе — отставать. Это объясняется тем, что ускорение свободного падения на полюсе немного больше, чем на экваторе (т.к. Земля имеет не строго сферическую форму — несколько сжата вдоль оси). В соответствии с формулой период колебаний маятника на полюсе будет меньше, чем на экваторе (частота больше). Поэтому стрелка будет вращаться быстрее и часы на полюсе будут спешить. Соответственно, на экваторе — отставать, если они отрегулированы точно в районе средних широт.

1.33. Нет, так как период математического маятника от массы не зависит.

1.34. Колеблющееся тело передает часть своей энергии частицам окружающей среды, вовлекая их в колебательное движение. Среда должна быть упругой, иначе колебания быстро прекращаются.

Процесс распространения механических колебаний в упругой среде[1] называется механической волной или механическим волновым движением.

Если какое-либо тело совершает колебания в упругой среде, то оно действует на частицы среды, прилегающие к телу и заставляет их совершать вынужденные колебания. Среда вблизи колеблющегося тела деформируется, в ней возникают упругие силы. Эти силы передаются от частицы к частице, они действуют на все более удаленные от тела частицы среды, выводя их из положения равновесия. Постепенно все частицы среды вовлекаются в колебательное движение, в пространстве распространяется волна.

1.35. Волны, в которых колебания частиц среды происходят перпендикулярно к направлению распространения волны, называются поперечными.

Волны, в которых колебания частиц среды происходят вдоль направления их распространения, называются продольными.

1.36. Процесс распространения поперечной линейной[2] волны можно проследить с помощью упругого шнура (например, резинового) — рис. VII.15.

Пусть колебания точки O упругого шнура происходит по закону $x = x_{\mathrm{m}} \sin \omega t$. Ось Oz указывает направление распространения волны. В начальный момент времени точка O начинает двигаться вверх, увлекая соседние точки шнура. В момент времени $t = T/4$ смещение точки O будет максимальным, и за это время в колебательный процесс будет вовлечена только часть шнура OA. Постепенно в колебательный процесс вовлекаются все большая и большая часть шнура (рассмотрите подробно рис. VII.15). К моменту времени $t = T$ точка O совершит одно полное колебание, при этом волна распространится вдоль шнура вправо на расстояние OD. Далее процесс повторяется, и колебания все дальше распространяются вдоль шнура. Как видно из рис. VII.15, поперечная волна представляет собой чередование гребней и впадин.

[1] Среда называется упругой, если между ее частицами существуют силы взаимодействия, препятствующие любой деформации этой среды.

[2] Волна, распространяющаяся вдоль совокупности материальных точек, расположенных на прямой линии и связанных упругими силами, называется линейной.

