

Решение задач по электростатике

(Закон Кулона. Напряженность электрического поля)

Г. Я. Мякишев

Задачи по электростатике часто предлагаются на вступительных экзаменах. Причем они весьма различны по методам решения.

Задачи по электростатике (в отличие, например, от задач по механике и молекулярной физике) могут вызвать дополнительные затруднения, связанные с использованием различных систем единиц. Наряду с системой СИ в электростатике продолжают пользоваться абсолютной системой единиц. Различие обеих систем состоит в том, что основные формулы, используемые для решения задач, имеют коэффициенты, отличающиеся величиной и размерностью. Причем именно в абсолютной электростатической системе СГСЭ коэффициенты формул электростатики имеют самый простой вид. Поэтому электростатические задачи удобнее решать в этой системе.

Закон Кулона

Первая группа задач связана с непосредственным применением закона Кулона.

В однородной среде с диэлектрической проницаемостью ϵ два точечных тела с зарядами q_1 и q_2 на расстоянии R взаимодействуют с силой

$$F = k \frac{q_1 q_2}{\epsilon R^2}. \quad (1)$$

В системе СГСЭ $k=1$, а в системе СИ $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, где $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 8,85 \times 10^{-12} \frac{\Phi}{M}$ электрическая постоянная.

Единица заряда в СИ — кулон содержит $3 \cdot 10^9$ единиц заряда СГСЭ.

Кулоновские силы направлены вдоль линий, соединяющих заряжен-

ные тела (такие силы называются центральными).

Особых затруднений при решении задач на применение закона Кулона к взаимодействию точечных зарядов обычно не возникает. Это типичные статические задачи, только наряду с механическими силами в них появляется еще электрическая сила. Вот пример подобного рода задачи.

Задача 1. Три одинаковых маленьких шарика с массами $m=0,1$ г подвешены в одной точке на шелковых нитях длиной $l=20$ см. Какие одинаковые заряды следует сообщить шарикам, чтобы каждая нить составляла с вертикалью угол $\alpha=30^\circ$?

Шарики располагаются по углам равностороннего треугольника ABC (рис. 1). Катет AD треугольника AOD (OD — вертикаль) равен $\frac{l}{2}$,

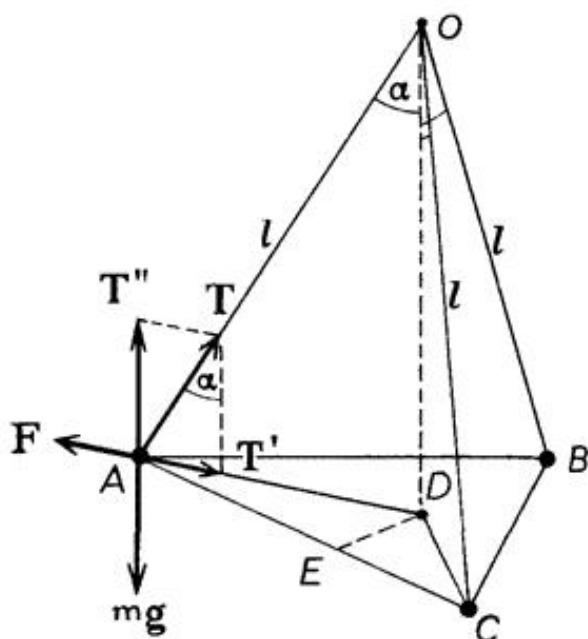


Рис. 1

так как он лежит против угла в 30° . Катет DE треугольника ADE равен $\frac{l}{4}$. Сторона $AC = 2AE =$
 $= 2 \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{16}} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$.

На каждый шарик со стороны соседнего действует сила $F_1 = \frac{4q^2}{3l^2}$ (рис. 2). Сила, действующая со стороны любых двух шариков на третий,

$$F = 2F_1 \cos \alpha = \frac{4q^2}{l^2\sqrt{3}}.$$

Шарик находится в равновесии, когда горизонтальная составляющая натяжения нити $T' = T \sin \alpha = F$, а вертикальная составляющая $T'' = T \cos \alpha = mg$ (рис. 1). Отсюда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{mg}$ и $q = \frac{l}{2} \sqrt{mg} \approx 100$ ед. СГСЭ.

