Примеры решения задач

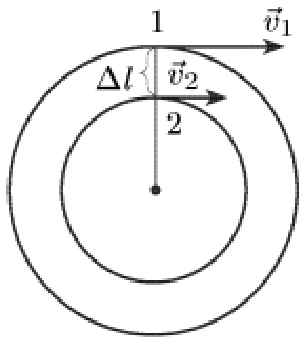
1. Найдите радиус вращающегося колеса, если известно, что линейная скорость точки, лежащей на ободе, в 2,5 раза больше линейной скорости точки, лежащей на 5 см ближе к оси колеса.

$v_1 = 2{,}5 v_2$
$\Delta l = 5$ см

$R - ?$

Точки 1 и 2, лежащие на одном радиусе, имеют одинаковые периоды вращения и разные линейные скорости:

$$v_1 = \frac{2\pi R}{T}; \qquad v_2 = \frac{2\pi (R - \Delta l)}{T}.$$



Используя соотношение, данное в условии задачи, запишем:

$$\frac{2\pi R}{T} = 2{,}5 \cdot \frac{2\pi (R - \Delta l)}{T}.$$

Произведя сокращения, можно найти радиус R:

$$R = 5 \cdot \Delta l / 3;$$

$$[R] = \text{м}; \qquad R \approx 8{,}33 \text{ м}.$$

2. Во сколько раз угловая скорость часовой стрелки меньше угловой скорости минутной стрелки?

$T_1 = 12$ ч
$T_2 = 1$ ч

$\dfrac{\omega_1}{\omega_2} - ?$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}; \qquad \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2};$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{12}.$$

Угловая скорость часовой стрелки в 12 раз меньше угловой скорости минутной стрелки.

3. Радиус кривизны колодезного ворота в 3 раза больше радиуса вала, на который наматывается трос (рис. 1.85). Какова линейная скорость конца рукоятки при поднятии ведра с глубины 10 м за 20 с?

$R_1 = 3R_2$
$h = 10$ м
$t = 20$ с

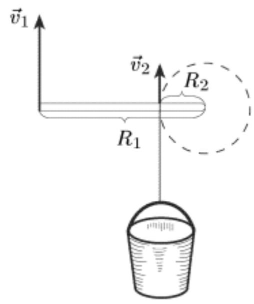
$v_1 - ?$

Линейная скорость конца рукоятки

$$v_1 = \frac{2\pi R_1}{T},$$

а точек на поверхности вала

$$v_2 = \frac{2\pi R_2}{T}.$$



$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Отсюда

$$v_1 = v_2 R_1 / R_2.$$

Линейная скорость точек на поверхности вала равна скорости равномерного подъема ведра:

$$v_2 = h/t.$$

Тогда

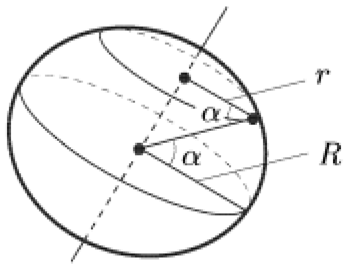
$$v_1 = \frac{h \cdot R_1}{t \cdot R_2} = \frac{h \cdot 3R_2}{t \cdot R_2} = \frac{3h}{t};$$

$$[v_1] = \frac{\text{м}}{\text{с}}; \qquad v_1 = 1{,}5 \text{ м/с}.$$

4. Какова линейная скорость точек поверхности Земли, соответствующая широте г. Минска при суточном вращении Земли, если город расположен на широте 54°, а радиус Земли 6400 км.

$\alpha = 54°$
$R = 6{,}4 \cdot 10^6$ м
$T = 24$ ч $= 8{,}64 \cdot 10^4$ с

$v - ?$



$$r = R\cos\alpha.$$

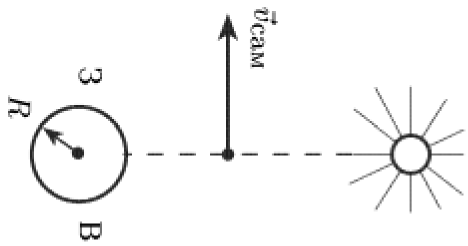
$$v = \frac{2\pi R\cos\alpha}{T};$$

$$[v] = \frac{\text{м}}{\text{с}}; \qquad v = 274\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

5. С какой скоростью и в каком направлении должен лететь самолет над экватором на высоте 10 км над Землей,чтобы Солнце летчику казалось неподвижным, то есть находилось все время на одной и той же высоте над горизонтом? Радиус Земли — 6400 км.