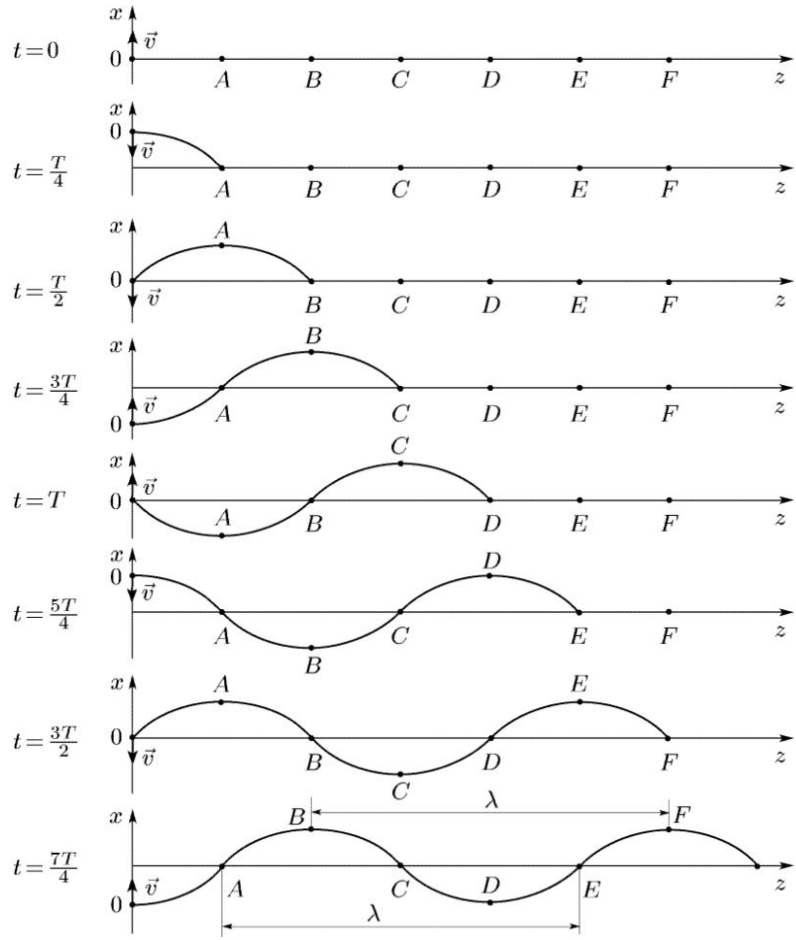

Рис. VII.15

1.37. а) Волна движется вправо; б) скорость точки A направлена вниз, точки B — вверх, точки D — вниз, скорость точки C равна нулю, а в последующий момент она начнет двигаться вверх.

1.38. Две точки волны колеблются в одинаковых фазах, если они, двигаясь в одном направлении, одновременно проходят через положение равновесия и одновременно достигают одинаковых по модулю и знаку амплитудных и мгновенных смещений. Этому условию удовлетворяют точки O и D, A и E, B и F и т.д. (рис. VII.15).

Кратчайшее расстояние между точками, колеблющимися в одной фазе, называется длиной волны (обозначается обычно λ, измеряется в единицах длины: м, мм, см, км). Для рис. VII.15 длина волны равна расстоянию $|OD|$, $|AE|$ или $|BF|$.

Иначе можно сказать, что длина волны равна расстоянию, которое проходит волна за время, равное одному периоду колебаний частиц.

Скорость распространения волны v можно найти по формуле

$$v = \frac{\lambda}{T}, \quad \text{или} \quad v = \lambda\nu,$$

где $\nu = 1/T$ — частота колебаний.

Скорость распространения волны зависит от упругих свойств среды и ее плотности.

1.39. Рассмотрим образование продольных волн (рис. VII.16). Крайняя точка *0* в некоторой момент времени $t = 0$ приходит в колебание под действием внешней силы вдоль направления, заданного осью x. На рис. VII.16 указаны последовательные положения точки *0* в течение времени, равного двум периодам ее колебания ($2T$) с интервалом времени $\Delta t = T/4$. При сближении между частицами возникают упругие силы, препятствующие их сближению. Рассмотрите внимательно рис. VII.16. Те частицы среды, которые в некоторый момент сблизились действием внешней силы (обведены овалом), в последующий момент расходятся. Поэтому там, где было сгущение (повышенная плотность) частиц среды, в последующий момент окажется разрежение.

Как видно из рис. VII.16, области сгущения частиц и области разрежения частиц перемещаются в направлении оси x, в то время как каждая частица совершает колебания около некоторого среднего положения.

Таким образом, продольная волна состоит из ряда сгущений и разрежений частиц. Наименьшее расстояние между точками, колеблющимися в одинаковых фазах, будет длиной волны. На рис. VII.16 это расстояние между точками *0* и *4*, *1* и *5*, *2* и *6* и т. д. (в любой момент времени).

1.40. При распространении волны надо различать два явления: колебательное движение частиц среды в волне и перемещение самой упругой волны по среде. Первое явление — это движение самих частиц как материальных точек, второе — переход возмущенного состояния среды (передача энергии) от одних частиц к другим. Частицы среды смещаются от положения равновесия на расстояние не более амплитуды, следовательно, волна переносит энергию колебательного движения, но не переносит вещество (массу) среды, в которой оно распространяется[1].