При решении задач на закон Кулона надо иметь в виду, что этот закон относится к взаимодействию точечных заряженных тел и неприменим к телам произвольной формы. Точечными же можно считать тела в том случае, когда их геометрические размеры значительно меньше расстояния между ними. Поэтому при вычислении сил взаимодействия двух тел, одно из которых или оба не являются точечными, нужно мысленно разделить большое тело на малые элементы так, чтобы каждый элемент можно было рассматривать как точечный заряд.

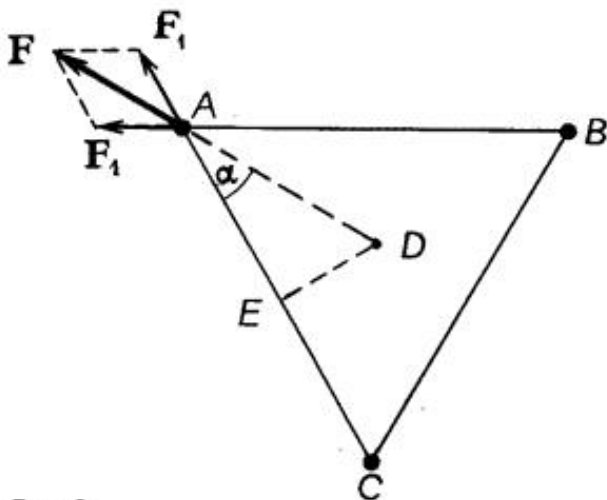


Рис. 2.

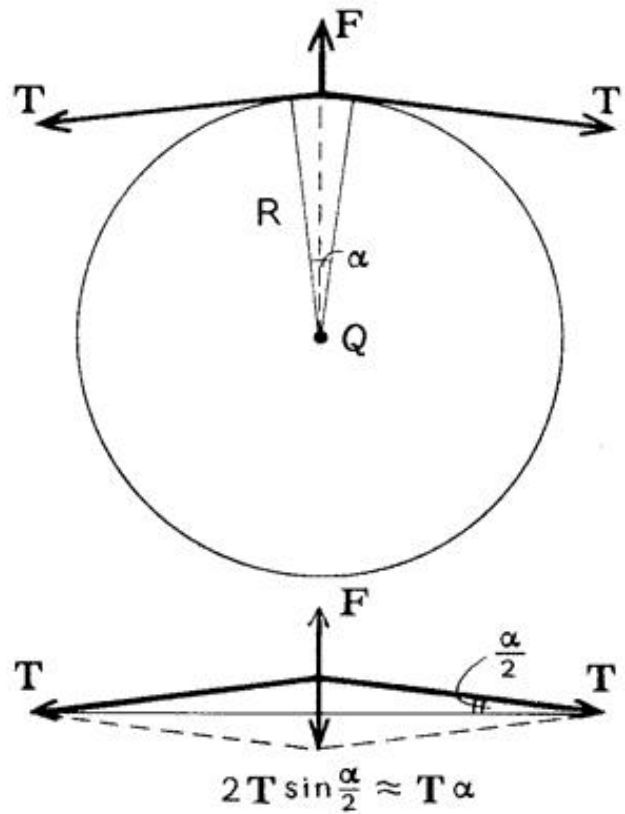


Рис. 3.

Задача 2. Тонкое проволочное кольцо радиуса R несет электрический заряд q . В центре кольца расположен одноименный с q заряд Q , причем $Q \gg q$. Определить силу, растягивающую кольцо.

Так как $Q \gg q$, то взаимодействием между отдельными элементами кольца можно пренебречь. Выделим малый элемент кольца длины $R\alpha$ (рис. 3). Со стороны заряда Q на него действует сила $F = \frac{Q\Delta q}{R^2}$,

где $\Delta q = \frac{q\alpha}{2\pi}$.