$h = 7$ км
$T = 24$ ч
$R_З = 6400$ км

$v - ?$

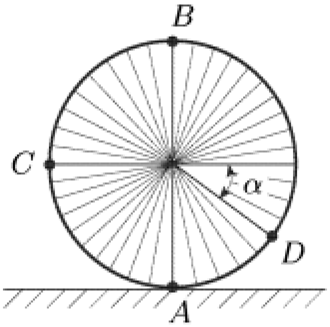


Солнце будет находиться в покое относительно самолета, если их скорости относительно Земли будут направлены одинаково (с востока на запад) и период обращения самолета равен периоду суточного вращения Земли — 24 часам.

Поэтому линейная скорость самолета

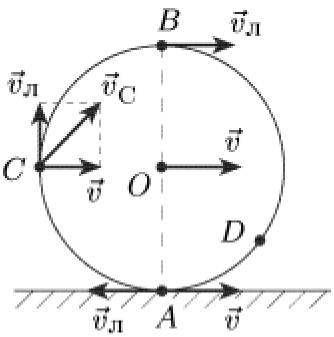
$$v = \frac{2\pi(R_З + h)}{T}; \qquad [v] = \frac{\text{м}}{\text{с}}; \qquad v = 1677{,}3 \text{ км/ч} = 465{,}9 \text{ м/с}.$$

6. Велосипедист едет с постоянной скоростью по прямолинейному участку дороги. Найдите мгновенные скорости точек A. B, C, D, лежащих на ободе колеса, относительно земли.

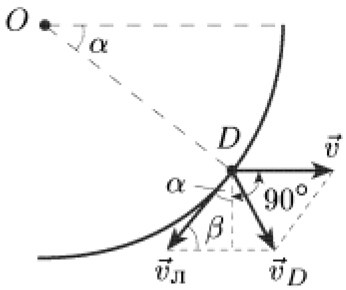


При качении колеса по земле все его точки участвуют одновременно в двух движениях: вдоль земли с постоянной скоростью v, направление которой все время горизонтально, и вокруг оси с линейной скоростью $v_л$. Скорость каждой точки определится как векторная сумма поступательной скорости колеса v и вектора линейной скорости в данной точке

$$|\vec{v}_л| = |\vec{v}|.$$



а



б

В точке A скорости $\vec{v}$ и $\vec{v}_л$ направлены в противоположные стороны, поэтому

$$v_A = v - v_л = 0;$$

в точке B составляющие скорости направлены в одну сторону:

$$v_B = v_л + v = 2v.$$

В точке C векторы $\vec{v}$ и $\vec{v}_л$ расположены под углом 90°, поэтому для нахождения результирующей скорости в этой точке воспользуемся теоремой Пифагора:

$$v_C = \sqrt{v_л^2 + v^2} = v \cdot \sqrt{2}.$$

Для подсчета результирующей скорости точки D вынесем часть дуги с данной точкой отдельно (рис. I.89 *б*). Значение угла $\beta = 90 - \alpha$. Величину вектора $\vec{v}_D$ можно найти по теореме косинуса:

$$v_D = \sqrt{v_л^2 + v^2 - 2v_л \cdot v \cdot \cos(90 - \alpha)} =$$

$$= \sqrt{2v^2(1 - \sin\alpha)} = v \cdot \sqrt{2(1 - \sin\alpha)}.$$

7. Волчок, вращаясь с частотой 360 об/мин, свободно падает с высоты 19.6 м. Сколько оборотов он сделает за время падения?

$v_0 = 0$

$\nu = 360\ \frac{\text{об.}}{\text{мин}} = 6\ \frac{\text{об.}}{\text{с}}$

$h = 19{,}6$ м

$n - ?$

Волчок участвует одновременно в двух независимых движениях: свободно падает и вращается. Время падения вычислим по формулам

$$h = \frac{gt^2}{2}; \qquad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

За это время волчок совершает число оборотов

$$n = \nu \cdot t = \nu \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}; \qquad n = 12 \text{ оборотов.}$$