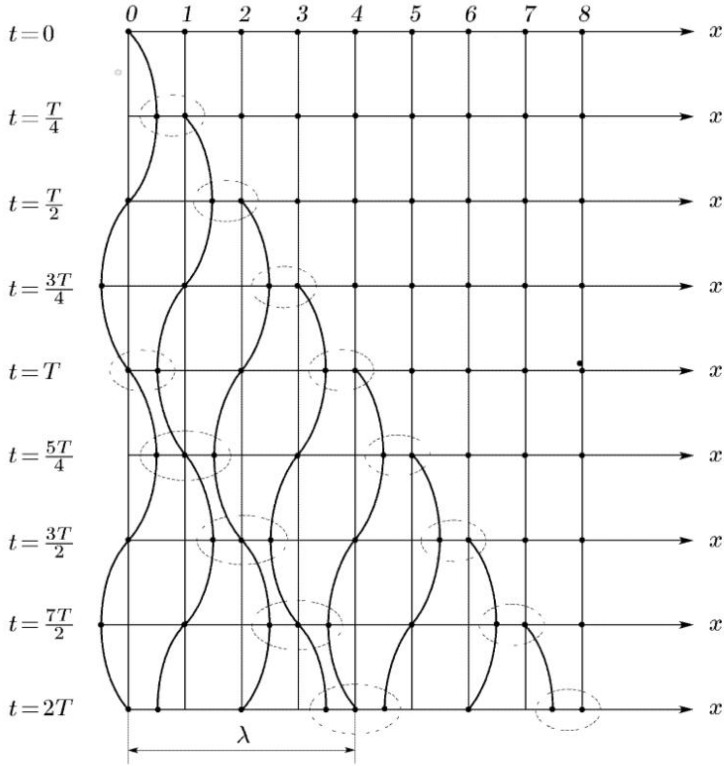

Рис. VII.16

Таким образом, волна — это направленное перемещение не самого вещества, а состояния среды. Волна распространяется поступательно, а частицы среды совершают колебания.

Из рис. VII.15, соответствующего поперечной волне, видно, что частицы совершают колебания вдоль оси x, а волна распространяется перпендикулярно ей, вдоль оси z. Из рис. VII.16 для продольной волны видно, что колебания частиц среды и распространение волны происходят в одном направлении вдоль оси x.

[1] Заметим, что в случае, так называемых, ударных волн (они возникают, например, при атомном взрыве) имеет место и перенос вещества, приводящий к большим разрушениям.

1.41. Скорость волны в однородной среде постоянна, а скорости частиц, совершающих колебания, все время меняются. В случае гармонических колебаний частиц скорость их также меняется по гармоническому закону.

1.42. Геометрическое место точек, до которых к данному времени дошли колебания, называется фронтом волны. Если источник колебаний точечный, и колебания распространяются в однородной среде, то фронт волны будет сферой, и волна называется сферической. Если источником колебаний является плоскость, то фронт волны представляет собой также плоскость, и волна называется плоской.

1.43. Колебания частиц в сплошных средах, распространяющиеся в виде продольных упругих волн, частота которых лежит в пределах от 20 до 20000 Гц, воздействуя на органы слуха, вызывают слуховые ощущения. Эти волны называются звуковыми или акустическими. Звуковые волны могут распространяться в твердых, жидких и газообразных телах. В вакууме звуковые волны не распространяются. Источником звука всегда является колеблющееся тело.

Механизм распространения упругой звуковой волны можно рассмотреть на следующем примере.

В длинный цилиндр, заполненный воздухом, вставлен поршень, совершающий гармонические колебания (рис. VII.17). В момент, когда поршень быстро вдвинут в цилиндр, молекулы вблизи поршня уплотняются. В области уплотнения увеличивается давление, и это влечет за собой возникновение упругих сил, действующих на молекулы и направленных в сторону меньших плотностей. Поэтому в направлении сил переходят молекулы из места первоначального уплотнения. Наличие упругости в среде приведет к тому, что сжатый воздух расширяется не до первоначального объема, а больше: при расширении частицы воздуха получают некоторый разгон. Работа, первоначально затраченная на сжатие, перейдет в кинетическую энергию движения, которая в свою очередь будет затрачена на работу сжатия окружающей среды и сожмет новый прилегающий слой воздуха (рассмотрите внимательно рис. VII.17: силы, действующие на молекулы в области повышенного давления, изображены стрелками).

Таким образом, давление и плотность воздуха (газа или любой другой упругой среды) в каждом месте при распространении звуковой волны будут изменяться, причем эти изменения вследствие упругости среды будут распространяться в среде.