Силы натяжения кольца T уравновешивают F . Из условия равновесия, учитывая, что α мало, имеем

$$F = 2T \sin \frac{\alpha}{2} = T\alpha.$$

Искомая сила натяжения $T = \frac{Qq}{2\pi R^2}$.

Задача решалась в системе СГСЭ. В системе СИ

$$T = \frac{Qq}{8\pi^2 \epsilon_0 R^2}.$$

Напряженность электрического поля

Взаимодействие между неподвижными заряженными телами осуществляется посредством электрического поля. Количественной характеристикой его является вектор напряженности $\mathbf{E}(x, y, z)$, представляющий собой отношение силы, действующей на точечный заряд, к величине этого заряда. Сила, действующая на заряд q , равна *)

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \quad (2)$$

При решении задач на вычисление напряженности электрического поля прежде всего необходимо определить напряженность поля точечного заряда. Она равна

$$E = \frac{q}{\epsilon R^2} \text{ в системе СГСЭ}, \quad (3)$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R^2} \text{ в системе СИ}.$$

Если имеется совокупность точечных зарядов, то напряженность поля равна геометрической сумме напряженностей, создаваемых отдельными зарядами.

Для вычисления напряженности поля заряженного тела конечных размеров его нужно мысленно разбить на отдельные элементы и вычислять искомую напряженность как геометрическую сумму напряженностей, созданных всеми элементами. Но лишь в случае простой симметрии в распределении зарядов на теле задача определения напряженности решается

*) Формула (2) весьма проста, но физическое понимание силы F содержит моменты, на которых следует остановиться. Электрическое поле действует на заряженные тела, сообщая им ускорение или компенсируя другие силы, если тела неподвижны. Но сами заряды не действуют на поле с какой-либо силой; они его только создают. Электрическое поле не является объектом, подчиняющимся механике Ньютона, и соответственно сила (2) не является обычной силой в смысле механики Ньютона. В уравнении движения (втором законе Ньютона) она играет ту же роль, что и обычные механические силы: тяготение, упругость, трение. Но третий закон Ньютона к ней неприменим вообще.

достаточно просто. Например, если заряд распределен по сфере симметрично, то вне шара напряженность поля определяется формулой (3). Причем под R надо понимать расстояние от центра сферы, а не от ее поверхности. Элементарное и соответственно не очень строгое доказательство этого приведено в новом учебном пособии «Физика. 9» Б. Б. Буховцева, Ю. Л. Климонтовича, Г. Я. Мякишева. Там же можно посмотреть, как выводится формула для напряженности поля бесконечной заряженной плоскости с плотностью поверхностного заряда σ :

$$E = \frac{2\pi\sigma}{\epsilon} \text{ (СГСЭ)} \text{ или}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0\epsilon} \text{ (СИ)}. \quad (4)$$

Задача 3. Выведите формулу (4), исходя из того, что однородное поле в плоском конденсаторе представляет собой сумму полей, созданных зарядами обеих пластин, а его емкость $C = \frac{\epsilon S}{4\pi d}$, где S — площадь обкладок, d — расстояние между ними.

У положительно и отрицательно заряженных пластин конденсатора поля отличаются, очевидно, лишь знаком; причем внутри конденсатора они складываются, а вне его компенсируют друг друга. Таким образом, $E = 2E_1 = \frac{U}{d}$, здесь E_1 — поле одной пластины, U — разность потенциалов между ними. В свою очередь

$$U = \frac{q}{C} = \frac{4\pi qd}{\epsilon S} = \frac{4\pi\sigma d}{\epsilon} \left(\text{так как } \sigma = \frac{q}{S} \right),$$

откуда

$$E_1 = \frac{2\pi\sigma}{\epsilon}.$$

Однородное электрическое поле между заряженными пластинами сообщает частицам постоянное по величине и направлению ускорение. Поэтому заряженные частицы в таком поле движутся так же, как обычные тела под действием силы тяготения вблизи Земли. Разница состоит

лишь в том, что Земля сообщает всем телам одно и то же ускорение $g \approx \approx 980 \text{ см/сек}^2$, а ускорение частицы в электрическом поле зависит от отношения заряда к массе:

$$a = \frac{q}{m} E. \quad (5)$$

Задача 4. Математический маятник представляет собой шарик массы $m=1 \text{ г}$, подвешенный на шелковой нити длиной $l=36 \text{ см}$. Как изменится период колебаний маятника, если, сообщив шарiku положительный или отрицательный заряд $q = \pm 20 \text{ ед. заряда СГСЭ}$, поместить маятник в однородное электрическое поле с напряженностью $E=10 \text{ ед. напряженности СГСЭ}$, силовые линии которого направлены вертикально вниз.

Без электрического поля период колебаний маятника равен $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \approx 1,2 \text{ сек}$. В электрическом поле ускорение маятника будет равно $g + \frac{q}{m} E$. Следовательно,

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + \frac{q}{m} E}} = 2\pi \sqrt{\frac{lm}{gm + qE}}.$$

Если $q = +20 \text{ ед. заряда СГСЭ}$, то $T_1 \approx 1,1 \text{ сек}$ и $T_1 - T_0 \approx -0,1 \text{ сек}$. В случае $q < 0$ $T_2 \approx 1,35 \text{ сек}$ и $T_2 - T_0 \approx 0,15 \text{ сек}$.

Задача 5. В сильном однородном электрическом поле напряженностью E на одной силовой линии в точках 1 и 2, расположенных на расстоянии l_0 друг от друга, находятся протон и электрон (рис. 4). Начальная скорость обеих частиц равна нулю. Чему будет равно рас-

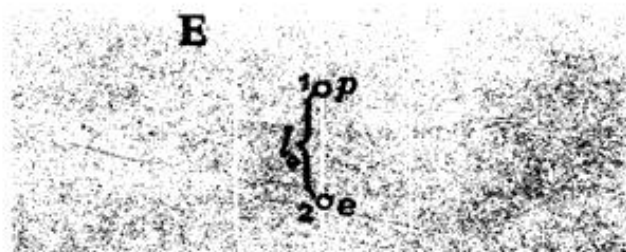


Рис. 4.

стояние между частицами спустя время τ после начала движения?

Выберем начало отсчета в точке 2, где находится электрон, и за положительное направление примем направление напряженности электрического поля. Пренебрегая взаимодействием частиц друг с другом (сильное поле), можно считать движения электрона и протона равноускоренными. Тогда, согласно известной кинематической формуле, координата протона в момент времени τ будет равна

$$x_1 = l_0 + \frac{e}{m_p} E \frac{\tau^2}{2},$$

где e — заряд, m_p — масса протона.

Координата электрона

$$x_2 = -\frac{e}{m_e} E \frac{\tau^2}{2},$$

где m_e — масса электрона. Искомое расстояние

$$l = x_1 - x_2 = l_0 + \frac{eE\tau^2}{2} \frac{m_p + m_e}{m_p m_e} \approx$$

$$\approx l_0 + \frac{eE\tau^2}{2m_e}, \text{ так как } m_p \gg m_e.$$

Проводники в электростатическом поле

При решении большого числа задач нужно знать, как ведут себя в электростатическом поле проводники. Можно показать, что напряженность поля внутри проводника равна нулю, а на его поверхности направлена перпендикулярно проводнику. Заряд внутри проводника также равен нулю; весь он сосредоточен на поверхности проводника.

Поверхностный заряд имеет наибольшую плотность на острие, где кривизна поверхности максимальна. Наглядное подтверждение этому можно получить, решив следующую задачу.

Задача 6. Два проводящих шарика радиусов r и R соединены длинным проводником. Найти отношение поверхностных плотностей зарядов шариков, если системе сообщен некоторый заряд.