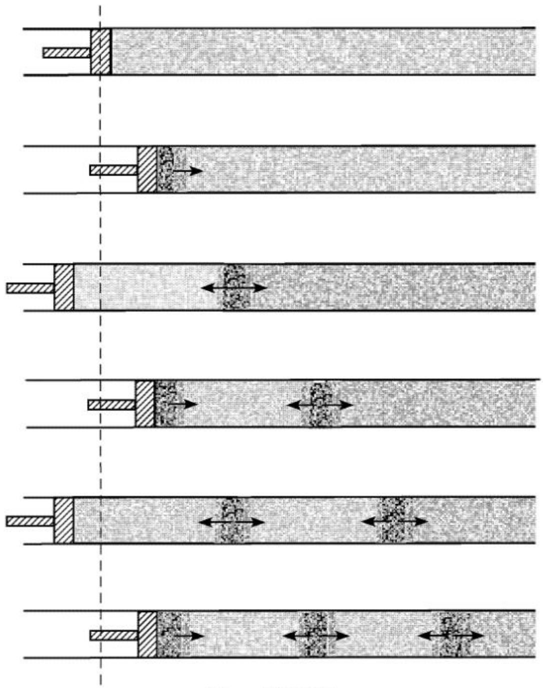

Рис. VII.17

1.44. См. рис. VII.18.

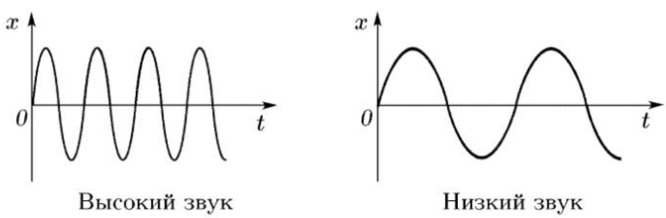

Рис. VII.18

1.45. См. рис. VII.19.

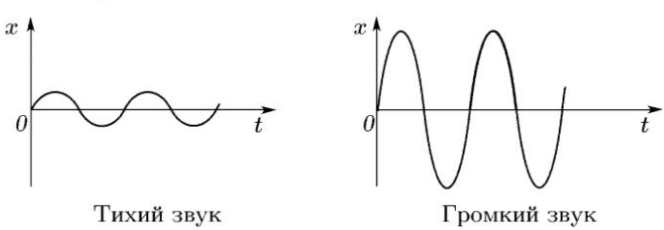

Рис. VII.19

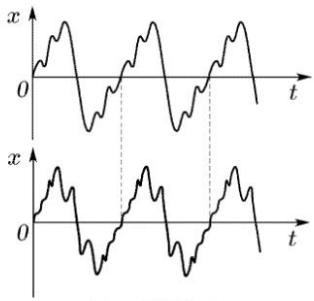

Рис. VII.20

1.46. Звуки, представляющие собой колебания с постоянной или постепенно меняющейся частотой, называются тонами. Тоны бывают простые и сложные. Простой (или чистый) тон получается при гармоническом колебании частиц среды. Сложному тону соответствует периодическое, но отличное от гармонического колебание. Два сложных тона, при которых частицы совершают разные по форме колебания, воспринимаются как отличающиеся по тембру (рис. VII.20).

1.47. Колебаниями крыльев насекомого.

1.48. Длина звуковой волны связана с ее скоростью и частотой следующей формулой:

$$\lambda = \frac{v}{\nu}.$$

Считая, что $\nu_{\min} = 20$ Гц, $\nu_{\max} = 20000$ Гц, можно найти $\lambda_{\max}$ и $\lambda_{\min}$:

$$\lambda_{\max} = \frac{v}{\nu_{\min}} \approx 17,5 \text{ м};$$

$$\lambda_{\min} = \frac{v}{\nu_{\max}} \approx 0,017 \text{ м} = 17 \text{ мм}.$$

1.49. Явления, происходящие при встрече звуковой волны с преградой, зависят от соотношения между размерами преграды и длиной звуковой волны. Если размеры препятствия значительно больше длины звуковой волны, звук отражается по закону зеркального отражения (угол отражения звуковой волны равен углу ее падения). Если же размеры препятствия сравнимы с длиной волны, то волна огибает препятствие. Это явление называется дифракцией.

1.50. Практически важный случай отражения звука наблюдается, когда отражающая поверхность перпендикулярна направлению распространения волн. В этом случае звуковая волна после отражения возвращается назад к источнику звука. Такой случай отражения называется эхом.

Пусть источник звука A находится на расстоянии d от преграды BC (рис. VII.21). Время, которое проходит от момента посылки сигнала из точки A до момента его возврата в эту же точку после отражения от преграды BC равно $t = 2d/v$, здесь