Потенциалы обоих шариков одинаковы. Если заряды шариков обозначить через Q_1 и Q_2 , а их емкости — через C_1 и C_2 , то можно записать следующее равенство:

$$\varphi = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}.$$

Так как $Q_1 = 4\pi r^2 \sigma_1$ и $Q_2 = 4\pi R^2 \sigma_2$ (σ_1 и σ_2 — поверхностные плотности зарядов), $C_1 = r$ и $C_2 = R$, то $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{Q_1 R^2}{Q_2 r^2} = \frac{C_1 R^2}{C_2 r^2} = \frac{R}{r}$.

Поверхностная плотность (как видно из ответа) тем больше, чем меньше радиус кривизны поверхности, причем плотность заряда обратно пропорциональна кривизне поверхности.

Равенство нулю напряженности поля внутри проводящего тела позволяет решить большое количество различных по сложности задач.

Задача 7. Найти напряженность электрического поля вблизи участка поверхности проводника с известной плотностью поверхностного заряда σ .

Очень близко к заряженной поверхности электрическое поле определяется поверхностной плотностью заряда по формуле $E_1 = 2\pi\sigma$. Ведь очень малый участок поверхности можно считать плоским, и вблизи этого участка будет справедлива формула (4) для напряженности поля равномерно заряженной бесконечной плоскости. Это поле создается по обе стороны заряженной поверхности (рис. 5). Но, кроме того, поле напряженностью E_2 создается вблизи данного элемента поверхности зарядами,

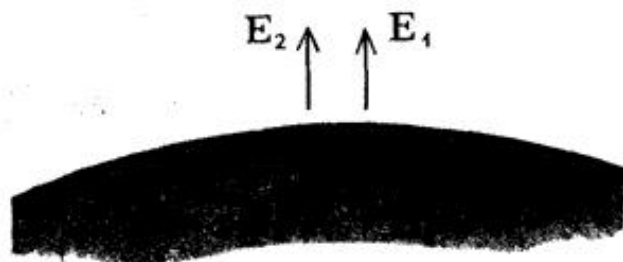


Рис. 5.

расположенными на всей остальной поверхности проводника. Так как внутри проводника напряженность поля равна нулю, то напряженности E_1 и E_2 в проводнике обязательно равны по величине и противоположны по направлению. Следовательно, вне проводника они также равны по величине, но по направлению совпадают. Результирующая напряженность

$$E = E_1 + E_2 = 2E_1 = 4\pi\sigma.$$

У п р а ж н е н и я

1. Почему в парикмахерских используются металлические (алюминиевые) расчески, а не обычные пластмассовые?

2. Определить расстояние r_1 между двумя одинаковыми электрическими зарядами, находящимися в масле с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 3$, если сила взаимодействия между ними такая же, как и в пустоте на расстоянии $r_2 = 30$ см.

3. Два шарика одинакового радиуса и массы подвешены в воздухе на нитях так, что их поверхности соприкасаются. После того, как каждому шарiku был сообщен заряд $q = 4 \cdot 10^{-7}$, шарики разошлись на угол $2\alpha = 60^\circ$. Найти массу шариков, если расстояние от точки подвеса до центра шарика $l = 0,2$ м.

4. Три одинаковых положительных заряда q расположены в вершинах равностороннего треугольника. Сторона треугольника равна a . Найти напряженность поля в вершине правильного тетраэдра, для которого этот треугольник служит основанием.

5. Прямоугольной металлической пластинке со сторонами a и b сообщен заряд q . Толщина пластинки s много меньше a и b . Определить напряженность поля, создаваемого этой заряженной пластинкой в точках пространства, близких к центру пластинки.

При решении следует воспользоваться формулой (4).

6. Пучок катодных лучей, направленный параллельно обкладкам плоского конденсатора, на пути $l = 4$ см отклоняется на расстояние $h = 2$ мм от первоначального направления. Какую скорость v и кинетическую энергию T имеют электроны катодного луча? Напряженность электрического поля внутри конденсатора $E = 22\,500$ в/м. Отношение заряда электрона к его массе $\frac{e}{m} = 1,76 \cdot 10^{11}$ ед. СИ, заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ к.

7. Мыльному пузырю радиуса R сообщен заряд Q . Найти силу, действующую на единицу поверхности пузыря. Мыльную пленку считать проводящей.